

УДК 624.012.042

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФУНДАМЕНТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ОСНОВАНИЯ

ПЕТРОСЯН Л. Г.

В [1] рассмотрена линейная модель неоднородного упругого основания, описываемая ядром (функцией влияния)

$$K(r) = \frac{\theta}{(2\sqrt{r^2 + z^2})^{1-\nu}} \quad (1)$$

где θ — некоторая физическая постоянная, в частности, она может быть принята по аналогии с однородным основанием в виде $\theta = 2E_0^{-1}(1 - \nu)$; $r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$; x, y, x_1, y_1 — координаты точки наблюдения и точки приложения единичной сосредоточенной силы; z, ν — параметры модели; E_0, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Отличительной особенностью предлагаемой модели упругого основания, ядро которой объединяет свойства ядра модели неоднородного основания Г. К. Клейна и одного из рассмотренных в [2] ядер $K(r) = (r^2 + z^2)^{-1/2}$, является ограниченность перемещений основания на всей его поверхности, включая точку приложения силы, возможность однозначного вычисления этих перемещений и скачков перемещений на поверхности основания. Это позволяет решать, в частности, задачи о свободно лежащих неизолированных (по терминологии Б. Г. Корнева [2]) конструкциях на упругом основании.

В настоящей статье дается вывод ядра предлагаемой модели для плоского случая и рассматривается задача о расчете двух полубесконечных неизолированных балок на упругом основании.

Как известно [2, 3], ядро произвольной линейной симметричной модели упругого основания может быть представлено в виде интеграла Фурье-Бесселя

$$K(r) = \frac{\theta}{2\pi} \int_0^\infty h(t) J_0(rt) dt \quad (2)$$

где $J_0(rt)$ — цилиндрическая функция первого рода $h(t)$ — плотность ядра. Из обращения (2) следует

$$h(t) = 2\pi t \int_0^\infty r K_0(r) J_0(rt) dr \quad (3)$$

В случае плоской задачи ядро модели представлено через функцию $h(t)$ по формуле [3]

$$K(|x-s|) = b \int_0^\infty \frac{h(t)}{t} \cos t(x-s) dt \quad (4)$$

В [1] для функции $h(t)$ получена следующая формула:

$$h(t) = \frac{t^{\nu-1}}{2^{\nu-1}\pi\Gamma(\nu)} K_\nu(\varepsilon t) \quad (5)$$

где $\nu = \frac{\nu+1}{2}$; $\varepsilon = \frac{1-\nu}{2}$; $K_\nu(\varepsilon t)$ — функции Макдональда.

Для получения ядра $K(x-s) = K(|x-s|) = K(y)$ необходимо вычислить интеграл

$$K(y) = \frac{b\varepsilon t}{2^{\nu-1}\pi\Gamma(\nu)} \int_0^\infty t^{-\nu} K_\nu(\varepsilon t) \cos ty dt \quad (6)$$

Используя формулу 6.699.12 [4], справедливую при $\operatorname{Re} \varepsilon > 0$, $y > 0$, $\operatorname{Re} \nu > -1/2$, находим

$$K(y) = \frac{A_\nu}{(y^2 + \varepsilon^2)^{\nu/2}} \quad (7)$$

Здесь

$$A_\nu = \frac{b\Gamma(\nu/2)}{2^{\nu+1}\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}$$

Γ — гамма-функция. Ядро (7), как видим, имеет достаточно простой вид и при конечных ν, ε не имеет особенностей на всей полуоси $0 \leq y < \infty$. Функция влияния, определяемая формулой (7) с механической точки зрения достаточно обоснована. Она имеет конечное значение

$$K(0) = A_\nu \varepsilon^{-\nu} \quad (8)$$

и в точке приложения силы стремится к нулю на бесконечности, что вполне соответствует инженерным представлениям о работе упругого основания, в отличие, например, от модели упругой однородной полуплоскости, ядро которой имеет вид

$$K(y) = \frac{b}{\pi} \ln \frac{1}{|y|} + C \quad (9)$$

где C — произвольная постоянная.

Полагая $\nu \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 2$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, мы можем прийти к четырем указанным выше ядрам: Г. К. Клейна ($\varepsilon \rightarrow 0$), Б. Г. Коренева ($\nu \rightarrow 0$), упругой изотропной полуплоскости ($\nu \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$), винклеровского основания ($\nu \rightarrow 2$, $\varepsilon \rightarrow 0$). Однако осуществить непосредственный предельный пере-

ход в формуле (9) нельзя, так как при этом нарушаются условия сходимости интеграла (6). Чтобы обойти эту трудность, найдем производную ядра—угол наклона поверхности основания

$$K'(y) = -\frac{\theta a^2}{2^{\nu+1} \pi \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{1-\alpha} K_\alpha(at) \sin ty dt \quad (10)$$

Этот интеграл вычисляется с помощью формулы 6.699.11 [4]

$$\int_0^\infty x^{1-\alpha} K_\alpha(ax) \sin bx dx = \frac{1}{\pi} \Gamma(2\alpha) \Gamma\left(\frac{3}{2} + \alpha\right) b(b^2 + a^2)^{-\frac{3}{2} - \alpha} \quad (11)$$

если учесть, что в силу определения функции Макдональда

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} \exp\left(\frac{\pi i}{2} \nu\right) H^{(1)}_i(\nu z) = \frac{\pi i}{2} \exp\left(-\frac{\pi i}{2} \nu\right) H^{(2)}_i(\nu z)$$

где $H^{(1)}_i(\nu z)$ —функция Ханкеля первого рода, $K_\alpha(z) = K_{-\alpha}(z)$ и положить в (11) $\nu = -3$, $a = \varepsilon$, $b = y$. Получим

$$K'(y) = -\frac{\theta \Gamma\left(\frac{3}{2} - 3\right) y(y^2 + \varepsilon^2)^{-3/2}}{2^{\nu+1} \pi \Gamma(\alpha)} \quad (12)$$

Теперь можно осуществить предельные переходы: при $\nu \rightarrow 0$ имеем

$$K'(y) = -\frac{\theta y(y^2 + \varepsilon^2)^{-1}}{\pi} \quad (13)$$

Интегрируя (13), находим плоское ядро, соответствующее ядру Б. Г. Коренева

$$K(y) = -\frac{\theta}{\pi} \ln\left(\frac{y}{y^2 + \varepsilon^2}\right) + C \quad (14)$$

и при $\varepsilon \rightarrow 0$ приходим к ядру (9) для упругой изотропной полуплоскости. С другой стороны, из (12) при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$K'(y) = -\frac{\theta \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) y^{-1-\nu/2}}{2^{\nu+1/2} \pi \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)} \quad (15)$$

и после интегрирования

$$K(y) = \frac{\theta \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{2^{\nu+1/2} \pi \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) y^{\nu}} + C \quad (16)$$

Из условия на бесконечности при $\nu \neq 0$ получаем $C = 0$. Ядро (16) соответствует упругой полуплоскости с модулем упругости, изменяю-

щимся с глубиной по степенному закону. Предельный переход от (16) к (9) осуществляется с помощью формулы [3]:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{|y|^\nu} - 1 \right) = \ln \frac{1}{|y|}$$

Таким образом, из ядра (7) с помощью указанных предельных операций могут быть получены ядра (14), (16) и (9), соответствующие

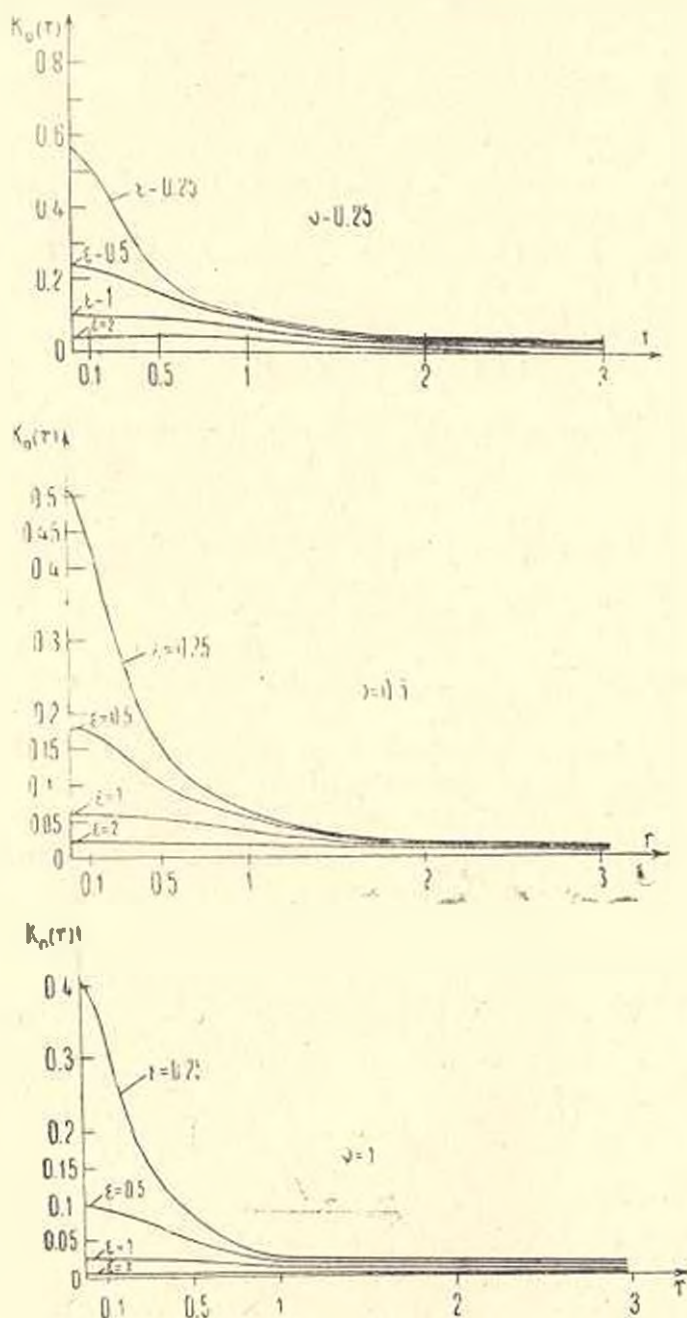
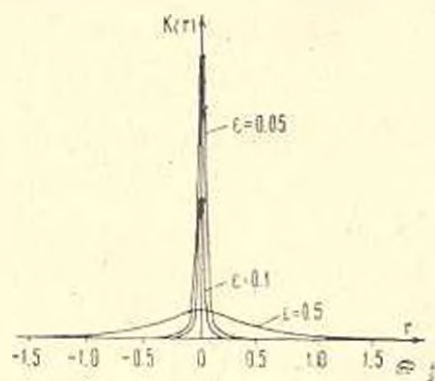


Рис. 1 ($\nu = 0.25$)

известным моделям. Отметим, что ядро (14) ранее в литературе не рассматривалось. На фиг. 1 а, б, в приведены графики функций влияния для предлагаемой модели при различных значениях ν и ϵ . Вопрос о выборе этих параметров должен решаться с учетом реальных свойств грунтового основания. В частности, если могут быть получены экспериментальные данные о функции влияния с помощью штамповых испытаний, то определение параметров ν , ϵ можно осуществить методом наименьших квадратов, используя аппроксимацию экспериментального ядра функцией (1). Важной особенностью рассматриваемой модели является возможность адекватного описания свойств грунтов, как с хорошими распределительными свойствами, так и грунтов с быстро затухающими вне нагруженной площади осадками, обычно описываемыми моделями Винклера-Скогго типа. Так, если положить

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{y^2 + \epsilon^2} = \delta(x)$$

то вместо (7) мы приходим к ядру, содержащему дельта-функцию, что характерно для дискретных моделей. На фиг. 2 приведены графики ядра основания при $A\epsilon^{-1/2} = \text{const}$ для $\nu = 2$ и различных значений параметра ϵ . Объединяя в себе свойства различных моделей (однородных, неоднородных, непрерывных и дискретных), предлагаемое ядро не только позволяет в рамках одного алгоритма охватить решение задач расчета конструкций на различных по своим механическим свойствам основаниях, но и



Фиг. 2

даст возможность избежать трудности математического характера, присущие, например, моделям однородной и неоднородной полуплоскости, возникающие из-за наличия неинтегрируемых особенностей и бесконечных перемещений. В частности, для таких моделей невозможно получить решение задач о неизолированных конструкциях со свободными краями. Покажем на примере плоской задачи, что рассматриваемая модель дает возможность решать такого рода задачи.

Пусть две полубесконечные балки, лежащие на основании с ядром (7), смыкаются своими свободными концами. Уравнения равновесия балок имеют вид

$$EI y^{(4)}(x) = q(x) - p(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1) K(|x - x_1|) dx_1 = y(x) \quad (17)$$

Здесь EI — жесткость балки; q , p — внешняя нагрузка и контактное давление; $y(x)$ — перемещение балки. Граничные условия, соответствующие свободным концам балок, имеют вид:

$$y''(\pm 0) = y'''(\pm 0) = 0 \quad (18)$$

Перейдем в (17) к преобразованиям Фурье по координате x , для чего умножим левую и правую части обоих уравнений на $(2\pi)^{-1/2} \exp(i\xi x)$ и проинтегрируем по всей оси. Интегрирование по частям с учетом (18) дает

$$EJ\xi^4 y_\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\xi^2 A - i\xi^3 B] = q_\xi - p_\xi$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1) K(|x - x_1|) \exp(i\xi x) dx_1 dx = y_\xi \quad (19)$$

Здесь индексом ξ обозначены преобразования Фурье соответствующих функций; $A = \Delta \left[\frac{dy}{dx}(0) \right]$; $B = \Delta[y(0)]$; Δ — скачок функции. Подставляя в интегральном уравнении (19) $x - x_1 = z$, находим

$$\sqrt{2\pi} p_\xi K_\xi = y_\xi \quad (20)$$

Вычисление преобразования Фурье ядра основания может быть выполнено с помощью формулы (4). Так как ядро — четная функция, то

$$K_\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty K(z) \cos \xi z dz$$

и сравнение с (4) дает

$$K_\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\theta h(\xi)}{\xi} \quad (21)$$

Как видим, K_ξ и $\xi^{-1}h(\xi)$ — четные функции аргумента ξ .

Из (19) и (20) получаем

$$y_\xi = \frac{q_\xi - (2\pi)^{-1/2} [\xi^2 A - i\xi^3 B]}{EJ\xi^4 + \xi [\pi \theta h(\xi)]^{-1}} \quad (22)$$

Перемещение балки можем получить по формуле обращения преобразования Фурье, при этом учтем, что знаменатель в (22) — четная функция

$$y(x) = y_0(x) - AF_1(x) + BF_2(x) \quad (23)$$

где

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \cos \xi x d\xi}{EJ\xi^3 + [\pi \theta h(\xi)]^{-1}}; \quad F_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^2 \sin \xi x d\xi}{EJ\xi^3 + [\pi \theta h(\xi)]^{-1}}$$

$$y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_\xi \exp(-i\xi x) d\xi}{EJ\xi^4 + \xi [\pi \theta h(\xi)]^{-1}}$$

Подставляя далее (23) в граничные условия (18), получаем выражение для определения неизвестных скачков A, B

$$A = -\pi E J y_q'(0) F_3^{-1}, \quad B = \pi E J y_q''(0) F^{-1}$$

где

$$F_3 = \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{z^3 + [b_1 h(z)]^{-1}}; \quad F_4 = \int_0^\infty \frac{z dz}{z^3 + [b_1 h(z)]^{-1}}; \quad b_1 = \pi b E J$$

Следует отметить, что при использовании известных моделей, обладающих распределительными свойствами, интегралы в (24) были бы расходящимися, так что дальнейшие вычисления оказались бы невозможными. Благодаря наличию двух регуляризующих параметров эти трудности при использовании рассматриваемой модели легко обходятся.

После определения неизвестных A, B перемещения балки могут быть вычислены по формулам (23), а угол поворота и силовые факторы путем ее соответствующего дифференцирования.



Фиг. 3



Фиг. 4

Рассмотрим в качестве примера решение задачи о действии двух кососимметричных сил (фиг. 3) на неизолированные полубесконечные балки со свободными концами, лежащие на основании, характеризующемся следующими значениями параметров: $b = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$; $b_1 = 50 \text{ м}$; $\varepsilon = 0.01 \text{ м}$; $\gamma = 0$. При этом $h(z) = e^{-z}$. На фиг. 4 приведена элюра безразмерных перемещений рассматриваемой балки; характерен скачок перемещений в начале координат. Вычисления проведены на ЭВМ СМ-4.

CALCULUS OF PLANE FOUNDATION CONSTRUCTIONS BY MEANS OF GENERALISED MODEL OF BASE

L. G. PEIROSIAN

ՀԱՐԹ ՀԻՄՔԱՅԻՆ ԿԱՌՈՅՎԱԾՔՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ ՀԻՄՔԻ
ԸՆԴՀԱՆՐԱՅՎԱԾ ԽՈՒԴԵԼԻ ՕՐԵՆՈՒԹՅԱՄԸ

Լ. Գ. ՊԵՐՈՍԻԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ո. մ.

Ստացված է առաձգական հիմքի բնականացված մոդելի միջուկի դուրս բերումը հարթ դեպքի համար. և որպես օրինակ դիտարկված է առաձգական հիմքի վրա դրված երկու շփեկուսացված կիսաանվերջ հեծանների հաշվարկի խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Цейтлин А. И., Петросян Л. Г. Методы граничных элементов в строительной механике.—Ереван, «Луйс», 1987.
2. Корнев Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании—М.: Госстройиздат, 1954.
3. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно деформируемого основания—Киев-Одесса: Вища школа, 1982.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
30.XI.1987