

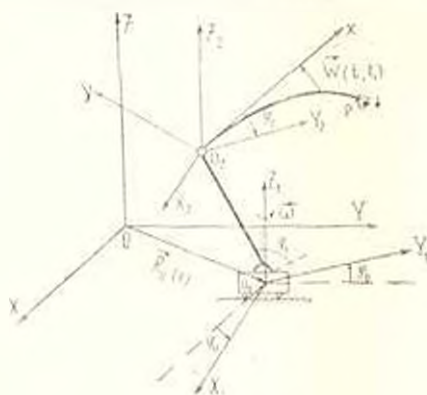
УДК 531.8, 62.50

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЙ ДВУХЗВЕННОГО УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА С ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМИ ПРИВОДАМИ НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

ГУКАСЯН А. А.

Рассматривается кинематическая модель двухзвенного антропоморфного манипулятора, последнее звено которого моделируется как упругий стержень. Управление всеми степенями подвижности манипулятора осуществляется электромеханическими приводами, каждый из которых содержит линейный электродвигатель постоянного тока [1]. В рамках линейной теории упругости рассматривается задача кинематического управления в смысле [2]. Приведена одна постановка задачи оптимального управления и оптимального проектирования манипулятора.

1. Механическая модель и движение манипулятора. Манипулятор состоит из подвижной платформы и механической руки со схватом (фиг.1). Рука состоит из двух звеньев, соединенных шарниром O_2 . Первое звено соединено шарниром с платформой и является абсолютно твердым телом. Второе звено манипулятора является упругим стержнем,



Фиг. 1

на конце которого расположен схват с грузом. Соединительные шарниры — идеальные цилиндрические. Платформа механической руки может перемещаться в горизонтальной плоскости. Манипулятор имеет пять степеней свободы: движение осуществляется посредством электромеханических приводов D_z ($z = x, y, z_0, \varphi_0, \psi$). Приводы $D_x, D_y, D_{z_0}, D_\psi$ расположены на платформе и управляют перемещением платформы, поворотом манипулятора относительно вертикальной оси, а также поворотом второго звена относительно плат-

формы, соответственно. Привод D_1 расположен в шарнире O_2 и управляет поворотом второго звена относительно первого. Для описания уравнений движения манипулятора введем инерциальную $OXYZ$ и неинерциальные $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$ системы координат. Введем обозначения: l_1 —длина первого звена; l_2 —длина второго звена; $\vec{R}_0(t) = (x(t), y(t), 0)^T$ —радиус-вектор платформы относительно системы координат $OXYZ$ (символ T означает транспонирование); h —высота платформы; φ_0 —угол между осями OX и O_1X_1 (φ_0 —угол поворота манипулятора относительно оси O_1Z_1); φ_1 —угол поворота первого звена относительно платформы; φ_2 —угол поворота второго упругого звена относительно оси O_2Y_2 (φ_2 —угол между касательной O_2x к упругому звену O_2p в точке O_2 и осью O_2Y_2); m_0 —масса платформы; m_1 —масса первого звена; m_2 —масса второго звена; m —масса груза на схвате; m_1 —масса привода в шарнире O_2 ; $\xi(t) = (\xi_1, \xi_2)^T$ —координаты точки нейтральной линии второго звена; ω —вектор угловой скорости вращения манипулятора относительно оси O_1Z_1 ; $\vec{W}(t, \xi)$ —вектор упругой деформации второго звена относительно точки O_2 в системе $O_2X_2Y_2Z_2$; $\vec{R}(t, \xi)$ —радиус-вектор точки нейтральной линии второго звена с координатой ξ в момент времени t относительно точки O в системе $OXYZ$; $\rho(\xi)$ —линейная плотность второго звена; $EJ(\xi)$ —жесткость второго звена на изгиб (E —модуль Юнга материала, $J(\xi)$ —момент инерции поперечного сечения); $S(\xi)$ —площадь поперечного сечения второго звена; функции $\rho(\xi)$, $J(\xi)$, $S(\xi)$ предполагаются достаточно гладкими; n —передаточное число привода D_1 ; $\vec{Q} = (F_x, F_y, M_x, M_y, M_z)^T$ —вектор, компоненты которого—электромагнитные силы и моменты, приложенные к ротору электродвигателей приводов; L_1 —коэффициент индуктивности обмотки ротора электродвигателя D_1 -го привода; k_2 —электрическое (омическое) сопротивление обмотки ротора электродвигателя D_2 -го привода; k_1 —коэффициент пропорциональности между электрическим током цепи ротора электродвигателя D_1 -го привода и соответствующей электромагнитной силой или моментом ($F_x = i_1 k_1$, $F_y = i_2 k_1$, $M_x = i_3 k_2$, $M_y = i_4 k_2$, $M_z = i_5 k_2$); u —электрическое напряжение, подаваемое на вход электродвигателя D_1 -го привода. Статоры электродвигателей и корпуса редукторов приводов D_1 ($v = x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$) жестко связаны с платформой и первым звеном механической руки манипулятора, соответственно.

Векторы $\vec{R}(t, \xi)$ (в системе $OXYZ$); $\omega(t)$ (в системе $O_1X_1Y_1Z_1$); $\vec{W}(t, \xi)$ (в системе $O_2X_2Y_2Z_2$) имеют вид:

$$\vec{W}(t, \xi) = \begin{bmatrix} -w_2(t, \xi) \\ -w_1(t, \xi) \sin \varphi_2 \\ w_1(t, \xi) \cos \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$\vec{R}(t, \xi) = \begin{bmatrix} x(t) - w_2(t, \xi) \cos \varphi_0 - \{L_1 \cos \varphi_1 + \xi \cos \varphi_2 - w_1(t, \xi) \sin \varphi_2\} \sin \varphi_0 \\ y(t) - w_2(t, \xi) \sin \varphi_0 + \{L_1 \cos \varphi_1 + \xi \cos \varphi_2 - w_1(t, \xi) \sin \varphi_2\} \cos \varphi_0 \\ h + L_1 \sin \varphi_1 + \xi \sin \varphi_2 + w_1(t, \xi) \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

В рамках линейной теории упругих стержней предполагается, что упругие смещения второго звена механической руки манипулятора малы (большая изгибная жесткость $EJ(z)$ по сравнению с его длиной $|\dot{W}(t, z)|/L_2 = C(z)$, $z \ll 1$, а максимальный период T , собственных упругих колебаний мал по сравнению с характерным временем T процесса управления манипулятором T_0 ($T = O(\epsilon^{1/2})$). Начальные распределения $w_i(t_0, z) = f_i^0(z)$, $\dot{w}_i(t_0, z) = f_i^1(z)$, ($i=1, 2$) при этом, естественно, считаются малыми, а $x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \sim 1$; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}_0, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2 \sim \epsilon^{1/2}$, $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2 \sim 1$.

Кинетическая энергия движения рассматриваемой механической системы манипулятора имеет вид

$$K = \sum_{i=0}^2 K_i + \frac{1}{2} \int_0^L |\dot{w}(t, z)|^2 dz \quad (1.2)$$

где K_0 — кинетическая энергия движения платформы, K_1 — кинетическая энергия движения первого звена, K_2 — кинетическая энергия двигателя в шарнире O_2 , как точечный груз на конце первого звена, K_3 — кинетическая энергия вращения роторов двигателей привода, а последнее слагаемое — кинетическая энергия движения второго звена с грузом на хвате. Кинетическая энергия движения точечной массы на хвате манипулятора учитывается путем добавления к $\rho(z)s(z)$ дельта-функции интенсивности m , то есть $\rho z = \rho_1(z)\lambda(z) + m\delta(z-L_2)$.

Вычисляя кинетическую энергию по формуле (1.2) и оставив члены, порядок малости которых не превышает ϵ^2 , получим

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2} Ax^2 + \frac{1}{2} By^2 + \frac{c}{2} (\varphi_1^2 - \varphi_0 \cos^2 \varphi_1) - I_0 (x \varphi_0 \cos \varphi_1 + \\ & + y \varphi_1 \sin \varphi_1) + \frac{1}{2} E \varphi_0 L_1 \cos \varphi_1 (\varphi_0 L_1 \cos \varphi_1 - 2x) + \\ & + \frac{1}{2} E \varphi_1 L_1 (\varphi_1 L_1 - 2y \sin \varphi_1) + \frac{1}{2} \int_0^L |\dot{w}_1(t, z) + \dot{w}_2(t, z) + \\ & + 2\dot{w}_1(t, z) [\varphi_0 z + L_1 \varphi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - y \sin \varphi_2] + 2\dot{w}_2(t, z) \times \\ & \times [\varphi_0 L_1 \cos \varphi_1 + \varphi_0 z \cos \varphi_2 - x] + 2\dot{w}_1(t, z) [\varphi_0 x \sin \varphi_2 - \\ & - L_1 \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \frac{1}{2} \varphi_0^2 \sin 2\varphi_2 - 2\varphi_1 \varphi_2 L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] + \\ & + 2\dot{w}_2(t, z) [\varphi_0^2 \sin \varphi_2 + \varphi_1 L_1 \sin \varphi_1 - y] + \frac{\rho_1^2}{2} x^2 + \\ & + \frac{\rho_0^2}{2} y^2 \cos^2 \varphi_1 - 2\varphi_0 x^2 \cos \varphi_2 - 2\varphi_2 y^2 \sin \varphi_2 + 2\varphi_1 \varphi_2 L_1^2 \times \\ & \times \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \Big) dz + \frac{1}{2} (J_0 n_0^2 \dot{\varphi}_0^2 + J_1 n_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 n_2^2 \dot{\varphi}_2^2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $A = m_0 + m_1 + m_2 + m + m_1 + J_1 n_x^2$, $B = m_0 + m_1 + m_2 + m + m_1 + J_2 n_y^2$,

$$C = (J_1 + m_1 L_1^2), \quad D = m_1 L_1 + \frac{m_1 L_1}{2}, \quad E = m + m_2.$$

Здесь $J_1 = m_1 L_1^2/3$, J_2 ($x = x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$) — момент инерции вращения ротора электродвигателя D_2 по приводу.

Полная потенциальная энергия рассматриваемой механической системы равна сумме потенциальных энергий сил тяжести и упругих сил, возникающих при деформации стрелы:

$$\begin{aligned} \Pi = & \left(\frac{m_2}{2} + m_1 + m_1 \right) gh + \left(m_2 + \frac{m_1}{2} \right) g L_1 \sin \varphi_1 + \\ & + K \int_0^{L_1} \left[\rho s \left(L_1 \sin \varphi_1 + \xi \sin \varphi_2 - \omega_1(t, \xi) \cos \varphi_2 + h \right) d\xi + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_0^{L_1} EJ(\xi) \sum_{i=1}^2 |\omega_i(t, \xi)|^2 d\xi \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для вывода уравнений движения манипулятора используем вариационный принцип Гамильтона-Остроградского [3]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(K - \Pi + A) dt = 0 \quad (1.5)$$

где δK и $\delta \Pi$ — вариации кинетической и потенциальной энергий, а

$\delta A = \vec{Q} \cdot \delta \vec{\chi}$ — элементарная работа электромагнитных сил и моментов.

Здесь $\vec{\chi}$ — вектор с компонентами: $\vec{\chi} = (x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$.

Подставляя (1.3), (1.4) в (1.5) и учитывая, что $\delta \vec{\omega}_i = \delta \omega_i(t, \xi) = \delta \omega_i(t, \xi) = 0$ при $t = t_1, t_2$, получим с точностью до следующих псевдодифференциальных уравнений движения манипулятора в виде:

$$\begin{aligned} Ax + A_1 \varphi_0 - \int_0^{L_1} \rho s \omega_2(t, \xi) d\xi + f_1(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) &= n_1 F_1 \\ By + A_2 \varphi_1 + A_3 \varphi_2 - \sin \varphi_2 \int_0^{L_1} \rho s \omega_1(t, \xi) d\xi + f_2(\varphi_1, \varphi_2) &= n_2 F_2 \\ A_4 \ddot{\varphi}_0 + A_5 \ddot{x} + \int_0^{L_1} \rho s_1 \omega_2(t, \xi) \{ L_1 \cos \varphi_1 + \xi \cos \varphi_2 \} d\xi + f_3(x, \varphi_0, \varphi_1) &= n_3 M_1 \\ A_6 \ddot{\varphi}_1 + A_7 \ddot{y} + A_8 \ddot{\varphi}_2 + L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{L_1} \rho s \omega_1(t, \xi) d\xi &= \end{aligned}$$

$$+ f_5(x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = n_{11} M_{11} \quad (1.6)$$

$$A_0 \varphi_2 + A_{10} \varphi_1 + A_{11} y + \int_0^{L_1} \rho s^2 \omega_1(t, z) dz =$$

$$+ f_5(x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = n_{11} M_{11} + g \cos \varphi_2 \int_0^{L_1} \rho s \omega_2(t, z) dz$$

где коэффициенты при старших производных и функции $f_i(\cdot)$ ($i=1, 2, \dots, 5$) определяются следующим образом (скобкой $(\cdot)$ обозначены соответствующие аргументы функции f_i):

$$A_1 = A_5 = -L_1 \cos \varphi_1 (EL_1 + D) - \int_0^{L_1} \rho s^2 \cos \varphi_2 dz$$

$$A_2 = A_9 = -L_1 \sin \varphi_1 (EL_1 + D); \quad A_3 = A_{11} = -\sin \varphi_2 \int_0^{L_1} \rho s^2 dz$$

$$A_4 = \cos \varphi_1 (EL_1^2 + C \cos \varphi_1); \quad A_6 = C + EL_1^2 + J_1 n^2$$

$$A_7 = A_{10} = L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{L_2} \rho s^2 dz; \quad A_8 = \int_0^{L_1} \rho s^2 dz + J_1 \varphi_1^2$$

$$f_1(\cdot) = \varphi_0 \varphi_1 \sin \varphi_1 (L_1 E + D) + \varphi_0 \varphi_2 \int_0^{L_1} \rho s^2 \sin \varphi_2 dz$$

$$f_2(\cdot) = -\varphi_1^2 \cos \varphi_2 (L_1 E + D) - \varphi_1^2 \cos \varphi_2 \int_0^{L_1} \rho s^2 dz$$

$$f_3(\cdot) = -\varphi_0 \varphi_2 \sin \varphi_1 (2C \cos \varphi_1 + EL_1^2) + \varphi_1 x \sin \varphi_1 (D + L_1 E) +$$

$$+ \int_0^{L_1} \rho s^2 \left[-\varphi_0 \varphi_1^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi_2 + 2L_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \right) - x \varphi_2^2 \sin \varphi_2 - \right.$$

$$\left. - 2\varphi_0 \varphi_1 L_1^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \right] dz; \quad f_4(\cdot) = -D x \varphi_0 \sin \varphi_1 +$$

$$+ C \varphi_1^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + D y \varphi_1 \cos \varphi_1 + \frac{L_1}{2} \varphi_0^2 L_1^2 \sin^2 \varphi_1 +$$

$$+ g \cos \varphi_1 (D + L_1 E) - \varphi_2 (\varphi_1 - \varphi_2) L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{L_2} \rho s^2 dz$$

$$+ \int_0^{L_2} \rho s^2 \left[\varphi_1^2 L_1^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \varphi_2 L_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] dz$$

$$f_2(\cdot) = |y\varphi_2(2\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2) - \varphi_1^2 L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \\ - \sin\varphi_2 \varphi_0(x - \varphi_0^2 L_1 \cos\varphi_1) + g \cos\varphi_2| \left| \int_0^{L_1} \varphi_0^2 \sin\varphi_1 d\varphi_1 + \frac{1}{2} \varphi_0^2 \sin 2\varphi_2 \right| \int_0^{L_2} \varphi_0^2 \sin\varphi_2 d\varphi_2$$

К уравнениям (1.6) необходимо также добавить уравнения баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей [1]:

$$L_z \frac{di_z}{dt} + R_z i_z + n_z k_z \gamma_z = u_z, \quad (z=x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) \quad (1.7)$$

$$(z_x = x, z_y = y, z_{\varphi_0} = \varphi_0, z_{\varphi_1} = \varphi_1, z_{\varphi_2} = \varphi_2)$$

Уравнения упругих колебаний в вертикальной и в горизонтальной плоскостях второго упругого звена манипулятора с грузом на схвате имеют вид (при $\varphi(z) = \varphi_0 \text{const}$, $s(z) = s_0 = \text{const}$, $f(z) = f_0 = \text{const}$)

$$\ddot{w}_i(t, \xi) + c_1 \dot{w}_i(t, \xi) = F_i(\cdot, \xi) \quad (1.8)$$

$$w_i(t, 0) = \dot{w}_i(t, 0) = \ddot{w}_i(t, L_2) = 0$$

$$\ddot{w}_i(t, L_2) = c_2 [\dot{w}_i(t, L_2) - F_i(\cdot, L_2)]$$

$$w_i(t_0, \xi) = f^1(\xi), \quad \dot{w}_i(t_0, \xi) = f^2(\xi)$$

где

$$c_1 = EJ_s / \rho_0 s_0, \quad c_2 = m_1 EJ_s, \quad 0 \leq \xi \leq L_2$$

$$F_1(\cdot, \xi) = | -\varphi_2^2 + y \sin\varphi_2 - L_1 \varphi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) | \cdot f_0(\cdot, \xi) \rho_0 s_0$$

$$F_2(\cdot, \xi) = | x - \varphi_0 L_1 \cos\varphi_1 - \varphi_0 \xi \cos\varphi_2 | \cdot f_0(\cdot, \xi) \rho_0 s_0$$

$$f_0(\cdot, \xi) = \varphi_0^2 x \sin\varphi_2 + L_1 \varphi_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \varphi_0^2 \sin\varphi_2 (L_1 \cos\varphi_1 + \xi \cos\varphi_2) - g \cos\varphi_2$$

$$f_1(\cdot, \xi) = 2\varphi_0 \varphi_1 L_1 \sin\varphi_1 + \varphi_0 y - 2\varphi_0 \varphi_2 \xi \sin\varphi_2$$

Здесь скобкой $(\cdot, \xi)$ обозначены соответствующие аргументы функций F_1 , f_0 , f_1 .

Решение задачи (1.8) ищем в виде [4]

$$w_i(t, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^i(t) X_n(\xi) \quad (1.9)$$

где собственные функции $X_n(\xi)$ с точностью до постоянного множителя C_n имеют вид

$$X_n(\xi) = C_n [\text{ch} \lambda_n \xi - \cos \lambda_n \xi + \beta_n (\sin \lambda_n \xi - \text{sh} \lambda_n \xi)] \quad (1.10)$$

$$\beta_n = (\text{ch} \lambda_n L_2 + \cos \lambda_n L_2) (\text{sh} \lambda_n L_2 + \sin \lambda_n L_2), \quad n=1$$

C_n определяется из условий ортогональности собственных функций. Собственные частоты λ_n задачи (1.8) определяются из трансцендентного уравнения

$$1 + \operatorname{ch} \epsilon_n L_2 \cos \epsilon_n L_2 + \epsilon_n (\operatorname{sh} \epsilon_n L_2 \cos \epsilon_n L_2 - \operatorname{ch} \epsilon_n L_2 \sin \epsilon_n L_2) = 0$$

$$\gamma = c_1 c_2, \quad n \geq 1$$

Используя условия ортогональности собственных функций, граничные условия задачи (1.8) и решая соответствующие дифференциальные уравнения, получим для коэффициентов Фурье $Q_n(t)$ следующие выражения:

$$Q_n(t) = A \cos \epsilon_n \sqrt{c_1} t - B \sin \epsilon_n \sqrt{c_1} t + \frac{1}{\epsilon_n \sqrt{c_1}} \int_0^t \sin \epsilon_n \sqrt{c_1} (t - \tau) b_1(\tau) d\tau, \quad (i=1, 2) \quad (1.11)$$

где

$$A = Q_n(t_0) \cos \epsilon_n \sqrt{c_1} t_0 - \frac{1}{\epsilon_n \sqrt{c_1}} Q_n(t_0) \sin \epsilon_n \sqrt{c_1} t_0$$

$$B = Q_n(t_0) \sin \epsilon_n \sqrt{c_1} t_0 + \frac{1}{\epsilon_n \sqrt{c_1}} Q_n(t_0) \cos \epsilon_n \sqrt{c_1} t_0$$

$$Q_n'(t_0) = \frac{1}{\epsilon_n} \int_0^{t_0} b_1(\xi) [1 + \gamma^2(\xi - L_2)] X_n(\xi) d\xi$$

$$Q_n'(t_0) = \frac{1}{\epsilon_n} \int_0^{t_0} b_2(\xi) [1 + \gamma^2(\xi - L_2)] X_n(\xi) d\xi$$

$$\Phi_i(t) = \frac{1}{x^2} \int_0^{t_1} F_i(\cdot, \xi) [1 + \gamma^2(\xi - L_2)] X_n(\xi) d\xi$$

Скобки $[t]$ означают неявную зависимость функций Φ_i от времени.

2. Задача кинематического управления. Пусть задано движение абсолютно жесткой модели манипулятора, то есть заданы $x(t)$, $y(t)$, $z_0(t)$, $z_1(t)$, $z_2(t)$ и их производные. Требуется определить движение упругой модели манипулятора, движение груза на схвате, электромагнитные силы и моменты, приложенные к ротору электродвигателей, электрические напряжения, подаваемые на вход электродвигателей, которые необходимы для обеспечения заданного движения для упругой модели манипулятора.

Из уравнений (1.6) следует, что электромагнитные силы и моменты можно представить в виде суммы двух слагаемых $\vec{Q} = \vec{Q}^0 + \vec{Q}^1$, где $\vec{Q}^0 = (F_x^0, F_y^0, M_{x_0}^0, M_{y_0}^0, M_{z_0}^0)$, $\vec{Q}^1 = (F_x^1, F_y^1, M_{x_1}^1, M_{y_1}^1, M_{z_1}^1)$. $\vec{Q}^0$ соответствует абсолютно жесткой модели манипулятора и определяется следующим образом:

$$F_x^0 = \frac{1}{x_0} [Ax + A_1 z_0 + f_1(\cdot)], \quad F_y^0 = \frac{1}{y_0} [By + A_2 z_1 +$$

$$+ A_3 \ddot{z}_2 + f_2(\cdot) \}. \quad M_{\tau_0}^0 = \frac{1}{n_{\tau_0}} [A_1 \ddot{\varphi}_0 + A_2 \ddot{x} + f_1(\cdot) \}$$

$$M_{\varphi_1}^0 = \frac{1}{n_{\varphi_1}} [A_6 \ddot{z}_1 + A_7 \ddot{\varphi}_2 + A_8 \ddot{y} + f_1(\cdot) \}. \quad M_{\varphi_2}^0 = \frac{1}{n_{\varphi_2}} [A_9 \ddot{\varphi}_1 + A_{10} \ddot{\varphi}_1 + A_{11} \ddot{y} + f_1(\cdot) \}$$
(2.1)

а Q^1 обусловлен упругой податливостью второго звена и его компоненты имеют вид

$$F_1^1 = -\frac{1}{n_1} \int_0^{t_1} \rho s \ddot{\omega}_2(t, \xi) d\xi, \quad F_2^1 = -\frac{1}{n_2} \sin \varphi_1 \int_0^{t_2} \rho s \ddot{\omega}_1(t, \xi) d\xi$$

$$A_1^1 = \frac{1}{n_{\tau_1}} \int_0^{t_1} \rho s \{ \ddot{\omega}_2(t, \xi) [l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2] \} d\xi$$

$$A_2^1 = \frac{1}{n_{\varphi_1}} \int_0^{t_1} \rho s l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\omega}_1(t, \xi) d\xi$$

$$A_3^1 = \frac{1}{n_{\varphi_2}} \int_0^{t_2} \rho s [\xi \ddot{\omega}_1(t, \xi) - g \cos \varphi_2 \ddot{\omega}_1(t, \xi)] d\xi$$
(2.2)

$\omega_i(t, \xi)$, ($i=1, 2$) определяются из (1.9)–(1.11).

Используя связь между электрическим током в цепи роторов электродвигателей приводов и электромагнитными силами и моментами (см. п. 1), получим уравнения (1.7) баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей в виде

$$L_s(Q_r^0 + \dot{Q}_s^1) + R_s Q_s^0 + Q_s^1 = k_1^* n_2 \gamma_2 + k_2 n_1 \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что управляющие напряжения, подаваемые на вход электродвигателей приводов, также можно представить в виде суммы двух слагаемых. Напряжение, которое необходимо для управления жесткой моделью манипулятора, и добавка, обусловленная упругостью второго звена, то есть $u_s = u_s^0 + u_s^1$, определяются следующими выражениями:

$$u_s^0 = \frac{1}{k_s} (L_s \dot{Q}_s^0 + R_s Q_s^0 + k_1^* n_2 \gamma_2), \quad u_s^1 = \frac{1}{k_s} (L_s \dot{Q}_s^1 + R_s Q_s^1) \quad (2.4)$$

где Q_s^0 и Q_s^1 определяются из (2.1), (2.2) соответственно.

Состояние механической системы в каждый момент времени, а также положение груза в системе $OXYZ$ можно определить с помощью радиуса-вектора $\vec{R}(t, \xi)$ из (1.1) после определения $\omega_i(t, \xi)$ ($i=1, 2$) (1.9).

3. *Некоторые частные случаи.* Важным случаем, когда в нуле

вом приближении можно получить более простые расчетные формулы для определения электромагнитных сил и моментов, является случай, когда $L_m \ll R$. Физический смысл неравенства означает, что время $\tau = L_m/R$ установления токов в цепях электродвигателей намного меньше времени рабочей операции манипулятора ($\tau_1 \ll T$). Это предположение выполняется практически для всех типов современных промышленных манипуляционных роботов.

Из рассматриваемой задачи следует также анализ движения и задачи кинематического управления некоторых часто встречающихся конструкций промышленных роботов с учетом упругой податливости второго звена: а) случай неподвижного основания манипулятора

($x(t) = y(t) = \text{const}$). Подвижными степенями свободы являются: $\varphi_i(t)$ ($i=0, 1, 2$); б) случай, когда $\varphi_1 = 90^\circ$. Подвижными степенями свободы являются: $x(t)$, $y(t)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_2(t)$; в) случай, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 90^\circ$. Подвижными степенями свободы являются: $x(t)$, $y(t)$, $\varphi_0(t)$; г) случай, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Подвижными степенями свободы являются $x(t)$, $y(t)$, $\varphi_0(t)$.

4. Об одной постановке задач оптимального управления и оптимального проектирования манипуляторов. Пусть заданы достигаемые манипулятором начальное и конечное состояния

$$\chi_i(t_0) = \chi_i^0, \quad \dot{\chi}_i(t_0) = \dot{\chi}_i^0, \quad \omega_i(t_0, \xi) = f_i^0(\xi), \quad \dot{\omega}_i(t_0, \xi) = \dot{f}_i^0(\xi), \quad (i=1, 2) \quad (4.1)$$

$$\chi_i(T) = \chi_i^T, \quad \dot{\chi}_i(T) = \dot{\chi}_i^T, \quad \omega_i(T, \xi) = g_i^T(\xi), \quad \dot{\omega}_i(T, \xi) = \dot{g}_i^T(\xi), \quad (i=1, 2)$$

Здесь $f_i^0(\xi)$, $g_i^T(\xi)$ ($i=1, 2$) — заданные согласованные с граничными условиями функции, описывающие начальные и конечные распределения упругих отклонений манипулятора. Время T окончания процесса управления манипулятором и конечные условия χ_i^T , $\dot{\chi}_i^T$, $g_i^T(\xi)$ могут быть фиксированными или свободными, принадлежащими некоторым допустимым областям:

$$T \in G_0, \quad \chi_i^T \in G_1, \quad \dot{\chi}_i^T \in G_2, \quad g_i^T \in G_3 \quad (4.2)$$

Через $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ обозначим конструктивные параметры манипулятора. В качестве этих параметров могут быть физико-геометрические параметры, то есть линейные размеры звеньев манипулятора, материалы, из которых изготовлены звенья, массы звеньев, грузоподъемность и т. п. Компоненты вектора $\bar{\xi}$ могут характеризовать также типы приводов (электрохимические, пневматические, гидравлические) и их расположение в конструкции манипулятора.

Вектор $\bar{\xi}$ выбирается, исходя из реального назначения манипулятора. Очевидно, что компоненты ξ_i должны удовлетворять условиям

$$\xi_i \in G_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.3)$$

Условия (4.3) определяют в пространстве конструктивных пара-

метров n -мерная область Q_i , каждой точке которого соответствует некоторая конструкция манипулятора [8].

Кроме ограничений на краевые условия (4.2) и на конструктивные параметры манипулятора (4.3), в общем случае на его движение и режим управления, могут быть наложены также ограничения вдоль траектории

$$(Q_i, \gamma_i, \gamma_i, \gamma_i) \in G \quad (4.4)$$

Ограничения на управления Q_i , на фазовые координаты (γ_i, γ_i) и на конструктивные параметры γ_i манипулятора могут быть разделены и не разделены. К числу ограничений типа (4.4) можно отнести также ограничения на частоты и амплитуды упругих колебаний манипулятора, напряженно-деформируемое состояния звеньев и т. д.

Для оценки технического уровня проектируемого манипулятора и качества выполнения манипулятором поставленной задачи зададим некоторый функционал, который в общем виде запишем

$$J(L, Q_i, \gamma_i) = \sup_{Q_i, \gamma_i} J(L, Q_i, \gamma_i)$$

$$(i=1, 2, \dots, n; \gamma_i = \gamma_i, \gamma_i, \gamma_i, \gamma_i, \gamma_i) \quad (4.5)$$

В качестве критерия типа (4.5) можно, например, принять мощность манипулятора, энергозатраты привода, быстродействие, вес манипулятора, стоимость, надежность и т. п. Применимость того или иного метода решения задач оптимального управления и оптимального проектирования манипулятора существенно зависит от вида ограничений (4.2) — (4.4) и от функционала (4.5). Исследованию некоторых задач оптимального управления и оптимального проектирования упругого манипулятора посвящен ряд работ [5—8 и др.].

ANALYSIS OF TWO SECTION ELASTIC MANIPULATORS MOTION WITH ELECTROMECHANIC DRIVINGS SYSTEMS ON A MOVING FOUNDATION

A. A. GUKASIAN

ՇԱՐՔԱԿԱՆ ՀԻՐԲԻ ՎԻՍԻՎՈՂ ԷԼԵԿՏՐՈՄԵԿԱՆԻԿԱԿԱՆ ՇԱՐՔԱՔԵՆՐԱՅԻՆ ՀԱՍՏԱԿԱՐԳՈՎ ԱՌԱՋԿԱԿԱՆ ԵՐԿՈՂԱԿ ՄԱՆԻՊՈՒԼԱՏՈՐԻ ՇԱՐՔԱԿԱՆ ԱՆԱԿԻՉ

Ա. Ա. ԴՈՒԿԱՍԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Առաձգական ձողերի դժույրն տեսության սահմաններում ուսումնասիրվում է շարժական հիմքի վրա դաշտիկ անտրոպոմորֆ մանիպուլյատորի շարժման կինեմատիկական զեկափարման խնդիրը:

Որոշված են առաձգական տեղափոխությունները, էլեկտրամագնիսական ուժերը, մոմենտները և էլեկտրական շարժողիչների մուտքին արվող լա-

րումները: Քննարկվում է առաձգական դուրամիկության ունեցող և հաճախ
 փանդիչող մանիպուլյատորների կոնստրուկցիաներ, որոնց հետադարձ
 ներք բխում են դիտարկվող խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Чиликин М. Г., Ключев В. И., Сандлер Л. С. Теория автоматического электропривода. М.: Энергия, 1979. 616 с.
2. Черноусько Ф. А. Динамика управляемых движений упругого манипулятора. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1981, № 5, с. 142—152.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. Тихоков А. И., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
5. Акуленко Л. Л. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия. Изв. АН СССР, ИММ, 1981, № 6, с. 1015—1103.
6. Акуленко Л. Л., Гукасян А. А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора. Изв. АН СССР, МТТ, 1983, № 5, с. 33—41.
7. Бологник Н. Н., Гукасян А. А. Управление движением манипулятора с учетом упругих колебаний стрелы. Изв. АН СССР, МТТ, 1983, № 1, с. 38—46.
8. Бербюк В. Е., Демидюк М. В. Об управляемом движении упругого манипулятора с распределенными параметрами. Изв. АН СССР, МТТ, 1984, № 2, с. 59—67.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
 6.VII.1987