

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ МАГНИТОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

АХИНЯН Ж. О.

Рассматривается линейная плоская задача о движении магнитоупругой среды, занимающей нижнее полупространство и граничащей с верхним полупространством, занятым диэлектриком (воздухом).

Указанная задача по определению напряжений, в линейной и нелинейных постановках, решена в [1].

По границе полупространств распространяется узкая волна. Начальное магнитное поле однородно и перпендикулярно к границе раздела сред. Для простоты считается, что давление за фронтом на границе изменяется по времени периодически с частотой ω , хотя полученные результаты — расчет вида скорости поверхностной волны — остаются без изменения для произвольного распределения $p_1(x, t)$.

Уравнения движения магнитоупругой среды в плоской задаче при начальном магнитном поле B_0 , направленном по оси y , имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (a^2 - a_1^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (a^2 + a_1^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1)$$

где a , b , a_1 — скорости продольных, поперечных и альфвеновских волн, u , v — компоненты вектора перемещения по x , y .

Граничные условия на поверхности $y=0$ имеют вид [1]

$$\begin{aligned} b^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{4\pi\sigma} B_0 b_x &= \frac{1}{4\pi\sigma} B_0 b_y \\ (a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{p_1(x, t)}{\rho} \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть соотношения

$$X_{1,2} = \frac{x}{V} + \beta_{1,2} \left(\frac{1}{V} \right) y - t = 0 \quad (3)$$

определяют уравнения быстрой и медленной магнитоупругих волн, причем $\alpha = \frac{1}{V}$ и $\beta_{1,2}(\alpha)$ — корни дисперсионного уравнения плоских волн для (1).

Как показано в [1]

$$q_{1,2} = \frac{\left| q^2 - 4a^2(b^2 + a_1^2)(1 - b^2 v^{-2}) \left(1 - \frac{a^2 + a_1^2}{V^2} \right) \right|^{1/2}}{2a^2(b^2 + a_1^2)}$$

где

$$q = a^2 + b^2 + a_1^2 - (a_1^2 b^2 + a^2 a_1^2 + 2a^2 b^2) V^{-2}$$

Введем переменные

$$V_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_1 = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_2 = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad V_4 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4)$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_4}{\partial y} - \frac{\partial v_5}{\partial x} + \frac{\partial v_4}{\partial t} - \frac{\partial v_6}{\partial x} \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} - (a^2 + a_1^2) \frac{\partial v_1}{\partial x} + (b^2 + a_1^2) \frac{\partial v_2}{\partial y} + (a^2 - b^2) \frac{\partial v_4}{\partial y} \\ \frac{\partial v_5}{\partial t} - (a^2 - b^2) \frac{\partial v_1}{\partial y} + a^2 \frac{\partial v_6}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v_5}{\partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

Из условия равенства компонент полных напряжений при $t=0$, учитывая, что в магнитоупругой среде

$$b_x = B_0 \frac{\partial u}{\partial y}; \quad b_y = -B_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

и в электрике

$$\begin{aligned} b_x^* = B_x \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{v} - \frac{iy}{v} \right) \right] \\ b_y^* = B_y \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{v} - \frac{iy}{v} \right) \right], \quad B_x + iB_y = 0 \end{aligned}$$

можно получить при $y=0$ следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (b^2 + a_1^2)(U_2 + V_2) + b^2(U_4 + V_4) - \frac{B_0}{4\pi\epsilon} B_x = 0 \\ B_y = -B_0(U_1 + V_1); \quad B_x = iB_0(U_1 + V_1) \\ (b^2 + a_1^2)(U_2 + V_2) + b^2(U_4 + V_4) - ia_1^2(U_1 + V_1) = 0 \\ (a^2 - 2b^2)(U_1 + V_1) + a^2(U_3 + V_3) = -\frac{P}{\gamma} \\ P_1(x, t) = p_1 \exp(i\omega(sV^{-1}t - t)) \end{aligned} \quad (6)$$

Решение уравнений (6) запишется в следующем виде:

$$DU_6 = \frac{P_1}{\rho} \left[V(1 - b^2 V^{-2} - a^2 \frac{a_1^2}{V^2}) (b^2 + a_1^2 - \frac{ia_1^2}{V^2}) + V^{-1} b^2 (a^2 - b^2) \right]$$

где

$$D = \frac{(a^2 - 2b^2)(1 - b^2 V^{-2}) + a^2 b^2 \beta_1^{(0)}}{\beta_1} \left| \frac{V(1 - b^2 V^{-2} - a^2 \beta_1^{(0)})(b^2 - a_1^2)}{a^2 - b^2} + \right. \\ \left. + b^2 V^{-2} \right| - \frac{(a^2 - 2b^2)(1 - b^2 V^{-2}) + a^2 b^2 \beta_2^{(0)}}{\beta_2} \left| \frac{V(1 - b^2 V^{-2} - a^2 \beta_2^{(0)})(b^2 + a_1^2)}{a^2 - b^2} + \right. \\ \left. + b^2 V^{-2} \right| - \frac{a_1^2}{\beta_1 \beta_2} a^2 (1 - b^2 V^{-2})(\beta_1 - \beta_2)$$

Считая a_1^2 a^2 малой величиной и полагая

$$\beta_1 = \beta_{1,0} + a_1^2 \beta_1^{(1)}; \quad \beta_2 = \beta_{2,0} + a_1^2 \beta_2^{(1)}; \quad \beta_{1,0} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{V^2}; \quad \beta_{2,0} = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{V^2}$$

можно получить в главном порядке

$$\beta_1^{(1)} = -\frac{1}{a^2 V^2}; \quad \beta_2^{(1)} = -\frac{1}{b^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{V^2} \right) \\ \beta_1 = \beta_{1,0} + \frac{1}{2} a_1^2 \frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_{1,0}}; \quad \beta_2 = \beta_{2,0} + \frac{1}{2} a_1^2 \frac{\beta_2^{(1)}}{\beta_{2,0}}$$

Тогда получим с той же точностью

$$D = \frac{a^2 - b^2}{\beta_{1,0}} \left| V \left[(1 - 2b^2 V^{-2})^2 - 4\beta_{1,0} \beta_{2,0} b^4 V^{-2} \right] + \beta_{1,0}^2 + \beta_{2,0}^2 \right|$$

где

$$\chi = \left| \frac{(a^2 - 2b^2)(1 - b^2 V^{-2})}{\beta_{1,0}} - a^2 b^2 \beta_{1,0} \left[\left(V \frac{1 - b^2 V^{-2}}{a^2 - b^2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. V \frac{a^2}{a^2 - b^2} \beta_{2,0} - V \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \beta_2^{(1)} \right) - \frac{(a^2 - 2b^2)(1 - b^2 V^{-2}) \beta_2^{(1)}}{2\beta_{2,0}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} a^2 b^2 \frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_{1,0}} \left[\left(V \frac{1 - b^2 V^{-2}}{a^2 - b^2} b^2 - V \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \beta_{2,0} - \frac{1}{V} b^2 \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left| \frac{(a^2 - 2b^2)(1 - b^2 V^{-2})}{\beta_{2,0}} - a^2 b^2 \beta_{2,0} \right| \left(V \frac{1 - b^2 V^{-2}}{a^2 - b^2} - V \frac{a^2 \beta_{1,0}}{a^2 - b^2} - \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - V \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \beta_1^{(1)} \right) \right] + \left| \frac{(a^2 - 2b^2)(1 - b^2 V^{-2}) \beta_1^{(1)}}{2\beta_{1,0}} - \frac{1}{2} a^2 b^2 \frac{\beta_2^{(1)}}{\beta_{2,0}} \right| \right. \\ \left. \left. \left(V \frac{1 - b^2 V^{-2}}{a^2 - b^2} b^2 - V \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \beta_{2,0} + \frac{1}{V} b^2 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1 - b^2 V^{-2}}{\beta_{1,0} \beta_{2,0} b^2} (a^2 - b^2); \quad V = \frac{1}{z} \right|$$

Волны Релея получаются из условия $D=0$, при этом можно считать движение свободным или полагать $P_1=0$.

Знаем, что $z = z_0 + a_1^2 z_1$, где $z_0 = \frac{1}{c_R}$, c_R — есть скорость обычных

воли Релея. Известно, что $\epsilon_D = 0,96 b$,

$$(1 - 2b^2 z_0^2)^2 + 4z_{1,0}(z_0)z_{2,0}(z_0)b^4 z_0^2 = 0$$

$$z_{1,0}^2(z_0) = \frac{1}{a^2} - z_0^2, \quad z_{2,0}^2(z_0) = \frac{1}{b^2} - a_0^2$$

Следует найти x_1 . Из уравнения $D=0$ имеем

$$a_1^2 z_1 \left[\frac{1}{\left(z_0^2 - \frac{1}{a^2} \right)^{1/2}} \left(-\frac{1}{z_0^2} - 4b^2 + 12b^4 z_0^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\left(z_0^2 - \frac{1}{a^2} \right)^{3/2}} \left(-1 + 4b^2 z_0^2 - 4b^4 z_0^4 \right) \right] = \frac{i\chi a_1^2 - i a_0^2}{a^2 - b^2}$$

Пологая $x_1 = z_1 + iz_3$, получим

$$z_1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \frac{i\chi(z_0) - i(z_0)}{A(z_0)}$$

где

$$i\chi(z_0) - i(z_0) = B(z_0)$$

$$B(z_0) = \frac{a(1 - 2b^2 z_0^2)(3a^2 z_0^2 - 2z^2 b^2 a_0^2 - b^2 z_0^2 + 2b^4 z_0^4 - 2)}{2z_0(a_0^2 a^2 - 1)^{3/2}} - \\ - \frac{2z_0 b(1 - b^2 z_0^2)(a^2 - b^2)}{(z_0^2 b^2 - 1)^{1/2}} + \frac{a(1 - b^2 z_0^2)(a^2 - b^2)}{b(z_0^2 a^2 - 1)^{1/2}(z_0^2 b^2 - 1)^{1/2}}$$

$$A(z_0) = \frac{a}{z_0(z_0^2 a^2 - 1)^{3/2}} (8b^4 a^2 z_0^2 - 12b^4 z_0^4 + 4b^2 z_0^6 - 2a^2 z_0^8 - 1)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0} - \frac{a_1^2 x_1}{z_0^2} = \frac{1}{z_0} - \frac{a_1^2}{z_0^2} \frac{1}{a^2 - b^2} \frac{B(z_0)}{A(z_0)}$$

или

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0} \left(1 - \frac{a_1^2}{a^2} K \right)$$

где

$$K = \frac{1}{z_0 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right)} \frac{B(z_0)}{A(z_0)}$$

Таким образом, показано, что с точностью до малых порядка a_1^2 , решение уравнения $D=0$, где есть вещественное число и затухающие поверхностных воли отсутствует.

Для произвольных a_1 требуется более подробное рассмотрение.

Если $V < b$, то $1 - b^2 V^{-2} < 0$ и $1 - (a^2 + a_1^2) V^{-2} < 0$.

Тогда для квадрата подкоренного значения в $\beta_{1,2}$ получается

$$(b^2 a_1^2 - a^2 a_1^2) \frac{1}{V^4} - 2(a^2 + b^2 + a_1^2)(a_1^2 b^2 - a^2 a_1^2) \frac{1}{V^2} + (a^2 - b^2 - a_1^2)^2 =$$

$$= (b^2 a_1^2 - a^2 a_1^2) \frac{1}{V^2} (b^2 a_1^2 V^{-2} - a^2 a_1^2 V^{-2} - 2a^2 - 2b^2 - 2a_1^2) + (a^2 - b^2 - a_1^2)^2 > 0 \quad (7)$$

так как $b^2 a_1^2 - a^2 a_1^2 < 0$ и $b^2 a_1^2 V^{-2} - a^2 a_1^2 V^{-2} - 2a^2 - 2b^2 - 2a_1^2 < 0$.

Так как дискриминант (7)

$$\Delta = (a^2 + b^2 + a_1^2)^2 (b^2 - a^2)^2 a_1^2 - (b^2 - a^2)^2 (a^2 - b^2 - a_1^2)^2 a_1^2 > 0,$$

то существуют действительные корни V_1^2 и V_2^2 (7) такие, что

$$1/V^2 < 1/V_1^2 \text{ и } 1/V^2 > 1/V_2^2$$

С другой стороны, когда $V < b$, то $|q| > \sqrt{5}$ и $q < 0$, и следовательно, $\beta_{1,2}$ — мнимые. Отсюда следует, что уравнение $Di = 0$ для V имеет вещественные коэффициенты.

Обозначая $\gamma = 1/V$, можно записать $iD(\gamma) = 0$.

При $\gamma = 1/b$ получается $\beta_{1,2}^2 = \frac{q - q}{2a^2(b^2 - a_1^2)}$

$$\text{то есть } \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{i}{ab} \sqrt{\frac{a^2 b^2 + a^2 a_1^2 - b^4}{b^2 - a_1^2}}$$

следовательно,

$$Di = ab^2 \sqrt{\frac{a^2 b^2 + a_1^2 a^2 - b^4}{b^2 + a_1^2}} = 0$$

При $\gamma \rightarrow \infty$ получается

$$\beta_1^2 = -\gamma^2 \frac{b^2(a_1^2 + a^2)}{a^2(b^2 - a_1^2)} \text{ и } \beta_2^2 = -\gamma^2$$

Следовательно,

$$Di = 4b^4 \gamma^2 (a^2 - b^2) \left(1 - \sqrt{\frac{a^2 b^2 + a^2 a_1^2}{a^2 b^2 + b^2 a_1^2}} \right) < 0$$

Отсюда следует вывод о том, что существует вещественный корень

$$D\left(\frac{1}{V}\right) = 0 \text{ при } 1/b < \gamma < \infty$$

Таким образом, показано, что при $1/b < \gamma < \infty$ существует вещественный корень $V < b$ уравнения Релея и поверхностные волны не затухают.

SURFACE WAVES ON BOUNDARY OF MAGNETOELASTIC HALF-SPACE AND DIELECTRIC MEDIA

J. H. HACHEMIAN

ՄԱԿԻՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ ԱՐԻՔՆԵՐԸ ՄԱԳՆԵՌՈԱՍՏՈՒԱԳՐԱԿԱՆ
ԿՐՈՍԱՏՐԱՍՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԿԵԼԵՆՏՐՈՒ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ
ՍԱՀՄԱՆԱԿԻՑ ՇԵՐՏԻ ՎՐԱ

Ժ. Հ. ՀԱԿԵՄԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Դիտարկվում է մագնիտաստատիզական միջավայրի շարժման վերաբերյալ գծային հարթ խնդիր: Միջավայրը դրահեցնում է ստորին կիսատարածությունը և սահմանակից է մեկուսիչով (օդով) լցված վերին կիսատարածությանը:

Ցույց է տրվում, որ մագնիտական դաշտի լարվածության տրվելների բառակուսու ճշտության դեպքում Ռեյլի ալիքները բացակայում են:

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахикян Ж. О., Багдасарян А. Г. Исследование движения магнитоупругой среды в линейной и нелинейной задачах—Изв АН СССР. МТТ, 1976, т. 6, с. 91—100

Кироваканский педагогический
институт

Поступила в редакцию
11.11.1985