

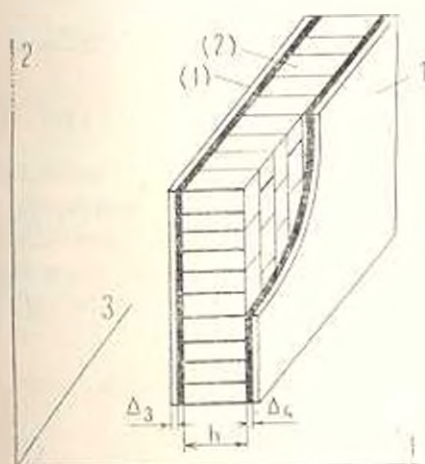
УДК 539.3:678.067

ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ УПРУГОСТИ СОТОВАСТОВ

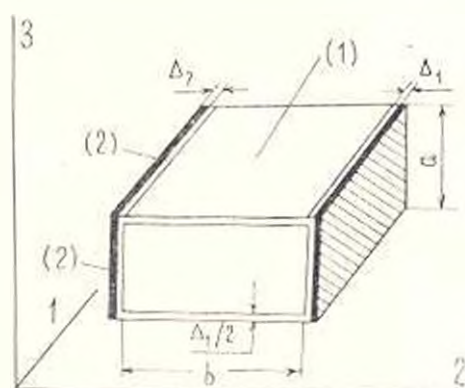
БЫКОВЦЕВ А. Г., КОЛОКОЛЬЧИКОВ В. В.

1. Рассмотрим сотовую конструкцию, состоящую из двух несущих обшивок (1) и ячеистого заполнителя (2), состоящего из ячеек прямоугольной формы (фиг. 1). Ячейки заполнены низко модульным сжимаемым материалом (например, пенопластом). Вычисление эффективных модулей упругости проводится в предположении, что размеры ячейки заполнителя значительно меньше размеров рассматриваемой конструкции. В этом случае сотопласт можно считать композиционным материалом, обладающим ортотропной симметрией.

Вначале определим модули упругости сотового заполнителя, которые равны эффективным модулям упругости характерного слоя, а последние в свою очередь равны эффективным модулям упругости характерной ячейки, изображенной на фиг. 2. Деформация характерной ячейки рассматривается в прямоугольной системе координат.



Фиг. 1



Фиг. 2

Расчет эффективных модулей упругости сотопласта проводится в предположении об изотропии материала основы заполнителя, клеевой прослойки и материала, заполняющего ячейки. Получение эффективных модулей упругости основано на принципе смешивания при последовательном и параллельном соединении элементов. Если деформация компонента соответствует параллельному соединению, то пред-

ние деформации компонент равны средним деформациям композита, а при последовательном соединении средние деформации композита равны сумме средних деформаций компонент.

Формула для энергии F в кристаллографической системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle F \rangle = \frac{1}{2} (c_{11} \langle \varepsilon_{11} \rangle^2 + c_{22} \langle \varepsilon_{22} \rangle^2 + c_{33} \langle \varepsilon_{33} \rangle^2) + c_{12} \langle \varepsilon_{11} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \\ + c_{13} \langle \varepsilon_{11} \rangle \langle \varepsilon_{33} \rangle + c_{23} \langle \varepsilon_{22} \rangle \langle \varepsilon_{33} \rangle + 2(c_{44} \langle \varepsilon_{23} \rangle \langle \varepsilon_{32} \rangle + \\ + c_{55} \langle \varepsilon_{13} \rangle \langle \varepsilon_{31} \rangle + c_{66} \langle \varepsilon_{12} \rangle \langle \varepsilon_{21} \rangle) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь величины $c_{11}, \dots$ — независимые эффективные модули упругости сотового заполнителя, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ — средние деформации сотового заполнителя.

Среднее значение свободной энергии для сотового заполнителя с учетом изотропии компонент равно

$$\langle F \rangle = \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^2 V_n^{(k)} \left| \frac{1}{2} \langle \varepsilon_{ii}^{(k)} \rangle_n^2 + \mu_n \langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle_n \langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle_n \right| \quad (1.2)$$

Здесь V_n, μ_n — постоянные Ламе компонент, $\langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle_n$ — средние деформации компонент.

В дальнейшем будем различать продольные и поперечные слои. Продольные слои обозначаются верхним индексом (1), а поперечные — (2). У характерной ячейки сотового заполнителя продольными слоями являются материал основы и материал, заполняющий ячейки, поперечными — основа и клей. Пусть $n=1$ соответствует клею, $n=2$ — основе, $n=3$ — материалу, заполняющему ячейки.

Рассматривая различные деформации характерной ячейки (фиг. 2), и соответствии с правилом смешивания получаем

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle_n = \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n, \quad \langle \varepsilon_{22} \rangle = \sum_{n=1}^3 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{22}^{(2)} \rangle_n + V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle_n \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle = \langle \varepsilon_{33}^{(2)} \rangle_n = \sum_{n=2}^3 V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle_n, \quad \langle \varepsilon_{12} \rangle = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{12}^{(2)} \rangle_n + V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle_n \\ \langle \varepsilon_{13} \rangle = \langle \varepsilon_{13}^{(2)} \rangle_n = \sum_{n=2}^3 \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle_n V_n^{(1)}, \quad \langle \varepsilon_{23} \rangle = V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{23}^{(1)} \rangle_n + \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{23}^{(2)} \rangle_n \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $V_n^{(k)}$ — относительный объем k -компоненты из n -материала.

Предполагается, что существует зависимость между средними деформациями композита в виде:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{23}^{(1)} \rangle_n = \alpha_{23n}^{(1)} \langle \varepsilon_{23} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle_n = \alpha_{13n}^{(1)} \langle \varepsilon_{13} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{12}^{(2)} \rangle_n = \alpha_{12n}^{(2)} \langle \varepsilon_{12} \rangle \\ \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle_n = \alpha_{12n}^{(1)} \langle \varepsilon_{12} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{13}^{(2)} \rangle_n = \alpha_{13n}^{(2)} \langle \varepsilon_{13} \rangle, \quad k=1,2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

ние деформации компонент равны средним деформациям композита, а при последовательном соединении средние деформации композита равны сумме средних деформаций компонент.

Формула для энергии F в кристаллографической системе координат имеет вид.

$$\begin{aligned} \langle F \rangle = & \frac{1}{2} (c_{11} \langle \varepsilon_{11} \rangle^2 + c_{22} \langle \varepsilon_{22} \rangle^2 + c_{33} \langle \varepsilon_{33} \rangle^2) + c_{12} \langle \varepsilon_{11} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \\ & + c_{13} \langle \varepsilon_{11} \rangle \langle \varepsilon_{33} \rangle + c_{23} \langle \varepsilon_{22} \rangle \langle \varepsilon_{33} \rangle + 2(c_{44} \langle \varepsilon_{23} \rangle \langle \varepsilon_{32} \rangle + \\ & + c_{55} \langle \varepsilon_{13} \rangle \langle \varepsilon_{31} \rangle + c_{66} \langle \varepsilon_{12} \rangle \langle \varepsilon_{21} \rangle) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь величины $c_{11}, \dots$ — независимые эффективные модули упругости сотового заполнителя. $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ — средние деформации сотового заполнителя.

Среднее значение свободной энергии для сотового заполнителя с учетом изотропии компонент равно

$$\langle F \rangle = \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^2 \frac{1}{k!} \left[\frac{1}{2} \langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle^2 + \mu_k \langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle \langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle \right] \quad (1.2)$$

Здесь μ_k, μ_n — постоянные Ламе компонент, $\langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle$ — средние деформации компонент.

В дальнейшем будем различать продольные и поперечные слои. Продольные слои обозначаются верхним индексом (1), а поперечные — (2). У характерной ячейки сотового заполнителя продольными слоями являются материал основы и материал, заполняющий ячейки, поперечными — основа и клей. Пусть $n=1$ соответствует клею, $n=2$ — основе, $n=3$ — материалу, заполняющему ячейки.

Рассматривая различные деформации характерной ячейки (фиг. 2) и в соответствии с правилом смешивания получаем

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{11} \rangle &= \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle_n = \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n, \quad \langle \varepsilon_{22} \rangle = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{22}^{(2)} \rangle_n + V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle_n, \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle &= \langle \varepsilon_{33}^{(2)} \rangle_n = \sum_{n=2}^3 V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle_n, \quad \langle \varepsilon_{12} \rangle = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{12}^{(2)} \rangle_n + V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle_n, \\ \langle \varepsilon_{13} \rangle &= \langle \varepsilon_{13}^{(2)} \rangle_n = \sum_{n=2}^3 \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle_n V_n^{(1)}, \quad \langle \varepsilon_{23} \rangle = V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{23}^{(1)} \rangle_n + \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{23}^{(2)} \rangle_n \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $V_n^{(k)}$ — относительный объем k -компоненты из n -материала.

Предполагается, что существует зависимость между средними деформациями компонента в виде:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle_n &= \chi_{33n}^{(1)} \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle_n = \chi_{11n}^{(1)} \langle \varepsilon_{11} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle_n = \chi_{22n}^{(1)} \langle \varepsilon_{22} \rangle, \\ \langle \varepsilon_{12}^{(k)} \rangle_n &= \chi_{12n}^{(k)} \langle \varepsilon_{12} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{13}^{(k)} \rangle_n = \chi_{13n}^{(k)} \langle \varepsilon_{13} \rangle, \quad k=1,2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рассмотрим следующие процессы деформирования:

$$\begin{aligned} 1. \langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \quad 2. \langle \varepsilon_{22} \rangle \neq 0; \quad 3. \langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0; \quad 4. \langle \varepsilon_{12} \rangle \neq 0; \quad 5. \langle \varepsilon_{13} \rangle \neq 0; \\ 6. \langle \varepsilon_{23} \rangle \neq 0; \quad 7. \langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle \neq 0; \quad 8. \langle \varepsilon_{33} \rangle = \langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \quad 9. \langle \varepsilon_{11} \rangle = \\ = \langle \varepsilon_{22} \rangle = \langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Вдоль процессов деформирования (1.5) с помощью соотношений (1.3), (1.4) вычисляются коэффициенты при средних деформациях в выражении для F (1.2). После сравнения с (1.1) получаем значения эффективных модулей упругости сотового заполнителя, выраженные через упругие характеристики и объемную долю компонент

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2 \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^2 \left| \frac{\varepsilon_n}{2} + \nu_n \left[V_n^{(k)} + V_n^{(1)} (x_{13n}^{(1)})^2 \right] \right| \\ c_{22} &= 2 \sum_{n=1}^3 \left[\frac{\varepsilon_n}{2} + \nu_n \left| \sum_{k=1}^2 (x_{23n}^{(k)})^2 V_n^{(k)} \right| \right]; \quad c_{33} = \sum_{n=1}^3 \nu_n \left[V_n^{(2)} + V_n^{(1)} (x_{13n}^{(1)})^2 \right] \\ c_{12} &= \sum_{n=1}^3 \nu_n \sum_{k=1}^2 (x_{23n}^{(k)})^2 V_n^{(k)} \\ c_{33} &= 2 \sum_{n=1}^3 \left| \frac{\varepsilon_n}{2} + \nu_n \left[V_n^{(2)} + V_n^{(1)} (x_{23n}^{(1)})^2 \right] \right|; \quad c_{12} = \sum_{n=1}^3 \nu_n \sum_{k=1}^2 (x_{23n}^{(k)})^2 V_n^{(k)} \\ c_{33} &= \sum_{n=1}^3 \nu_n \sum_{k=1}^2 V_n^{(k)} (x_{13n}^{(k)})^2; \quad c_{44} = \sum_{n=1}^3 \nu_n \sum_{k=1}^2 V_n^{(k)} (x_{23n}^{(k)})^2 \\ c_{23} &= \sum_{n=1}^3 \nu_n \left[V_n^{(1)} x_{22n}^{(1)} x_{33n}^{(1)} + V_n^{(2)} x_{22n}^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Постоянные $x_{ij}^{(k)}$, входящие в соотношения (1.6), определяются для следующих процессов деформирования:

$$1. \langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \quad 2. \langle \varepsilon_{22} \rangle \neq 0; \quad 3. \langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0; \quad 4. \langle \varepsilon_{12} \rangle \neq 0; \quad 5. \langle \varepsilon_{13} \rangle \neq 0 \quad (1.7)$$

Выражения для напряжений, соответствующие уравнениям (1.3) для деформаций, записанные с учетом того, что при последовательном соединении элементов средние напряжения в каждой компоненте одинаковы и равны средним напряжениям в композите, имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11} \rangle &= \sum_{n=2}^3 V_n^{(1)} \langle \sigma_{11}^{(1)} \rangle_n + \sum_{n=1}^3 V_n^{(2)} \langle \sigma_{11}^{(2)} \rangle_n; \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{22}^{(2)} \rangle_n = \\ &= \sum_{n=2}^3 V_n^{(1)} \langle \sigma_{22}^{(1)} \rangle_n \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \sum_{n=1}^2 \langle \sigma_{33}^{(2)} \rangle_n V_n^{(2)} + \langle \sigma_{33}^{(1)} \rangle_n V_n^{(1)}; \quad \langle \sigma_{12} \rangle = \langle \sigma_{12}^{(2)} \rangle_n = \sum_{n=2}^3 \langle \sigma_{12}^{(1)} \rangle_n V_n^{(1)} \\ \langle \sigma_{13} \rangle &= \sum_{n=1}^2 \langle \sigma_{13}^{(2)} \rangle_n V_n^{(2)} + V_n^{(1)} \langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle_n; \quad \langle \sigma_{23} \rangle = \langle \sigma_{23}^{(2)} \rangle_n = \sum_{n=2}^3 V_n^{(1)} \langle \sigma_{23}^{(1)} \rangle_n \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь $\langle \sigma_{ij} \rangle$ — средние напряжения в композите, $\langle \sigma_{ij} \rangle_n^{(k)}$ — средние напряжения в компонентах,

Используя закон Гука из соотношений (1.3), (1.4) и (1.8) для процессов деформирования (1.7), получаем

$$\begin{aligned} x_{22n}^{(2)} &= \left[\mu_n \left(\sum_{i=1}^2 \frac{V_i^{(2)}}{\mu_i} + \frac{V^{(1)}}{\sum_{i=2}^3 V_i^{(1)} E_i} \right) \right]^{-1}; \quad x_{12n}^{(1)} = \left[V^{(1)} + \sum_{i=2}^3 V_i^{(1)} \mu_i \sum_{j=1}^2 \frac{V_j^{(2)}}{E_j} \right]^{-1} \\ x_{12n}^{(2)} &= x_{23n}^{(2)}; \quad x_{13n}^{(1)} = \left[\mu_n \sum_{i=2}^3 \frac{V_i^{(1)}}{\mu_i} \right]^{-1}; \quad x_{33n}^{(1)} = \left[E_n \sum_{i=2}^3 \frac{V_i^{(1)}}{E_i} \right]^{-1}; \quad x_{12n}^{(1)} = x_{23n}^{(1)} \\ x_{22n}^{(1)} &= \left[E_n \left(\sum_{i=1}^2 \frac{V_i^{(2)}}{E_i} + \frac{V^{(1)}}{\sum_{i=2}^3 V_i^{(1)} E_i} \right) \right]^{-1}; \quad x_{22n}^{(2)} = \left[V^{(1)} + \sum_{i=2}^3 V_i^{(1)} E_i \sum_{j=1}^2 \frac{V_j^{(2)}}{E_j} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь E_i, μ_i — соответственно модули Юнга и сдвига i -компоненты.

Относительные объемы $V_i^{(k)}$ компонент характерной ячейки (фиг. 2) через размеры ячеек сотового заполнителя выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} V_1^{(1)} &= 0; \quad V_2^{(1)} = \frac{\Delta_1(b - 2\Delta_1)}{a(b + \Delta_2)}; \quad V_3^{(1)} = \frac{(a - \Delta_1)(b - 2\Delta_1)}{a(b + \Delta_2)} \\ V_1^{(2)} &= \frac{\Delta_1}{b + \Delta_2}; \quad V_2^{(2)} = \frac{2\Delta_1}{b + \Delta_2}; \quad V_3^{(2)} = 0; \quad V^{(1)} = \frac{b - 2\Delta_1}{b + \Delta_2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь Δ_1 — толщина стенок ячеек; Δ_2 — толщина клеевой прослойки; a, b — размеры характерной ячейки заполнителя.

Таким образом, соотношения (1.6), (1.9), (1.10) позволяют вычислять эффективные модули упругости сотового заполнителя в зависимости от геометрических параметров ячейки и упругих свойств составляющих ее компонент. С помощью полученных формул можно вычислять оптимальные размеры ячейки, находить экстремумы функций $\nu_{\alpha\beta}(a, b, \Delta_1, \Delta_2)$, при условии, что периметр ячейки остается постоянным.

Анализ формул (1.6), (1.9), (1.10) показывает, что увеличение жесткости сотового заполнителя связано с уменьшением размеров ячейки a и b , увеличением толщины стенок ячеек Δ_1 и толщины клеевой прослойки Δ_2 , а также с увеличением упругих модулей составляющих компонент. Эти факты наблюдались в эксперименте [1—4].

2. Определим эффективные модули упругости сотопласта. Сотопласт — слоистый, анизотропный композиционный материал, обладающий ортотропной симметрией. Материал несущих обшивок (1) (фиг. 1) считается изотропным.

Расчет эффективных модулей упругости сотопласта основан на применении правила смешивания и проводится аналогично тому, как это было сделано выше при расчете модулей сотового заполнителя. В дальнейшем различаются продольные и поперечные слои. Продольный слой один — сотовый заполнитель, поперечные слои — несущие обшивки

и клеевая прослойка. По-прежнему верхний индекс 1 относится к продольному слою, а верхний индекс 2 — к поперечным слоям.

Среднее значение свободной энергии для сотопласта с учетом изотропии и ортотропии компонент равно

$$\begin{aligned} \langle F \rangle = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \left[\frac{\lambda_n}{2} \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n + \mu_n \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n \right] + V^{(1)} \left[\frac{1}{2} (c_{11} \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle^2 + \right. \\ \left. + c_{22} \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle^2 + c_{33} \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle^2) + c_{12} \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle + c_{23} \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle + \right. \\ \left. + c_{13} \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle + 2(c_{14} \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle + c_{15} \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle + \right. \\ \left. + c_{66} \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle) \right] \quad (2.1) \end{aligned}$$

Здесь и далее вследствие того, что произвольный слой один, нижний индекс n у величин, характеризующих продольный слой, для упрощения записи опущен; $c_{11}, \dots$ — эффективные модули упругости сотового наполнителя; $\langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle$ — средние деформации компонент; $n=1$ соответствует несущим обшивкам, $n=2$ — клеевой прослойке.

Рассматривая различные деформации сотопласта (фиг. 1), в соответствии с правилом смешивания получаем

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{11} \rangle = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n + V^{(1)} \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{33} \rangle = \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle = \langle \varepsilon_{33}^{(2)} \rangle_n \\ \langle \varepsilon_{13} \rangle = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{13}^{(2)} \rangle_n + V^{(1)} \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{22} \rangle = \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle = \langle \varepsilon_{22}^{(2)} \rangle_n \\ \langle \varepsilon_{12} \rangle = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{12}^{(2)} \rangle_n + V^{(1)} \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{23} \rangle = \langle \varepsilon_{23}^{(1)} \rangle = \langle \varepsilon_{23}^{(2)} \rangle_n \quad (2.2) \end{aligned}$$

Предполагается, что существует зависимость между средними деформациями компонент, участвующих в последовательном соединении, и средними деформациями композита в виде

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n = x_{11}^{(2)} \langle \varepsilon_{11} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle = x_{11}^{(1)} \langle \varepsilon_{11} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{12}^{(2)} \rangle_n = x_{12}^{(2)} \langle \varepsilon_{12} \rangle \\ \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle = x_{12}^{(1)} \langle \varepsilon_{12} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{13}^{(2)} \rangle_n = x_{13}^{(2)} \langle \varepsilon_{13} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle = x_{13}^{(1)} \langle \varepsilon_{13} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{23}^{(2)} \rangle_n = x_{23}^{(2)} \langle \varepsilon_{23} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{23}^{(1)} \rangle = x_{23}^{(1)} \langle \varepsilon_{23} \rangle \quad (2.3) \end{aligned}$$

Аналогично и в рассматриваемом случае можно написать значения эффективных модулей упругости сотопласта $A_{11}, \dots$, выраженные через упругие характеристики и объемную долю компонент

$$\begin{aligned} A_{11} = 2 \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} (x_{11}^{(2)})^2 \left[\frac{\lambda_n}{2} + \mu_n \right] + V^{(1)} (x_{11}^{(1)})^2 c_{11}; \quad A_{23} = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} x_{23}^{(2)} + V^{(1)} x_{23}^{(1)} c_{23} \\ A_{33} = 2 \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \left[\frac{\lambda_n}{2} + \mu_n \right] + V^{(1)} c_{33}; \quad A_{22} = 2 \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \left[\frac{\lambda_n}{2} + \mu_n \right] + V^{(1)} c_{22} \\ A_{12} = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} x_{12} x_{11}^{(2)} + V^{(1)} c_{12} x_{11}^{(1)}; \quad A_{13} = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} x_{13} x_{11}^{(2)} + V^{(1)} x_{11}^{(1)} c_{13} \end{aligned}$$

$$A_{11} = \sum_{n=1}^2 \gamma_n V_n^{(2)} + c_{11} V^{(1)}; \quad A_{22} = \sum_{n=1}^2 \mu_n V_n^{(2)} (\varepsilon_{12n}^{(2)})^2 + c_{22} (\varepsilon_{12}^{(1)})^2 V^{(1)} \\ A_{33} = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \mu_n (\varepsilon_{12n}^{(2)}) + c_{33} V^{(1)} \mu_n \varepsilon_{12}^{(1)} \quad (2.4)$$

Выражения для напряжений, соответствующие уравнениям (2.2) для деформаций, имеют вид

$$\langle \varepsilon_{23} \rangle = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{23}^{(2)} \rangle + V^{(1)} \langle \varepsilon_{23} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{12} \rangle = \langle \varepsilon_{12}^{(2)} \rangle_n = \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle = \sum_{n=1}^2 \langle \varepsilon_{33}^{(2)} \rangle_n V_n^{(2)} + V^{(1)} \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{11} \rangle = \varepsilon_{11}^{(1)} = \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle \\ \langle \varepsilon_{31} \rangle = \sum_{n=1}^2 \langle \varepsilon_{31}^{(2)} \rangle_n V_n^{(2)} + V^{(1)} \langle \varepsilon_{31} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{13} \rangle = \langle \varepsilon_{13}^{(2)} \rangle_n = \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle \quad (2.5)$$

Используя закон Гука, из соотношений (2.3), (2.2) и (2.5) определим величины $\varepsilon_{ijn}^{(k)}$ для процессов деформирования $\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0$, $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0$, $\langle \varepsilon_{13} \rangle \neq 0$:

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = (V^{(1)} + c_{11} \sum_{i=1}^2 V_i^{(2)} / E_i)^{-1}; \quad \varepsilon_{11n}^{(2)} = \left[E_n \left(\sum_{i=1}^2 V_i^{(2)} / E_i + V^{(1)} / c_{11} \right) \right]^{-1} \\ \varepsilon_{12}^{(1)} = (V^{(1)} + c_{12} \sum_{i=1}^2 V_i^{(2)} / \mu_i)^{-1}; \quad \varepsilon_{12n}^{(2)} = \left[\mu_n \left(\sum_{i=1}^2 V_i^{(2)} / \mu_i + V^{(1)} / c_{12} \right) \right]^{-1} \\ \varepsilon_{13}^{(1)} = (V^{(1)} + c_{13} \sum_{i=1}^2 V_i^{(2)} / \mu_i)^{-1}; \quad \varepsilon_{13n}^{(2)} = \left[\mu_n \left(\sum_{i=1}^2 V_i^{(2)} / \mu_i + V^{(1)} / c_{13} \right) \right]^{-1} \quad (2.6)$$

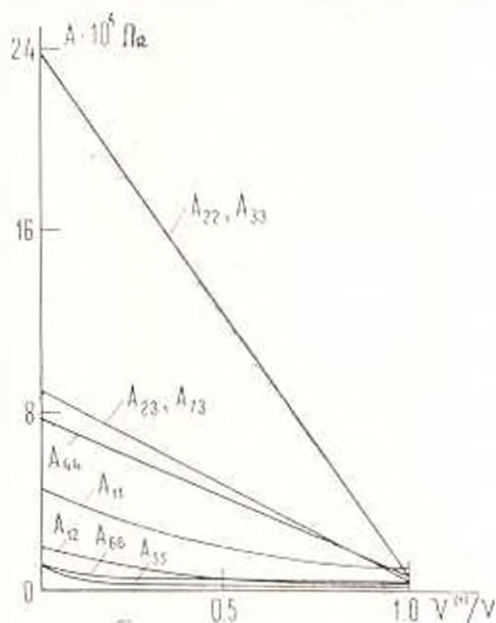
Относительные объемы $V_n^{(k)}$ компонент сотовласта выражаются через размеры сотовой панели следующим образом $V = V^{(1)} + V_1^{(2)} + V_2^{(2)}$:

$$V^{(1)} = \frac{h}{h + 2(\Delta_2 + \Delta_1)}; \quad V_1^{(2)} = \frac{2\Delta_1}{h + 2(\Delta_1 + \Delta_2)}; \quad V_2^{(2)} = \frac{2\Delta_2}{h + 2(\Delta_2 + \Delta_1)} \quad (2.7)$$

Здесь h — высота сотового заполнителя, Δ_2 — толщина несущих панелей, Δ_1 — толщина клеевой прослойки.

Таким образом, соотношения (2.4), (2.6) и (2.7) позволяют вычислять эффективные модули упругости сотовластов в зависимости от геометрических размеров панели и упругих свойств составляющих компонент.

В качестве примера применения формул (2.4), (2.6), (2.7) на фиг. 3 приведены графики изменения эффективных модулей упругости сотопласта в зависимости от относительного объема силового наполнителя $V^{(0)}/V$. При расчетах принималось, что сотовый наполнитель изготовлен из алюминиевой фольги ($E=5,8 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu=2,4 \cdot 10^{10}$ Па) толщиной $\Delta_1=5 \cdot 10^{-4}$ м, размеры ячейки заполнителя $a=5 \cdot 10^{-3}$ м, $b=1,45 \cdot 10^{-2}$ м. Ячейки заполнены пенополиуретаном ($\nu=7 \cdot 10^4$ Па, $\lambda=0,21 \cdot 10^4$ Па), несущие обшивки изготовлены из стали ($E=19,6 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu=7,9 \cdot 10^{10}$ Па), в качестве клея использовалась эпокси-д-ная смола ($E=3,1 \cdot 10^9$ Па, $\mu=1,1 \cdot 10^9$ Па), причем в ячейке заполнителя $\Delta_2=10^{-4}$ м, а при расчетах относительных объемов сотопласта принималось, что $\Delta_4=0,1 \Delta_3$.



Фиг. 3

Механике слоистых композитов посвящены, например, монографии [5, 6]. В работах [7, 8] для слоистых и намотанных композитов использовался подход определения элементов, который в настоящей работе применяется к сотовым конструкциям.

EFFECTIVE CELL LAYER ELASTICITY MODULUSES

A. G. BIKOVZEV, V. V. KOLOKOZCHIKOV

ԲԷՋԱՊԼԱՏՆԵՐԻ ԱՌԱՋԳԱՆԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆԱՆԵՍ ՄՈԴՈՒԼՆԵՐԸ

Ա. Գ. ԲԻԿՈՎԶԵՎ, Վ. Վ. ԿՈԼՈԿՈԶՇՆԻԿՈՎ

Ս. Մ. Ֆ. Ո. Փ. Ո. Մ. Մ.

Ստացված են բջջային լցանյութի և բջջային լցանյութից ու կրող ծածկույթից բջջապլաստի արդյունավետ առաձգական մոդուլները: Ընթացվում է, որ լցանյութի հիմքը, սոսնձի շերտը, բջիջները լցանյութը և կրող ծածկույթների նյութը իզոտրոպ են: Միջին հաշվով կոսպոդիար բնութագրվում է օրթոտրոպ սիմետրիայով: Որպես որինակ ստացված է բջջապլաստի արդյունավետ առաձգական մոդուլների կախվածությունը բջջային լցանյութից հարաբերական ծավալից:

1. Берсудский В. Е., Крысин В. Н., Легких С. Н. Производство сотовых конструкций. М.: 1966. 282 с.
2. Никитин В. А., Родионова Н. Г. Прочность сотовых пласт при плоском напряженном состоянии. Механика полимеров 1972, № 5, с. 936—938.
3. Никитин В. А., Родионова Н. Г. Временная зависимость прочности сотовых пласт. Проблемы прочности, 1973, № 8, с. 91—92.
4. Никитин В. А., Родионова Н. Г. Влияние размеров образцов на прочность и деформативность при сжатии сотовых пласт — заводская лаборатория, 1972, № 5, с. 603—606.
5. Никитин В. А., Родионова Н. Г. Устойчивость сотовых конструкций. М.: 1980. 376 с.
6. Малейстер Л. А., Тамуж В. П., Тетерин Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: 1972. 496 с.
7. Колокольников В. В., Комарова Н. Е., Мачарова И. С. Термоупругость, теплопроводность и прочность слоистых металлокомпозитов. — Механика композитных материалов, 1983, № 2, с. 257—260.
8. Колокольников В. В., Комарова Н. Е., Кисляков А. М. Прочность трехкомпонентного слоистого композита. — Проблемы прочности, 1984, № 4, с. 37—41.

Куйбышевский филиал Института
им. С. П. Королева
Куйбышевский государственный
университет

Поступила в редакцию
7.1.1986