

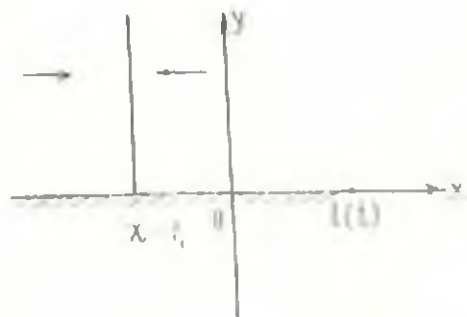
УДК 539.319

ЗАДАЧА СОУДАРЕНИЯ ДВУХ ЧЕТВЕРТЬ-ПЛОСКОСТЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТВЕРДОЙ ОПОРЫ МАРТИРОСЯՆ Ա. Ո.

Задача соударения плоских тел в форме прямых углов при наличии на нижних сторонах углов частично твердой опоры решена в [1]. Задачи о трениях в случае анизотропной среды рассмотрены в [2, 3, 4]. В случае движущейся трещины для изотропной среды с постоянной скоростью задача решена в [5], а для переменной скорости — в [6]. В настоящей статье для общего случая упругой анизотропной среды дается решение нестационарной смешанной задачи для полуплоскости, когда точка раздела граничных условий движется с переменной скоростью.

§ 1. Формулировка задачи соударения

Рассмотрим формулировку смешанной задачи соударения тел, имеющих вид прямых двугранных углов движущихся навстречу друг другу с одинаковой скоростью V_0 . Задача считается плоской. Ось x выбирается по нижним сторонам углов, ось y направлена вертикально вверх (фиг. 1). На границе углов имеется твердая опора $-\infty < x < l(t)$, конец которой движется со скоростью $\dot{l}(t)$, где t — время с начала соударения. Рассмотрены случаи, когда соударение происходит на опоре и вне ее. Если углы были бы полуплоскостями $-\infty < y < \infty$, то решение в отсутствие опоры приняло бы вид



Фиг. 1

$$u_0 = -V_0 t H(x' - l' a t) + V_0 t H(-x' - l' a t) - \frac{x'}{1+a} V_0 H(\sqrt{a} t - |x'|) \quad (1.1)$$

$$v_0 = 0, \quad x' = x + \frac{1}{2}$$

Здесь u_0, v_0 — смещение по осям x, y ; $x' = x - \frac{1}{2}$ — прямое слияние углов, $H(x)$ — единичная функция, a — упругая постоянная, координата x'

отсчитывается от точки соударения тел, координата x отсчитывается от начальной точки O , являющейся точкой перехода твердой опоры в свободу, на границе в момент $t=0$; то есть при $x=0$, $x < l(t)$ имеет место условие $v=0$, а при $x > l(t) - z_{00} = 0$, где z_{00} — есть нормальное напряжение и на всей границе касательное напряжение $\tau_{xy} = 0$. Из (1.1) следует

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -V_0 H(x - \sqrt{a}t) + V_0 H(-x - \sqrt{a}t) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{V_0}{\sqrt{a}} H(\sqrt{a}t - |x'|)$$

Введя двумерные возмущения $U = u - u_0$, $V = v - v_0$, можно записать уравнение движения упругой среды для U , V в виде [4]

$$a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad \left(a = \frac{C_{11}}{\rho}, \quad d = \frac{C_{22}}{\rho} \right) \quad (1.3)$$

$$c \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad \left(d = \frac{C_{22}}{\rho}, \quad c = \frac{C_{12} + C_{13}}{\rho} \right)$$

Здесь C_{ij} — упругие постоянные, ρ — плотность среды. При $t=0$ имеем $U=0$, $V=0$, $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

Вышеуказанные граничные условия ($v=0$), в которые подставлены z_{00} , z_{0y} через U , V и учтено (1.2), можно записать в виде

$$(c-d) \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{c-d}{\sqrt{a}} V H\left(t - \frac{|x'|}{\sqrt{a}}\right), \quad x = l(t) \quad (1.4)$$

$$V = 0, \quad x < l(t); \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad -\infty < x < 0$$

§ 2. Определение решения задачи, для которой точка соударения тел расположена на жесткой опоре

Вначале рассмотрим те значения $t \geq 0$, при которых линия соударения тел находится на жесткой опоре, т.е. из (1.4) $H\left(\frac{x'}{\sqrt{a}} + t\right) = 1$; ($x > l(t)$). Согласно [2] введем преобразования Лапласа по t и Фурье по x от компоненты смещения по осям x и y

$$\bar{U}, \bar{V} = \int_0^\infty U, V \exp(-st) dt \quad (2.1)$$

$$U', V' = \sum_{n=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty U_n, V_n \exp[-iqx - iyp_n(q)] i \omega q$$

Подставляя (2.1) в (1.3), получим

$$\bar{V}_n = - \frac{s^2 + aq^2 + d\beta_n}{c q \beta_n} \bar{U}_n, \quad \beta_n = i \sqrt{\frac{(b+d)s^2 + Lq^2 \pm (-1)^n \sqrt{\Delta(q)}}{2bd}} \quad (2.1)$$

$$\Delta(q) = [(b+d)s^2 + Lq^2]^2 - 4Ld^2 p_1^2 p_2^2$$

$$\gamma_1 = i \sqrt{\frac{s^2}{a} + q^2}, \quad \gamma_2 = i \sqrt{\frac{s^2}{d} + q^2}, \quad L = ab - d^2 - c^2, \quad a > d, \quad b > d > 0$$

$$k_1 = ab - (c-d)^2 > 0, \quad a(a-d) - c^2 > 0$$

Обозначая левую часть первого слагаемого (1.4) через $\alpha(t, x)$, а второе условие через $V(t, x)$, представим эти функции в виде

$$\alpha(t, x) = \alpha_-(t, x)H(l-x) + \alpha_+(t, x)H(x-l)$$

$$V(t, x) = V_-(t, x)H(l-x) + V_+(t, x)H(x-l)$$

Значения функций $\alpha = \alpha_-(t, x)$ при $x < l(t)$ и $V = V_+(t, x)$ при $x > l(t)$ неизвестны и подлежат определению

$$\alpha_+(t, x) = \frac{c-d}{1-a} V_0 H\left(t - \frac{x}{1-a}\right), \quad V_-(t, x) = 0$$

Легко отметить, что изображения функций $\alpha(t, x)$, $V(t, x)$ связаны соотношением

$$\bar{V}(s, q) = \bar{S}(s, q) \bar{\alpha}(s, q) \quad (2.3)$$

где $\bar{S}$ есть изображение решения задачи Лемба [6]. В случае анизотропной среды S имеет вид

$$\bar{S}(s, q) = - \frac{ad}{a_1 C_0} F(s, q), \quad F(s, q) = \frac{C_0 p_1 p_2 (s_1 - s_2)}{R(s, q)}$$

$$C_0 = K_1 \left(2 \sqrt{\frac{b}{a} + \frac{1}{ad}} \right)^{-1/2}, \quad F(s, q) \rightarrow 1, \quad q \rightarrow \infty$$

$$R(s, q) = (bs^2 + K_1 q^2) \sqrt{\frac{a}{b}} p_1 + cs^2 p_1$$

$$+ \frac{adK_1 \sqrt{a}}{4(a-d)s^2 \gamma b} \{ Q_1 s^4 - P_1 s^2 (q^2 + \gamma_1^2) + 4q^2 \gamma_1 p_2$$

$$+ (p_1^2 - q^2)^2 (p_1 + p_2) \}, \quad P_1 = \frac{4(1-ab-b)}{K_1}$$

$$Q_1 = \frac{P_1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{a^2 K_1} |b(b-a) + (c-d-b)(c+b-3d)|$$

где $R(s, q)$ — функция Рэлея. Число и положение точек разветвления функций β_n на комплексных плоскостях в зависимости от соотноше-

ний уругких постоянных изучено в [4]. После выбора ветвей функций γ , β легко получить [2]

$$S(s, q) = S_-(s, q) \bar{S}_-(s, q), \quad P_{\pm}(s, q) = \frac{1}{S_{\pm}(s, q)}$$

$$S_+(s, q) = \frac{1}{C_0} \frac{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{a}} - iq}}{sc^{-1} - iq} D_+, \quad S_-(s, q) = \frac{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{a}} - iq}}{sc^{-1} + iq} D_- \quad (2.4)$$

$$D_{\pm}\left(\frac{iq}{s}\right) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{s}} \ln \left| \frac{R(t)}{R(t)} \frac{\beta_2(t) - i\beta_1(t)}{\beta_2(t) + i\beta_1(t)} \right| \frac{dt}{t - \frac{iq}{s}} \right\}$$

$$\gamma_n(t) = \left| \frac{\sqrt{(b - d - Lt)^2 - 4abd^2 \left(t^2 - \frac{1}{a}\right) \left(\frac{1}{d} - t^2\right)} - (-1)^n (Lt^2 - b - d)}{2bd} \right|^{1/2}$$

$$R(t) = (b - K_1 t^2) \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{1}{d} - t^2 + at} \sqrt{t^2 - \frac{1}{a}}, \quad R\left(\frac{1}{c_R}\right) = 0$$

Так как функции $D_{\pm}(iq/s)$ являются аналитическими на всей комплексной плоскости $z = iq/s$, за исключением точек, принадлежащих разрезам $\left[-\frac{1}{\sqrt{a}}, -\frac{1}{\sqrt{d}} \right]$, можно с помощью формулы Коши для неограниченной области получить значение $D_{\pm}(iq/s)$ в виде [6]

$$D_{\pm}\left(\frac{iq}{s}\right) = 1 + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{s}} \frac{F_1(u) du}{u \mp \frac{iq}{s}}, \quad D_{\pm}^{-1}\left(\frac{iq}{s}\right) = 1 + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{s}} \frac{F_2(u) du}{u \mp \frac{iq}{s}} \quad (2.5)$$

$$F_1(u) = \gamma(u) \exp[\gamma(u)], \quad F_2(u) = -\gamma(u) \exp[-\gamma(u)]$$

$$\gamma(u) = \frac{a \sqrt{u^2 - \frac{1}{a}} \beta_2(u) - (b - K_1 u^2) \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{1}{d} - u^2} \beta_1(u)}{a[R(u)] \left[\beta_2^2(u) - \beta_1^2(u) \right]}$$

$$\gamma(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{s}} \ln \left| \frac{R(t)}{R(t)} \frac{\beta_2(t) - i\beta_1(t)}{\beta_2(t) + i\beta_1(t)} \right| \frac{dt}{t - u}$$

Обозначим через $S_{\pm}(t, x)$ и $P_{\pm}(t, x)$ оригиналы $S_{\pm}(s, q)$ и $P_{\pm}(s, q)$ соответственно, и вычисляя их аналогично [6], получим

$$S_{\pm}(t, x) = \frac{H(1-x)}{\sqrt{1-x}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left| 1 - B \right| \sqrt{\frac{c_0^{-1} - u^{-1,2}}{c_0^{-1} + t^2 x}} - H(c_0^{-1} - t^2 x) - \right.$$

$$-\int_{t/x}^{t/\sqrt{a}} \frac{F_1(u)}{c_R^2 - u} \sqrt{\frac{u - a^{-1/2}}{u + t/x}} du \Big] H\left(-t/x - a^{-1/2}\right) \Big\} \quad (2.6)$$

$$P_-(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{c_R} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ A \delta\left(t + \frac{x}{\sqrt{a}}\right) + \int_{t/\sqrt{a}}^{t/\sqrt{a}} F_2(h) \delta(t + hx) dh \sqrt{\frac{H(-x)}{\sqrt{-x}}} \right\}$$

$$A = 1 + \int_{t/\sqrt{a}}^{t/\sqrt{a}} \frac{F_2(u) du}{u - \frac{1}{\sqrt{a}}}, \quad B = 1 + \int_{t/\sqrt{a}}^{t/\sqrt{a}} \frac{F_2(u) du}{u - \frac{1}{c_R}}, \quad F_2(h) = \left\{ \frac{d}{du} \right\} \sqrt{\frac{F_1(u)}{u - \frac{1}{\sqrt{a}}}} \Big|_{u=h}$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака. Функции $S_+(t, x)$ и $P_+(t, x)$ получаются из (2.6) заменой x на $-x$ и умножением на постоянную a/C_0 и C_0/a , соответственно. Полученные формулы по форме совпадают с [6] или со случаем изотропной среды, где D_+ дается в виде (2.5).

Представим функции $V(s, q)$, $\varepsilon(s, q)$ в виде

$$\varepsilon(s, q) = \varepsilon_+(s, q) + \varepsilon_-(s, q), \quad V = V_+ + V_- \quad (2.7)$$

где V_+ , ε_+ неизвестны, V_- , ε_- есть изображения оригиналов $V_-(t, x)$, $\varepsilon_-(t, x)$. Кроме того, нетрудно заметить, что функция $S(s, q)$ такова, что указанная выше факторизация приводит к функциям $S_{\pm}(s, q)$, $\hat{P}_{\pm}(s, q)$, оригиналы которых удовлетворяют условиям

$$P_-(t, x) = S_-(t, x) = 0 \quad \text{при } x < c_R t \quad (2.8)$$

$$P_+(t, x) = S_+(t, x) = 0 \quad \text{при } x > -c_R t$$

$$-c_R < l(t) = \frac{dl}{dt} < c_R$$

где $l(t)$ — гладкая функция.

Подставляя (2.7) в (2.3) и учитывая (2.8), можно, как и в [6], получить решение поставленной задачи в форме свертки по x, t

$$\varepsilon_+ = P_+ ** [(S_- ** \varepsilon_+ - P_- ** V_-) H(t - x + 0)] \quad (2.9)$$

$$V_+ = S_+ ** [(S_- ** \varepsilon_+ - P_- ** V_-) H(-t + x + 0)]$$

Здесь символ $(**)$ означает свертку по t и x . Подставив в (2.9) выражение (2.6), значение ε_+ и, учитывая, что по условию задачи $V_- = 0$, получаем на оси x

$$\varepsilon_+(t, x) = P \left\{ A N\left(t, x, \xi, \frac{1}{\sqrt{a}}\right) + \int_{t/\sqrt{a}}^{t/\sqrt{a}} F_2(h) \delta(t, x, \xi, h) dh \right\} H\left(t - \frac{x - \xi}{\sqrt{a}}\right) \quad (2.10)$$

$$N(t, x, \xi, h) = \frac{c_R + l}{\sqrt[3]{a} c_R (1 + hl)} \sqrt{\frac{\sqrt{a} t_0 - l - \xi}{l - x}} + \frac{c_R + \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a} \sqrt{h \sqrt{a} + 1} c_R} \times \\ \times \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\left(h + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)(l - x)}}{\sqrt{l + hx + \frac{\xi}{\sqrt{a}} - \left(h + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)l}}, \quad l = l(t_0), \quad t - t_0 = h(l(t_0) - x) \\ P = \frac{4(c-d)c_R V_0}{\pi \sqrt{2}(\sqrt{a} + c_R) \sqrt[3]{a}} \left(1 + \int_{\sqrt[3]{a} u + \sqrt{a}}^{\sqrt[3]{a}} \frac{F_1(u) du}{u}\right)$$

Для поставленной задачи решение получится из (2.10), добавляя одномерное решение.

Учитывая, что при $x \rightarrow l(t)$, $t_0 = t$ и $\frac{l(t) - x}{l(t) - x} \rightarrow 1 - h(l(t) - x)$ можно из (2.10) получить коэффициент интенсивности напряжений

$$\lim_{x \rightarrow l(t)} \sqrt{l - x} \sigma_x(t, x) = PK(l) \sqrt{l - \frac{l + \xi}{\sqrt{a}}} H\left(t - \frac{l + \xi}{\sqrt{a}}\right) \quad (2.11) \\ K(l) = \left(1 + l \int_{\sqrt[3]{a} u + \sqrt{a}}^{\sqrt[3]{a}} \frac{F_1(u) du}{1 + ul}\right) \frac{(c_R - l) \sqrt{a}}{c_R \sqrt[3]{a} + l}, \quad l = l(t)$$

Можно доказать, что для случая постоянной l (2.11) совпадает с решением, полученным применением метода Вивера-Хонфа.

§ 3. Решение задачи в случае $\xi < 0$

Рассмотрим теперь случай, когда $\xi < 0$, то есть сдвигание углов происходит вне жесткой опоры. Тогда $H(x + \sqrt{a}l) = 1$ при $x > l(t)$, и поэтому граничные условия возьмем в виде (1.4), а именно:

$$\sigma_x(t, x) = \frac{(c-d)V_0}{\sqrt{a}} H\left(t - \frac{|x + \xi|}{\sqrt{a}}\right) H(t)$$

Представим $H\left(t - \frac{|x + \xi|}{\sqrt{a}}\right)$ следующим образом:

$$H\left(t - \frac{|x + \xi|}{\sqrt{a}}\right) = H\left(t - \frac{x + \xi}{\sqrt{a}}\right) H(x + \xi) + H\left(t + \frac{x + \xi}{\sqrt{a}}\right) H(-x - \xi) \quad (3.1)$$

Учитывая (3.1), из (2.9) можно получить коэффициенты интенсивности напряжений в виде

$$\lim_{x \rightarrow l(t)} \sqrt{l - x} \sigma_x(t, x) = K(l) \left\{ P \sqrt{l - \frac{l + \xi}{\sqrt{a}}} H\left(t - \frac{l + \xi}{\sqrt{a}}\right) H(l + \xi) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left[1 - 2 \frac{(c-d)V_0}{\pi V a} \sqrt{1 - \frac{1}{V^2}} \right] \left[1 - \frac{BV \sqrt{ac}}{V \sqrt{a-c_R}} \sqrt{\frac{1}{c_R} - T} \right] \\
& - \int_0^{\frac{1}{V \sqrt{a}}} \frac{F_3(u)}{1 - \frac{1}{c_R} - u} \sqrt{\frac{a-T}{a - \frac{1}{V^2}}} du H\left(\frac{1}{V^2} - T\right) \left[H(T-1) H\left(T - \frac{1}{V^2}\right) \right] \\
& T = \frac{1}{1 - \gamma}
\end{aligned}
\quad (32)$$

Отметим, что при $\gamma > -1$ решение (32) удовлетворяет (21), при этом $\alpha = -1$ находится на основе и имеет место равенство (21).

Автор благодарит А. Г. Багдасаря за ценные советы.

COLLISION PROBLEM OF TWO QUARTER PLANES ON MOVING RIGID SUPPORT

A. N. MARTIROSYAN

ՀԱՐՑԱԿԱՆ ԿՈՒՇ ՄԱՍԻ ՄԱՍԻ ԱՆՎԱՐՈՒԹՅԱՆ ԳԵՂՈՐԴԻԻԻ ԽՈՐՈՐ ԲԱՐՈՐԻ
ՀԱՐՈՒԹՅԱՆՈՒՆԵՐԻ ՓԻՆԶԱՐՎԱԾԻ ԽՈՐՈՐԸ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Անվարժություն

Հարվածում որպես է առն տնդդարձող առաձգական ուղիղ անկյունների փոխարկածի խնդրի լուծումը, որոնց մակերևույթի մի մասը առանձնաբաժնված է կոշտ հիմքով: Հիմքի եղբր շարվում է կամայական արագությամբ: Արտրված են լարումների ինտենսիվության ցորմակիցները և լարումը հանաակտի դծի վրա: Ստացվում է հիմքի եղբի հաստատուն արագության համար վիշեր-Հոպֆի մեխոդի վրա հիմնված լարումը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасар А. Г., Мартirosян А. Н. Задача соударения стержней при смешанных граничных условиях. Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 3, с. 537—540.
2. Багдасар А. Г., Мартirosян А. Н. Решение нестационарных задач для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 1.
3. Мартirosян А. Н. Решение некоторых задач для анизотропной среды. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 1, с. 34—48.
4. Norris A. N., Achenbach J. D. Elastic wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversely isotropic material. Q. J. Mech. appl. Math. 1981, vol. 37, Pt. 4, p. 565—580.
5. Freund L. B. Crack-propagation in an elastic solid subjected to general loading. I. — J. Mech. Phys. Solids, 1972, vol. 20, p. 123.
6. Сарайкин В. А., Селезн А. Н., Падаски А. В. о динамике трещины в упругом теле. — Изв. АН СССР МТТ, 1979, № 1, с. 54—73.

Армянский педагогический институт им. X. Абовяна

Поступила в редакцию
6.1.1988