

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, УСИЛЕННОЙ ПО ДВУМ КРАЯМ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

БЕЛУБЕКЯН Э. В., ПОГОСЯН А. Г.

Рассматривается устойчивость прямоугольной пластинки размерами $a \times b \times h_2$, шарнирно опертой по краям $y=0$ и $y=b$, нагруженной равномерно распределенным давлением q и усиленной ребрами жесткости размерами $z h_2$, h_1 , b по свободным кромкам $x=\pm a/2$. Предполагается, что пластинка составлена из монослоев волокнистого композиционного материала (ВКМ), уложенных поочередно под углами $\pm \varphi$ к оси x , а в ребрах монослои ориентированы вдоль оси y .

Ставится задача определения оптимальных параметров α , h_1 , h_2 , φ конструкции заданного веса, обеспечивающих наибольшее значение критической нагрузки $q_{кр}$.

Аналогичная задача для случая изотропного материала рассмотрена в [1].

Принятая структура пакета пластинки позволяет считать ее ортотропной, для которой уравнение устойчивости записывается в виде

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + z h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

где D_{ik} — жесткости пластинки, определяемые по формуле

$$D_{ik} = \frac{B_{ik} h_2^3}{12}, \quad (i, k=1, 2, 6)$$

B_{ik} — упругие характеристики ВКМ в главных геометрических направлениях пластинки, определяемые через характеристики ВКМ в его главных физических направлениях по известным формулам поворота [2].

Граничные условия запишутся в виде:
 — шарнирного опирания

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad \text{при} \quad y=0, \quad y=b \quad (2)$$

— симметрии (в случае симметричной формы потери устойчивости)

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad (3)$$

—антисимметрии (в случае антисимметричной формы потери устойчивости)

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad (4)$$

—упругого защемления на ребро жесткости [3]

$$E_1 J \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \sigma A \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -Q_x, \quad C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} = -M_x \quad \text{при} \quad x=a/2 \quad (5)$$

где M_x и Q_x , соответственно, изгибающий момент и поперечная сила в пластинке, определяемые по формулам

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad Q_x = -D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

C —жесткость прямоугольного ребра на кручение [3]

$$C = G_{33} 2h_1^3 \beta, \quad \beta = d^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{64}{\pi^5} d \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h^5} \operatorname{th} \frac{n\pi}{2d} \right], \quad d = a \sqrt{G_{22} / G_{12}} \quad (6)$$

$A = 2h_1^2$ —площадь поперечного сечения ребра, G_{11} , G_{22} —модули сдвига материала ребра в плоскостях xoz и yoz .

Решение уравнения (1) в случае симметричной формы потери устойчивости с удовлетворением условий (2) и (3) записывается в виде

$$w = (C_1 \operatorname{ch} \mu_1 \lambda_m x + C_2 \cos \mu_1 \lambda_m x) \sin \lambda_m y \quad (7)$$

а для антисимметричной формы с удовлетворением условий (2) и (4)

$$w = (C_1 \operatorname{sh} \mu_1 \lambda_m x + C_2 \sin \mu_1 \lambda_m x) \sin \lambda_m y \quad (8)$$

где

$$\mu_{1,2} = \sqrt{\frac{\sqrt{D_2^2 + D_{11} D_{22} (k_m^2 - 1)} - D_4}{D_{11}}} \quad (9)$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{b}, \quad D_2 = D_{12} + 2D_{66}, \quad k_m^2 = \frac{G_{22}}{D_{22} \lambda_m^2}$$

Здесь принято $k_m > 1$, так как в случае наличия ребер $\sigma_{кр}$ будет больше соответствующего критического напряжения гладкой пластинки со свободными кромками, где принимается $k_m = 1$.

Удовлетворение граничных условий (5) приводит к однородной системе уравнений относительно коэффициентов C_1 и C_2 . Из условия существования нетривиального решения этой системы получается трансцендентное уравнение относительно коэффициента k_m :

—для симметричной формы потери устойчивости

$$\frac{B_{11}}{B_{12}} (\mu_1^2 + \mu_2^2) f_1 \operatorname{ch} \mu_1 \lambda_m x \cos \mu_2 \lambda_m x + \mu_2 (f_2 f_3 - f_4) \operatorname{ch} \mu_1 \lambda_m x \sin \mu_2 \lambda_m x + \quad (10)$$

$$+ \mu_1 (f_1 f_2 - f_4) \operatorname{sh} \mu_1 \lambda_m x \cos \mu_2 \lambda_m x - \mu_1 \mu_2 (\mu_1^2 + \mu_2^2) f_4 \operatorname{sh} \mu_1 \lambda_m x \sin \mu_2 \lambda_m x = 0$$

где

$$f_1 = \frac{\pi m}{b} \frac{h_1}{h_2} \left(\frac{E_1}{B_{22}} \frac{h_1^2}{h_2^2} - k_m^2 \right), \quad f_2 = 12 \frac{\pi m}{b} \frac{G_1}{B_{22}} \frac{h_1^3}{h_2^3}$$

$$f_3 = \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \mu_1^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} \right)^2, \quad f_4 = \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \mu_2^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}} \right)^2$$

— для антисимметричной формы потери устойчивости уравнение относительно k_m получится из (10) заменой

$$\operatorname{sh} \mu_1 l_m x \text{ на } \operatorname{ch} \mu_1 l_m x; \operatorname{ch} \mu_1 l_m x \text{ на } \operatorname{sh} \mu_1 l_m x; \sin \mu_2 l_m x \text{ на } -\cos \mu_2 l_m x$$

$$\cos \mu_2 l_m x \text{ на } \sin \mu_2 l_m x$$

Определив k_m из (10), значение критического напряжения можно вычислить, согласно (9), по формуле

$$\sigma_{кр} = \min_m k_m^2 \frac{D_{22} l_m^2}{h_2} \quad (11)$$

Определение оптимальных параметров α , h_1 , h_2 , φ конструкции заданного веса, обеспечивающих максимальное значение критического напряжения, сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти:

$$\max_{\bar{x}} \sigma_{кр}, \quad \bar{x} = \{\alpha, h_1, \varphi\} \quad (12)$$

при ограничениях

$$h_0 \leq h_1 \leq 0.2b, \quad \alpha \leq h_2 \leq h_0, \quad 0.2 \leq \alpha \leq 5, \quad 0 \leq \varphi \leq 90^\circ \quad (13)$$

Ограничения (13) обусловлены пределами применимости классической теории балок и пластин. Для ξ принимается

$$\xi = 0.01b \text{ при } a \geq b, \quad \xi = 0.01a \text{ при } a < b$$

Параметр h_2 определяется из условия постоянства веса конструкции

$$h_2 = h_0 - \frac{2\alpha h_1 (h_1 - h_0)}{\xi b - 2\alpha h_1} \quad (14)$$

где h_0 — толщина гладкой пластинки заданного веса, а $\xi = (a + 2\alpha h_1)/b$.

Задача (12), (13) решается методом деформируемого многогранника [4]. Численная реализация проведена при $\xi = 1$ для различных значений $\bar{h}_0 = h_0/b = 0.015; 0.02; 0.03$. В качестве материала принят ВКМ со следующими приведенными характеристиками:

$$\bar{B}_{11}^0 = 1; \quad \bar{B}_{22}^0 = B_{22}^0 / B_{11}^0 = 0.0818; \quad \bar{B}_{12}^0 = B_{12}^0 / B_{11}^0 = 0.0196$$

$$\bar{B}_{66}^0 = B_{66}^0 / B_{11}^0 = 0.04297; \quad G_{21} / G_{11} = 1, \quad \bar{E}_1 / B_{11}^0 = 0.995$$

$$\bar{G}_{22} = G_{22} / B_{11}^0 = 0.0497$$

Полученные значения оптимальных параметров конструкции α , $\bar{h}_1 = h_1/b$, $\bar{h}_2 = h_2/b$, φ и соответствующие значения приведенной критической нагрузки $\bar{\sigma}_{кр} = \sigma_{кр}/B_{11}^0$ даны в табл. 1. Там же приведены наибольшие значения параметра критической нагрузки $\bar{\sigma}_{кр}^0$ для гладкой пластинки заданного веса, которые получаются при $\varphi = 90^\circ$.

Таблица 1

$\bar{h}_0$	α	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	φ	$\bar{\sigma}_{кр} \cdot 10^3$	$\bar{\sigma}_{кр}^0 \cdot 10^3$
0.015	1.994	0.0424	0.00969	45°	0.376	0.185
0.020	3.574	0.0415	0.0110	45°	0.588	0.320
0.030	4.278	0.0516	0.0129	45°	1.420	0.740

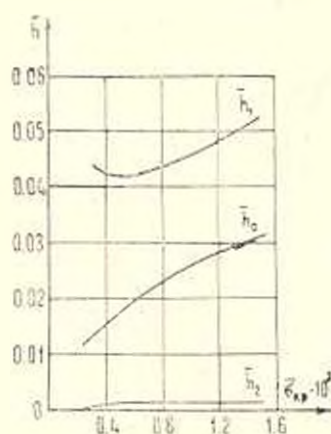
Для всех значений приведенной толщины пластинки $\bar{h}_0$ получается симметричная форма потери устойчивости оптимальной пластинки при $m=1$.

Как видно из табл. 1, изготовление оптимальной ребристой пластинки позволяет увеличивать критическую нагрузку, по сравнению со сплошной пластинкой того же веса, почти в 2 раза.

Для выявления преимущества изготовления ребристой пластинки из ВКМ дается сравнение полученных результатов для пластинки с приведенной толщиной $\bar{h}_0 = 0.02$ со значением критической нагрузки, полученной для оптимальной конструкции того же веса, изготовленной из изотропного материала — дюралюминия. Соответствующий параметр толщины изотропной пластинки при отношении удельных весов дюралюминия и рассматриваемого композита 1,8 будет $\bar{h}_0 = 0.0111$. При этом оптимальные параметры ребристой изотропной пластинки получаются: $\alpha = 0.455$, $\bar{h}_1 = 0.0648$, $\bar{h}_2 = 0.0077$, а $\sigma_{кр}/E = 0.410 \cdot 10^{-3}$. Для конструкции из ВКМ для $\bar{h}_0 = 0.02$, согласно табл. 1, $\sigma_{кр}/B_{11}^0 = 0.588 \cdot 10^{-3}$.

Учитывая, что для дюралюминия $E = 0.7 \cdot 10^5$ МПа, получается $\sigma_{кр} = 28.7$ МПа. Для конструкции из рассматриваемого ВКМ ($B_{11}^0 = 1.3 \cdot 10^5$ МПа) $\sigma_{кр} = 78$ МПа. Таким образом, изготовление ребристой пластинки из ВКМ в 2.7 раза увеличивает критическую нагрузку по сравнению с дюралюминиевой конструкцией.

По полученным результатам можно решить обратную задачу определения конструкции минимального веса по заданному значению параметра критической нагрузки. Для этого на фиг. 1 приведены зависимости па-



Фиг. 1

параметров $\bar{h}_0$, $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$ от параметра $\bar{\tau}_{кр}$. Пользуясь рис. 1, для заданному значению $\bar{\tau}_{кр}$ можно определить соответствующие значения приведенной толщины гладкой пластинки $\bar{h}_0$ и соответствующие оптимальные параметры $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$. Угол укладки монослоев ВКМ, как видно из табл. 1, при $\bar{\tau}_{кр} = 1$ получается равным 45° , а параметр α определяется из условия (14).

THE OPTIMAL DESIGN RESPECT TO STABILITY OF COMPOSITE RECTANGULAR PLATE REINFORCED WITH TWO STIFFNESS EDGE RIBS

E. V. BELUBEKIAN, A. G. POGOSIAN

ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԻՅ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ՌԵԿՏԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱՐԻ ԸՍՏ
ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԿԱԿՈՒԹՅՈՒՆ, ԵՐԷ ՈՍԱՐ ԵՐԿՈՒ ԵԶՐԵՐՈՎ
ՈՒՅԵՂԱՅՎԱԾ Է ԿՈՇՏՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂԵՐՈՎ

Է. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿԻԱՆ, Ա. Գ. ՊՈԳՈՍԻԱՆ

Ա Ն Ք Ր Ա Ն Ք Ր Ո Վ

Աշխատանքում պատրվվում է կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված ուղղանկյուն սարի կայունության խնդիրը, երբ սարը երկու կողմերով ազատ հենված է, իսկ մյուս երկու կողմերով ուժեղացված է կոշտության կողերով: Անիզոտրոպ թուղենքով կոնստրուկցիայի կշիռը, որոշվում էն նրա երկրաչափական և ֆիզիկական օպտիմալ պարամետրերը, որոնք ապահովում են սարի ամենամեծ կրիտիկական բևեռ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Белубекян Э. В., Погосян А. Г. Проектирование прямоугольной пластинки, усиленной по краям ребрами жесткости, при ограничении на устойчивость.—Изв. ВУЗов, Машиностроение, № 10, 1986, с. 18—20.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин М.: Наука, 1967. 534 с.
3. Лехмицкый С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней М.: Наука, 1971, 240 с.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование М.: Мир, 1975. 532 с.

Երևանский политехнический институт
им. К. Маркса.

Поступила в редакцию
24.XII.1987