

УДК 539.3

ОБ УРАВНЕНИИ МАГНИТОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
 ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СЛУЖАЩЕЙ ДЛЯ
 ТРАНСПОРТИРОВКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

КАЗАРЯН К. Б.

В работе [1] выведено уравнение статической устойчивости цилиндрической оболочки, вдоль образующей которой протекает электрический ток. При выводе уравнения устойчивости возмущенные электромагнитные и пондеромоторные силы определялись в осесимметричной постановке. Аналогичным образом в [2] получено уравнение устойчивости для сферической токонесущей оболочки.

В настоящей работе обобщены результаты работ [1, 2] на случай, когда электромагнитные возмущения и пондеромоторные силы, обусловленные изменением формы срединной поверхности оболочки, определяются без ограничения на характер возмущений срединной поверхности оболочки. Аналогичные вопросы магнитоупругой устойчивости токонесущих стержней и прямоугольных пластин обсуждены в работах [3—6].

1. Отнесем цилиндрическую оболочку кругового сечения радиуса R , толщины $2h$ к триортогональной системе координат α, β, γ . Координатные линии α и β совпадают с линиями кривизны срединной поверхности оболочки. Под α и β подразумеваются размерные координаты, откладываемые, соответственно, по прямолинейной образующей и по дуге направляющей окружности срединной поверхности оболочки. Направление координатной линии γ совпадает с направлением нормали к внешней поверхности оболочки.

Рассмотрим два различных случая протекания электрического тока: 1) ток течет в оболочке по направлению образующей; 2) ток течет вдоль дуги направляющей окружности. Считается, что электрический ток равномерно распределен по толщине оболочки; плотность тока J_0 является заданной величиной. Оболочка помещена в диэлектрическую среду, отождествляемую с вакуумом. В дальнейшем индексом $(s)=1$ будем отмечать величины, относящиеся к области $h < \gamma < \infty$; индексом $(s)=2$ — к области $-R < \gamma < -h$.

Формально эти два случая можно объединить с помощью символа Кронекера δ_{im} . Введем вектор плотности электрического тока J_0 следующим образом:

$$j_{0\alpha} = j_0 \delta_{1\alpha}; \quad j_{0\beta} = j_0 \delta_{2\beta}; \quad j_{0\gamma} = 0 \quad (1.1)$$

Индекс $n=1$ относится к первому случаю, индекс $n=2$ —ко второму случаю.

Ток \vec{j}_0 создает магнитное поле H_0 , которое определяется из уравнений магнитостатики и имеет вид

$$H_{0z} = \frac{4\pi j_0(\gamma - h)}{c} \delta_{2n}; \quad H_{0r} = -\frac{4\pi j_0 \delta_{2n}}{c(1+\gamma/R)} \left(\gamma + h - \frac{r^2 - h^2}{2R} \right); \quad |\gamma| \ll h$$

$$H_{0z}^{(1)} = 0; \quad H_{0r}^{(1)} = -\frac{8\pi j_0 h \delta_{2n}}{c(1+\gamma/R)}; \quad h < \gamma < \infty \quad (1.2)$$

$$H_{0z}^{(2)} = -\frac{8\pi j_0 h}{c} \delta_{2n}; \quad H_{0r}^{(2)} = 0; \quad -R < \gamma \ll -h$$

$$H_{0z} = H_{0z}^{(1)} = H_{0z}^{(2)} = 0$$

В (1.2) c есть электродинамическая постоянная.

В результате взаимодействия тока с собственным магнитным полем в оболочке возникает начальное кольцевое усилие T_0 [1, 2]

$$T_0 = \frac{8\pi j_0^2 h^4 R}{c^2} (-1)^n$$

В первом случае начальное кольцевое усилие является сжимающим, для второго случая оно является растягивающим.

В отношении упругой оболочки принимается гипотеза Кирхгофа-Лява. Считается, что материал оболочки является изотропным, проводящим с коэффициентом электропроводности σ , не обладает пьезоэлектрическими и ферромагнитными свойствами. Джоулево тепло и индуцированные электромагнитные поля, обусловленные подвижностью упругого тела [7], не учитываются.

Уравнения статической устойчивости токонесущей цилиндрической оболочки средней длины в перемещениях срединной поверхности имеют вид [7]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \beta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1-\nu^2}{2Eh} \int_{-h}^h F_x d\gamma$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} = -\frac{1-\nu^2}{2Eh} \int_{-h}^h F_\beta d\gamma$$

$$D \Delta_0^2 w + \frac{2Eh}{R(1-\nu^2)} \left(\frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \int_{-h}^h \left[F_z + \gamma \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_\beta}{\partial \beta} \right) \right] d\gamma \quad (1.3)$$

В (1.3) E есть модуль упругости, ν —коэффициент Пуассона материала оболочки; u, v —тангенциальные перемещения, w —нормальное перемещение срединной поверхности оболочки; F_x, F_β, F_z —компоненты вектора возмущенной электромагнитной силы, обусловленного изменением формы срединной поверхности оболочки:

$\Delta_0 = \sigma^2 \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$; $D = 2Lh^2 \gamma (1 - \nu^2)$. Вектор \vec{F} имеет вид

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \left[\vec{j} \times \vec{H} - j_0 \gamma \vec{H}_0 \right] \quad (1.4)$$

где \vec{j} есть вектор плотности электрического тока. \vec{H} — вектор напряженности собственного магнитного поля деформированной оболочки.

Уравнение (1.3) удобно привести к следующему одному разрешающему уравнению относительно нормального прогиба $w(x, z)$

$$D \Delta_0^2 w + \frac{2Fh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (-1)^n \frac{8\pi j_0 R h^2}{c^2} \frac{\sigma^2}{\partial z^2} (\Delta_0^2 w) = Q(x, z) \quad (1.5)$$

где

$$Q(x, z) = \int_{-h}^h \left\{ \Delta_0^2 \left[F_1 + \gamma \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{R} \left[(2 + \nu) \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2 \partial z^2} - \frac{\sigma^2 F_2}{\partial x \partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} \right] \right\} dz$$

Ограничиваясь малыми возмущениями, представим векторы \vec{j} и \vec{H} в виде [1, 2, 7]

$$\vec{j} = \vec{j}_0 + \sigma \vec{e}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h} \quad (1.6)$$

В (1.6) \vec{e} , \vec{h} есть малые возмущения электрического и магнитного полей, обусловленные деформацией оболочки. Они определяются из следующих задач электромагнитостатики [1–3]:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{e} &= 0; \quad \text{div } \vec{e} = 0 \\ \text{rot } \vec{h} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{e}; \quad \text{div } \vec{h} = 0 \quad |\gamma| < h \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{n} = 0; \quad \gamma = \pm h \quad (1.8)$$

В (1.8) \vec{n} есть нормаль к срединной поверхности оболочки, которая для деформированной оболочки имеет вид [7]

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}(w - \gamma)}{|\text{grad}(w - \gamma)|}$$

Линеаризованное граничное условие (1.8) имеет вид

$$\sigma \gamma = \frac{j_0}{c} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \delta_{1n} + \frac{\partial w}{\partial z} \delta_{2n} \right); \quad \gamma = \pm h \quad (1.9)$$

Уравнения (1.7) должны рассматриваться совместно с уравнениями для возмущений магнитного поля во внешних областях оболочки.

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(0)} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{h}^{(1)} = 0 \quad (1.10)$$

На деформируемой границе раздела материала оболочки с вакуумом $\gamma = w \pm h$ выполняется условие непрерывности компонент вектора магнитного поля [3, 6]

$$\vec{H}(w+h) = \vec{H}_{(w+h)}^{(0)}; \quad \vec{H}(w-h) = \vec{H}_{(w-h)}^{(1)}$$

Принимая во внимание, что при малых прогибах $\max_{(x,y)} |w| \ll h$, имеют место соотношения

$$\vec{H}_0(w \pm h) = \vec{H}_0(\pm h) + w \left. \frac{d\vec{H}_0}{d\gamma} \right|_{\gamma = \pm h}; \quad \vec{H}^{(1)}(w \pm h) = \vec{H}^{(1)}(\pm h) + w \left. \frac{d\vec{H}^{(1)}}{d\gamma} \right|_{\gamma = \pm h}$$

для компонент векторов возмущенного магнитного поля \vec{h} , $\vec{h}^{(1)}$ с учетом (1.2) и (1.6) получим следующие линеаризованные граничные условия при $\gamma = \pm h$

$$h_x - h_x^{(1)} = -\frac{4\pi j_0}{c} \delta_{2n} w; \quad h_y - h_y^{(1)} = \frac{4\pi j_0}{c} \delta_{1n} w; \quad h_z - h_z^{(1)} = 0 \quad (1.11)$$

Компоненты векторов $\vec{h}^{(1)}$ и $\vec{h}^{(2)}$ должны удовлетворять также условиям ограниченности при $\gamma \rightarrow \infty$; $\gamma \rightarrow -R$, соответственно.

Компоненты вектора поперечной силы \vec{F} посредством компонент векторов \vec{e} , \vec{h} для тонкой оболочки $h/R \ll 1$ записываются следующим образом:

$$F_x = \frac{j_0}{c} \left[h_1 \delta_{2n} + \frac{4\pi z}{c} e_1 (\gamma + h) \delta_{1n} \right]; \quad F_y = -\frac{j_0}{c} \left[h_2 \delta_{1n} - \frac{4\pi z}{c} e_2 (\gamma - h) \delta_{2n} \right] \quad (1.12)$$

$$F_z = \frac{j_0}{c} \left[h_3 \delta_{1n} - h_3 \delta_{2n} - \frac{4\pi z}{c} [(\gamma + h) e_3 \delta_{1n} - (\gamma - h) e_3 \delta_{2n}] \right]$$

2. Решения уравнений (1.5), (1.7) и (1.10) представим в виде

$$w = w_0 \exp[i(kx + m^2/R)], \quad g = g_0(\gamma) \exp[i(kx + m^2/R)] \quad (2.1)$$

где под функцией g понимается любая компонента возмущенного электромагнитного поля, k — волновое число, m — целое число. При решении задачи (1.7) для возмущенного электрического поля введем скалярный потенциал Φ

$$\vec{e} = \operatorname{grad} \Phi; \quad \Delta \Phi = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{где } \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{(R+\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{R^2}{(R+\gamma)^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Подставляя (2.1) в (2.2), для функции $\Phi_0(\gamma)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2\Phi_0}{d\gamma^2} + \frac{1}{R+\gamma} \frac{d\Phi_0}{d\gamma} - \left[k^2 + \frac{m^2}{(R+\gamma)^2} \right] \Phi_0 = 0 \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.3) имеет вид

$$\Phi_0(\gamma) = \bar{C}_1 I_m(z) + \bar{C}_2 K_m(z) \quad (2.4)$$

где $z = k(R + \gamma)$; $I_m(z)$, $K_m(z)$ есть модифицированные функции Бесселя, \bar{C}_1 , \bar{C}_2 — постоянные интегрирования.

Граничное условие (1.9) запишем в виде

$$\Phi_0' = \frac{J_0 \omega_0}{z} \left(\dot{\gamma}_{10} + \frac{m}{kR} \dot{\gamma}_{20} \right) = A_0; \quad z = z_1 = k(R + h); \quad z = z_2 = k(R - h) \quad (2.5)$$

(штрих означает дифференцирование по z).

Решение (2.4), удовлетворяющее граничному условию (2.5), имеет вид

$$\Phi_0 = A_0 \frac{[K_m'(z_2) - K_m'(z_1)] I_m(z) + [I_m'(z_1) - I_m'(z_2)] K_m(z)}{I_m'(z_1) K_m'(z_2) - I_m'(z_2) K_m'(z_1)} \quad (2.6)$$

Компоненты вектора \vec{e}_0 имеют вид

$$e_{0z} = ik\Phi_0; \quad e_{0r} = imk\Phi_0/z; \quad e_{0\phi} = k\Phi_0' \quad (2.7)$$

Уравнения (1.7) для компонент магнитного поля удобно преобразовать к виду

$$h_{z0}' + \frac{h_{z0}}{z} - \left(1 + \frac{m^2}{z^2} \right) h_{z0} = 0$$

$$h_{\phi 0}' = -\frac{4\pi z}{c} \frac{m\Phi_0}{z} - ih_{z0}; \quad h_{\phi 0} = -\frac{4\pi z}{c} (I\Phi_0' + \frac{m}{z} h_{z0}) \quad (2.8)$$

Решение уравнения относительно h_{z0} имеет вид

$$h_{z0} = C_1 I_m(z) + C_2 K_m(z) \quad (2.9)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 обратимся к решению внешней задачи (1.10).

Выражая $\vec{h}^{(s)}$ через скалярный потенциал $\psi^{(s)}$

$$\vec{h}^{(s)} = \text{grad} \psi^{(s)}; \quad \Delta \psi^{(s)} = 0$$

для функций $\psi_0^{(s)}$ получим следующее решение:

$$\psi_0^{(s)} = d_1^{(s)} K_m(z) + d_2^{(s)} I_m(z)$$

Так как функция $K_m(z)$ имеет особенность в начале координат, а функция $I_m(z)$ неограниченно возрастает на бесконечности, то примем $d_1^{(2)} = d_2^{(2)} = 0$. Следовательно,

$$\varphi_0^{(1)} = d_1^{(1)} K_m(z); \quad \varphi_0^{(2)} = d_2^{(2)} I_m(z) \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что

$$h_{10}^{(1)} = kd_1^{(1)} K_m'(z); \quad h_{10}^{(2)} = ikd_1^{(1)} K_m(z); \quad h_{20}^{(1)} = d_1^{(2)} imk K_m(z) / z$$

$$h_{20}^{(2)} = kd_2^{(2)} I_m'(z); \quad h_{20}^{(3)} = ikd_2^{(2)} I_m(z); \quad h_{20}^{(4)} = d_2^{(2)} imk I_m(z) / z$$

Постоянные интегрирования $C_1, C_2, d_1^{(1)}, d_2^{(2)}$ определим из граничных условий (1.11). Для определения четырех постоянных мы имеем шесть граничных условий. Как показала дальнейший ход решения, для определения этих постоянных достаточно использовать условие непрерывности нормальной составляющей h_γ и одно из условий для тангенциальных составляющих h_z или h_θ . При этом неиспользованное условие относительно другой тангенциальной составляющей будет удовлетворяться тождественно.

После определения постоянных C_1 и C_2 имеем следующее решение для функции:

$$h_{z0} = \frac{4\pi j_0^2 \omega_0}{c} \delta_{2n} [z_1 I_m(z) K_m'(z_1) - z_2 K_m(z) I_m'(z_2)] +$$

$$+ \frac{4\pi zim}{c} [\Phi_0(z_1) K_m(z_1) I_m(z) - \Phi_0(z_2) I_m(z_2) K_m(z)] \quad (2.11)$$

Подставляя (2.7)–(2.9) в (1.12) и производя соответствующие интегрирования с использованием разложений для функций I_m, K_m при $h/R \ll 1$:

$$I_m(z) \approx I_m(kR) + k\gamma I_m'(kR), \quad K_m(z) \approx K_m(kR) + k\gamma K_m'(kR)$$

получим следующее выражение для функции $Q(\alpha, \theta)$ в приближении $kh \ll 1; h/R \ll 1; k^2 hR \ll 1$:

$$Q(\alpha, \theta) \approx \frac{8\pi h j_0}{c^2} \Delta_0^2 \kappa (\delta_{1n} + \delta_{2n})$$

Учитывая, что $\delta_{1n} + \delta_{2n} = 1$, получим следующие интересующие нас уравнения устойчивости токонесущей цилиндрической оболочки:

$$D\Delta_0^4 w + \frac{2Eh\sigma^2 w}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - (-1)^n \frac{8\pi j_0^2 R h^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \Delta_0^2 w = \frac{8\pi j_0^2 h}{c^2} \Delta_0^2 w \quad (2.12)$$

Уравнения (2.12) совпадают с уравнениями, полученными в работах [1, 2] при допущениях осесимметричного (одномерного) характера электромагнитных возмущений и ponderomotorных сил. В [1, 2] приведены также решения уравнения (2.12) для шарнирно опертой

оболочки. Для оболочки, изготовленной из меди при соотношениях $R/L=0.2$; $R/h=200$; $h=10^{-3}$ м, имеем следующие критические значения плотности электрического тока, превышение которых приводит к потере упругой устойчивости:

$$j_{01} = 1.4 \cdot 10^8 \text{ ка/м}^2; \quad j_{02} = 7.9 \cdot 10^8 \text{ ка/м}^2$$

ON EQUATION OF MAGNETOELASTIC STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL CARRYING ELECTRICAL CURRENT

K. B. KAZARIAN

ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՀՈՍԱՆՔԻ ՓՈՆԵԱՐՄԱՆԸ ՈՍՏԱՅՈՂ ԳՂԱՆԱՅԻՆ ԻՎՂԱՆՔԻ ԸՆԳՆԵՍՈՒՄԱՆ ՉԳՅԱՆ ԿԱՅՈՒՈՒԹՅԱՆ ՀՍՂԱՍՏՐՈՒՄԸ ՄԱՍԻՆ

Կ. Բ. ԿԱԶԱՐՅԱՆ

Ս. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Ստացված է հոսանքատար դաշնային թաղանթի կաշտման ճանապարհով հոսանքի անցման երկու տարրեր զեպրերի համար:

ա) հոսանքը թաղանթով անցնում է ձևիչի ուղղությամբ,

բ) հոսանքն անցնում է ձևիչի ուղղորդի ալեղի երկարությամբ:

Թաղանթի միջին մակերևույթի ձևի փոփոխմամբ պայմանավորված էլեկտրամագնիսական զրգուրմաները և պոնդերատոնատրային ուժերը որոշված են սահմանափակումներ չզննելով թաղանթի միջին մակերևույթի զրգուրմաների բնույթի վրա:

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М. В., Казарян К. Б. Выпучивание цилиндрической оболочки, служащей для транспортировки электрического тока. Межвузовский сб.: Механика, № 2, 1982, ЕГУ, Ереван, с. 38—43.
2. Белубекян М. В., Григорян Б. В., Казарян К. Б. Магнитоупругая устойчивость соленоидальной токонесящей оболочки. Сб.: III Всесоюзный симпозиум «Теоретические вопросы магнитоупругости» 1984, ЕГУ, Ереван, с. 36—40.
3. S. Chattopadhyay, F. C. Moon. Magnetoelastic buckling and vibration of a rod carrying electric current—Jour. App. Mechanics, 42, 4, 809—811, 1975.
4. Долбин И. И., Морозов А. И. Упругие изгибные колебания стержня с электрическим током—ПМТФ, 1966, № 3.
5. Белубекян М. В. О статической устойчивости токонесящей пластинки—Дока. АН Арм. ССР, 1982, т. 74, № 5, с. 208—212.
6. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. К задаче устойчивости токонесящей пластинки. Тр. XIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Таллин, 1983, с. 25—28.
7. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.
8. Лурье А. И. «Теория упругости», М.: Наука, 1970. 939 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
2.XI.1987