

УДК 531.8

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
 ДВИЖЕНИЕМ УПРУГОГО ЗВЕНА МАНИПУЛЯТОРА НА
 ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

ГУКАСЯН А. А.

Работа является продолжением [1] и посвящена динамике и оптимизации управляемых плоских движений нагруженного упругого звена манипулятора на подвижном основании. Исследование проводится в рамках линейной теории упругости.

1. *Механическая модель и уравнения движения.* Рассматривается механическая модель упругого манипулятора, кинематическая схема которого приведена на фигуре. Для описания уравнений движения манипулятора введем инерциальную $OXYZ$ и неинерциальную $O'X'Y'Z'$ системы координат. Управление вращательным движением стрелы $O'P$ в подвижной системе координат $O'X'Y'Z'$ осуществляется при помощи сосредоточенного момента сил $M(t)$, приложенного относительно оси $O'Z'$. Для описания упругих смещений стрелы вводится вращающаяся относительно $O'X'Y'Z'$ система координат $O'xuz$. Введем обозначения: L — длина стержня (стрелы); $x(0 \leq x \leq L)$ — координата точки нейтральной линии стрелы; φ — угол поворота стрелы относительно $O'X'$; $R_0(t) = (x_0(t), y_0(t))^T$ — радиус-вектор основания упругого стержня (символ T означает транспонирование); $R(t, x)$ — радиус-вектор точки нейтральной линии стержня с координатой x в момент времени t относительно точки O' ; ω — вектор угловой скорости вращения стержня; $w(t, x)$ — упругие деформации стрелы; $\rho(x)$ — линейная плотность стрелы; $EJ(x)$ — жесткость стрелы на изгиб (E — модуль Юнга материала, $J(x)$ — момент инерции поперечного сечения стержня в точке x); $s(x)$ — площадь поперечного сечения стрелы. Функции $\rho(x)$, $J(x)$, $s(x)$ ($0 \leq x \leq l$) предполагаются достаточно гладкими. Груз в схвате манипулятора считается материальной точкой массой m_1 . Ускорение силы тяжести G считается направленным вдоль оси OY .

В соответствии с линейной теорией упругости считаем, что упругие смещения стрелы малы (большая изгибная жесткость $EJ(x)$) по сравнению с ее длиной $wL = O(\epsilon)$, $\epsilon \ll 1$, а максимальный период собственных упругих колебаний стрелы T_0 мал по сравнению с характерным временем процесса управления T ($T_0/T = O(\epsilon^{1/2})$) [2]. На-

чалные распределения $\omega(t_0, x)$, $\omega_l(t_0, x)$ при этом считаются малыми, в $\varphi \sim 1$, $\ddot{\varphi} \sim \varepsilon^2$, $\ddot{\varphi} \sim \varepsilon$.

Используя принцип Гамильтона—Остроградского [3], получим линейное интегро-дифференциальное уравнение движения стрелы манипулятора, в виде

$$\int_0^L \rho(x)s(x)x|x\ddot{\varphi} + (y_0 + g)\cos\varphi - x_0\sin\varphi + \omega(t, x)|dx + I_1\ddot{\varphi} + I_2|\omega(t, L) + (y_0 + g)\cos\varphi - x_0\sin\varphi| = M; \quad I_1 = L^2m_1, \quad I_2 = lm_1$$

с начальными условиями $\varphi(t_0) = \varphi^0$, $\dot{\varphi}(t_0) = \omega^0$, $\omega(t_0, x) = f_1(x)$, $\omega_l(t_0, x) = f_2(x)$.

Из (1.1) следует, что управляющий момент $M(t)$ имеет порядок ε^2 .

Уравнение колебаний упругой стрелы манипулятора имеет вид:

$$\rho(x)s(x)\ddot{\omega}(t, x) + [EJ(x)\omega'(t, x)]' = -\rho(x)s(x)[x\ddot{\varphi} - x_0\sin\varphi + (y_0 + g)\cos\varphi]$$

с граничными условиями

$$\omega(t, 0) = \omega'(t, 0) = \omega''(t, L) = 0$$

$$[EJ(x)\omega''(t, L)]' = m_1[L\ddot{\varphi} + \omega(t, L) + (y_0 + g)\cos\varphi - x_0\sin\varphi]$$

где штрих означает производную по x .

2. *Задача кинематического управления.* Ниже для определенности исследуется задача поворота однородной ($\rho, J, s = \text{const}$) нагруженной упругой стрелы манипулятора при $g=0$, $x_0, y_0 = \text{const}$.

Задачу оптимального управления сформулируем следующим образом.

Пусть в произвольный начальный момент времени $t=t_0$ состояние системы определяется величинами

$$\varphi(t_0) = \varphi^0, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \omega^0, \quad \omega(t_0, x) = f_1(x), \quad \omega_l(t_0, x) = f_2(x)$$

Требуется за заданное время T привести груз из начального состояния (2.1) в заданное конечное состояние с гашением упругих колебаний и конце процесса управления,

$$\varphi(T) = \varphi^* \quad \dot{\varphi}(T) = \omega^* = 0, \quad \omega(T, x) = \omega_l(T, x) = 0$$

и минимизировать функционал $\Phi[u]$, характеризующий качество управления.

Управление системой (1.1)—(1.3), (2.1), (2.2) осуществляется изменением углового ускорения вращения упругого звена манипулятора. В качестве критерия оптимальности возьмем квадратичный функционал.

$$\Phi[u] = \int_0^l [u(t)]^2 dt \rightarrow \min_u, u \in U, (u(t) = \bar{\varphi}(t)) \quad (2.3)$$

физический смысл которого составляют энергетические затраты привода. В уравнениях (1.1), (1.2) и в условиях (1.3) перейдем к новым безразмерным переменным

$$x_1 = x/L, \quad w_1(t, x) = w(t, x)/L, \quad x_{01} = x_0/L, \quad y_{01} = y_0/L \quad (2.4)$$

$$t_1 = t / (\rho L^3 s / EJ)^{1/2}, \quad M_1 = ML / EJ$$

Уравнения (1.1), (1.2) и условия (1.3) для переменных (2.4) с последующим опусканием индексов «1» принимают вид

$$\int_0^1 x [x \ddot{\varphi} + y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi + \ddot{w}(t, x)] dx + \gamma [\ddot{\varphi} + y_0 \cos \varphi - \ddot{w}(t, 1) + \ddot{w}(t, 0)] = M \quad (2.5)$$

$$w(t, x) + w^{IV}(t, x) = -(x \ddot{\varphi} + y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi) \quad (2.6)$$

$$\alpha(t, 0) = w'(t, 0) = w''(t, 1) = 0$$

$$\alpha'''(t, 1) = \gamma [\ddot{\varphi} + \ddot{w}(t, 1) + y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi], \quad \gamma = m_1 / m \quad (2.7)$$

Собственные функции задачи (2.6), (2.7) с точностью до постоянных c_n определяются следующим образом:

$$X_n(x) = c_n [\operatorname{ch} \lambda_n x - \cos \lambda_n x + \beta_n (\sin \lambda_n x - \operatorname{sh} \lambda_n x)] \quad (2.8)$$

где $\beta_n = (\operatorname{ch} \lambda_n + \cos \lambda_n) / (\operatorname{sh} \lambda_n + \sin \lambda_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

c_n — определяются из условий ортогональности собственных функций. Собственные значения λ_n задачи (2.6), (2.7) определяются из уравнений

$$1 + \operatorname{ch} \lambda_n \cos \lambda_n + \gamma \lambda_n (\operatorname{sh} \lambda_n \cos \lambda_n - \operatorname{ch} \lambda_n \sin \lambda_n) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.6) при (2.7) ищем в виде

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) X_n(x) \quad (2.10)$$

Из (2.6), (2.7), (2.10) следует, что $C_n(t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\ddot{C}_n(t) + \lambda_n^4 C_n(t) = f_n[\varphi(t), \ddot{\varphi}(t), \ddot{R}_0(t)], \quad n \geq 1$$

где

$$f_n[\varphi(t), \ddot{\varphi}(t), \ddot{R}_0(t)] = \left[-\ddot{\varphi} \int_0^1 x X_n(x) dx + \gamma X_n(1) \right] + \left[-x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi \right] \left[\int_0^1 X_n(x) dx + \gamma X_n(1) \right] / \alpha_n^2 \quad (2.11)$$

Так как соотношения (2.1)–(2.3) и уравнения (2.5)–(2.7), (2.11) автономны (стационарны), то в задаче оптимального управления зависимость управления от времени будет входить в виде разностей $t-t_0$, $T-t_0$. Поэтому ее можно рассматривать при $t_0=0$, а затем произвести замену $t \rightarrow t-t_0$, $T \rightarrow T-t_0$ [4].

3. *Приближенное решение задачи оптимального управления.* После решения уравнения (2.6) при (2.7), задачу оптимального управления (2.1)–(2.3) можно записать в виде

$$C_n(t) + \lambda_n^2 C_n(t) = -a_n u(t) + b_n(x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi), \quad n \geq 1 \quad (3.1)$$

$$\varphi(t) = u(t), \quad \omega(t) = \omega^0 + \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad \varphi(t) = \varphi^0 + \omega^0 t + \int_0^t \omega(\tau)(t-\tau) d\tau$$

$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega^0, \quad \varphi(T) = \varphi^*, \quad \dot{\varphi}(T) = 0, \quad C_n(T) = \dot{C}_n(T) = 0$$

$$\Phi[u] = \int_0^T |u(t)|^2 dt \rightarrow \min, \quad n \geq 1$$

где

$$\lambda_n^2 a_n = \int_0^T x X_n(x) dx + \lambda_n^2 \gamma X_n(1), \quad \lambda_n^2 b_n = \int_0^T X_n(x) dx + \lambda_n^2 \gamma X_n(1)$$

Предполагаем, что ускорение основания мало и функции x_n , y_0 можно представить следующим образом:

$$x_0 = \varepsilon^2 b_x, \quad y_0 = \varepsilon^2 b_y, \quad \text{где } b_x, b_y \sim 1, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (3.2)$$

Подставив (3.2) в уравнение (3.1), получим

$$C_n(t) + \lambda_n^2 C_n(t) = -a_n u(t) + \varepsilon^2 b_n (b_x \sin \varphi - b_y \cos \varphi) \quad (3.3)$$

Применением принципа максимума к счетной системе уравнений для $C_n(t)$ при $\varepsilon=0$, задача оптимального управления (2.1)–(2.3) приводится к решению следующей проблемы моментов [5].

$$C_n(t) = A \cos \lambda_n^2 t + B \sin \lambda_n^2 t - \frac{a_n}{\lambda_n^2} \int_0^t \sin \lambda_n^2 (t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

$$\omega(t) = \omega^0 + \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad \varphi(t) = \varphi^0 + \omega^0 t + \int_0^t (t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

$$\varphi(T) = \varphi^*, \quad \dot{\varphi}(T) = \omega^* = 0, \quad C_n(T) = \dot{C}_n(T) = 0 \quad (3.6)$$

$$\Phi[u] = \int_0^T |u(t)|^2 dt \rightarrow \min, \quad n \geq 1 \quad (3.7)$$

Решение задачи (3.4)–(3.7) ищем в виде [1]

$$u_0(t) = A_\varphi t + B_\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \lambda_n^2 t + B_n \cos \lambda_n^2 t) \quad (3.8)$$

В нулевом приближении для оптимального поворота абсолютно жесткой модели звена манипулятора имеем

$$u_0^{(0)}(t) = A_\varphi^{(0)} t + B_\varphi^{(0)}, \quad A_\varphi^{(0)} = B_\varphi^{(0)} = 0 \quad (3.9)$$

Удовлетворяя соотношениям (3.5), (3.6), получим для коэффициентов $A_\varphi^{(0)}$, $B_\varphi^{(0)}$ следующие выражения:

$$A_\varphi^{(0)} = -12(\varphi^* - \varphi^0 - \omega^0 T / 2) / T^3, \quad B_\varphi^{(0)} = 6(\varphi^* - \varphi^0 - 2\omega^0 T / 3) / T^2 \quad (3.10)$$

Следовательно, оптимальное управление $u_0(t)$ при $\varepsilon = 0$, обеспечивающее поворот абсолютно жесткой модели звена манипулятора, определяется в виде

$$u_0^{(0)}(t) = -6(2t/T - 1)(\varphi^* - \varphi^0) / T^2 + 2(3t/T - 2)\omega^0 / T \quad (3.11)$$

Определим первое приближение для A_n и B_n . После подстановки $A_\varphi^{(0)}$, $B_\varphi^{(0)}$ в (3.8), учитывая соотношение $C_n(T) = \dot{C}_n(T) = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{\sin}{\cos} [\lambda_n^2 (T - \tau)] \sum_{m=1}^{\infty} (A_m^{(0)} \sin^2 \lambda_m^2 \tau + B_m^{(0)} \cos^2 \lambda_m^2 \tau) d\tau = \\ & = -\frac{a_n}{\lambda_n^2} \int_0^T u_0^{(0)}(\tau) \frac{\sin}{\cos} [\lambda_n^2 (T - \tau)] d\tau + A_n \frac{\cos}{-\sin} (\lambda_n^2 T) + B_n \frac{\sin}{\cos} (\lambda_n^2 T) \\ & \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решая счетную систему уравнений (3.12) при $n = m$, получим искомые коэффициенты $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$ ($n \geq 1$) в виде

$$A_n^{(1)} = -2\lambda_n^2 A_n / T a_n - D_n^{1,c}, \quad B_n^{(1)} = 2\lambda_n^2 B_n / T a_n - D_n^c \quad (3.13)$$

где $D_n^{1,c} = \frac{2}{T} \int_0^T \left[-\frac{6}{T^2} \left(2\frac{t}{T} - 1 \right) (\varphi^* - \varphi^0) + \frac{2}{T} \left(\frac{3t}{T} - 2 \right) \omega^0 \right] \frac{\sin}{\cos} (\lambda_n^2 \tau) d\tau$

В следующем приближении A_n , B_n определяются согласно (3.5) после подстановки (3.13) в (3.8).

$$\begin{aligned} A_\varphi^{(1)} &= A_\varphi^{(0)} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n^{(1)} \left[C_n^s - \frac{1}{2\lambda_n^2} (1 - \cos \lambda_n^2 T) \right] + B_n^{(1)} \left[C_n^c - \frac{1}{2\lambda_n^2} \sin \lambda_n^2 T \right] \right\} / T^2 \\ B_\varphi^{(1)} &= B_\varphi^{(0)} + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n^{(1)} \left[\frac{1}{2\lambda_n^2} (1 - \cos \lambda_n^2 T) - C_n^s \right] + B_n^{(1)} \left[\frac{1}{2\lambda_n^2} \sin \lambda_n^2 T - C_n^c \right] \right\} / T \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$C_n^{s,c} = \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T} \right) \frac{\sin}{\cos} (\lambda_n^2 \tau) d\tau$$

Аналогично строятся последующие приближения для A_n , B_n и A_n , B_n . Доказательство сходимости рядов (3.8), (3.12), (3.14) можно получить стандартным образом на основе теоремы о неподвижной точке [6].

Итак, оптимальное, в смысле критерия качества $\Phi[u]$ (3.7) управление $u_0(t)$ с абсолютной погрешностью $O(\varepsilon^2)$ обеспечивает приведение упругой стрелы манипулятора в заданное положение с гашением упругих колебаний в конце процесса. Более точные вычисления в рамках поставленной задачи неоправданы, так как уравнения (2.5)–(2.6) являются приближенными: в них отброшены члены $O(\varepsilon^2)$.

$$u_0^{(0)}(t) = A_0^{(0)}t + B_0^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(0)} \sin \lambda_n^2 t + B_n^{(0)} \cos \lambda_n^2 t) \quad (3.15)$$

Оптимальный закон изменения угла поворота $\varphi(t)$ при $\varepsilon=0$ после приближенного определения управляющей функции $u_0(t)$ можно записать следующим образом:

$$\varphi_0(t) = \varphi^0 + \omega^0 t + \int_0^t (t-\tau) u_0^{(0)}(\tau) d\tau \quad (3.16)$$

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления движением упругой стрелы манипулятора с учетом движения основания. После сделанных предположений (3.2) задача приводится к решению следующей проблемы моментов [5]:

$$C_n(t) = A \cos \lambda_n^2 t + B \sin \lambda_n^2 t - \frac{a_n}{\lambda_n^2} \int_0^t u(\tau) \sin \lambda_n^2 (t-\tau) d\tau + \\ + \varepsilon^2 b_n \left| \int_0^t (b_n \sin \varphi_0 - b_n \cos \varphi_0) \sin \lambda_n^2 (t-\tau) d\tau \right| / \lambda_n^2 \quad (3.17)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad \omega(t) = \omega^0 + \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad \varphi(t) = \varphi^0 + \int_0^t (t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.18)$$

$$\varphi(T) = \varphi^*, \quad \omega(T) = \omega^* = 0, \quad C_n(T) = C_n(T) = 0 \quad (3.19)$$

$$\Phi[u] = \int_0^T |u(\tau)|^2 d\tau \rightarrow \min_u, \quad n \geq 1 \quad (3.20)$$

где $\varphi_0(t)$ определяется из (3.16).

Решение задачи оптимального управления (3.17)–(3.20) ищем аналогично (3.8)

$$u_n(t) = A_n t + B_n + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \lambda_n^2 t + B_n \cos \lambda_n^2 t) \quad (3.21)$$

где коэффициенты A_n, B_n, A_{n0}, B_{n0} также можно определить методом последовательного приближения. В нулевом приближении для поворота абсолютно жесткой модели звена манипулятора ($A_{n0}=B_{n0}=0$) коэффициенты $A_n^{(0)}, B_n^{(0)}$ управления $u_n(t)$ совпадают с коэффициентами $A_n^{(0)}, B_n^{(0)}$ (3.10).

Первое приближение для коэффициента A_n, B_n определяется из (3.17), (3.19) после подстановки $A_n^{(0)}, B_n^{(0)}$ в (3.21):

$$A_n^{(1)} = -2 \varepsilon^2 A_n / T a_n - D_n^{(1)}, \quad B_n^{(1)} = 2 \varepsilon^2 B_n T a_n - D_n^{(1)}$$

где

$$D_n^{(1)} = D_n^{(0)} + \varepsilon^2 b_n \int_0^t (b_n \sin \varphi_n - b_n \cos \varphi_n) \frac{\sin(\varepsilon_n^2 t)}{\cos(\varepsilon_n^2 t)} dt \quad (3.22)$$

Следующее приближение для коэффициентов A_n, B_n определяется из (3.18), (3.19) после подстановки $A_n^{(0)}, B_n^{(0)}$ в (3.21)

$$A_n^{(1)} = A_n^{(0)} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n^{(0)} \left[C_n^2 - \frac{1}{2\varepsilon_n^2} (1 - \cos \varepsilon_n^2 T) \right] + B_n^{(0)} \left[C_n^2 - \frac{1}{2\varepsilon_n^2} \sin \varepsilon_n^2 T \right] \right\} / T^2 \quad (3.23)$$

$$B_n^{(1)} = B_n^{(0)} + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n^{(0)} \left[\frac{1}{2\varepsilon_n^2} (1 - \cos \varepsilon_n^2 T) - C_n^2 \right] + B_n^{(0)} \left[\frac{1}{2\varepsilon_n^2} \sin \varepsilon_n^2 T - C_n^2 \right] \right\} / T$$

где C_n^2 — определяются так, как в (3.14).

Следовательно, управление $u(t), t \in [0, T]$, которое обеспечивает оптимальное по критерию качества $\Phi[u]$ приведение упругой стрелы манипулятора на подвижном основании в заданное положение с гашением упругих колебаний в конце процесса, определяется приближенно и имеет вид

$$u_n^{(1)}(t) = A_n^{(1)} t + B_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(0)} \sin \varepsilon_n^2 t + B_n^{(0)} \cos \varepsilon_n^2 t) \quad (3.24)$$

$$t \in [0, T], \quad u_n^{(1)}(t) = 0, \quad t > T$$

Согласно (3.18), (3.24) $\varphi(t)$ определяется интегрированием $u_n^{(1)}(t)$ по t .

$$\varphi_n(t) = \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n^2 t + \int_0^t (t - \tau) u_n^{(1)}(\tau) d\tau \quad (3.25)$$

После того, как приближенное выражение $w(t, x), 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1$ найдено в виде (2.10), требуемое значение управляющего момента сил $M(t)$ вычисляется из (2.5) квадратурой по x .

$$M(t) = - \int_0^1 x w^{(IV)}(t, x) dx + u'''(t, 1) = -w''(t, 0) \quad (3.26)$$

Согласно (3.26) ряд для $w''(t, 0)$ абсолютно и равномерно сходится для всех $t \in [0, T]$ к некоторой абсолютно непрерывной функции $-M$.

4. Исследование задачи динамического управления. Вводя новую переменную $z(t, x)$

$$z(t, x) = w(t, x) + x\varphi + \int_0^t (t-\tau)(y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi) d\tau \quad (4.1)$$

уравнения (2.5), (2.6) и условия (2.7) запишем в виде

$$\begin{aligned} z(t, x) + z^{(IV)}(t, x) &= 0, \quad z(0, 0) = 0, \quad z'(t, 0) = \varphi, \quad z''(t, 1) = 0 \\ z''(t, 0) &= -M(t), \quad z'''(t, 1) = \gamma z(t, 1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$w(t, x) = z(t, x) - xz'(t, 0) - \int_0^t (t-\tau)(y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi) d\tau$$

Из $x(0, x) = f_1(x)$, $w_1(0, x) = f_2(x)$, $\varphi(0) = \varphi^0$, $\varphi'(0) = \varphi^{0'}$ следует, что начальные условия для $z(t, x)$ имеют вид

$$z(0, x) = f_1(x) + x\varphi^0, \quad z'(0, x) = f_2(x) + x\varphi^{0'} \quad (4.3)$$

Конечные условия могут быть выписаны после построения функции $z(t, x)$, как решения краевой задачи (4.2):

$$\begin{aligned} z(T, x) - z'(T, 0)x - \int_0^T (T-\tau)(y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi) d\tau &= 0 \\ z(T, x) - xz'(T, 0) - \int_0^T (y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi) d\tau &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\varphi(T) = z'(T, 0) = \varphi^k, \quad \varphi'(T) = z''(T, 0) = 0$$

Решение краевой задачи (4.2) ищем в виде бесконечной суммы.

$$z(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(t) X_n(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.5)$$

где собственные функции $X_n(x)$ и собственные значения λ_n определяются соотношениями

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \frac{\operatorname{sh} \lambda_n x}{\operatorname{sh} \lambda_n} + \frac{\sin \lambda_n x}{\sin \lambda_n}, \quad \operatorname{tg} \lambda_n - \operatorname{th} \lambda_n = 2\lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n \operatorname{th} \lambda_n \\ &\{\lambda_n\}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

Коэффициенты Фурье $\theta_n(t)$ разложения (4.5) находятся из уравнений

$$\theta_n(t) + \lambda_n^4 \theta_n(t) = X_n'(0) M(t) / \lambda_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

с начальными условиями

$$\theta_n(0) = \frac{1}{x_n^2} \int_0^1 |f_1(x) + xz'(0,0)| [1 + \gamma \delta(x-1)] X_n(x) dx \quad (4.8)$$

$$\theta_n(0) = \frac{1}{x_n^2} \int_0^1 |f_2(x) - xz'(0,0)| [1 + \gamma \delta(x-1)] X_n(x) dx$$

Решение счетной системы (4.7) при (4.8) строится аналогично (2.11).

В случае управляющего момента $M(t)$ задача оптимального управления (2.1), (2.2) с функционалом

$$\Phi[M] = \int_0^T |M(t)|^2 dt \rightarrow \min, \quad M(t) \in \{M\} \quad (4.9)$$

также приводится к решению проблемы моментов. При этом надо иметь в виду, что ряды z , φ , \dot{z} , $\dot{\varphi}$ будут сходиться лишь для достаточно гладкой функции $M(t)$, $0 \leq t \leq T$. После определения конечных условий $\theta_n(T) = \theta_n^*$, $\theta_n(0) = \theta_n^*$, $n=0, 1, 2, \dots$ из (4.4), проблемы моментов приходят к виду [5]

$$\int_0^T (T-t)M(t)dt = c_0^*, \quad \int_0^T M(t)dt = \dot{c}_0^* \quad (4.10)$$

$$\int_0^T \sin^2 \lambda_n^2 (T-t)M(t)dt = c_n^*, \quad \int_0^T \cos^2 \lambda_n^2 (T-t)M(t)dt = \dot{c}_n^*$$

$$n=1, 2, 3, \dots$$

где

$$c_0^* = [\theta_0^* - \theta_0(0) - \dot{\theta}_0(0)T] x_0^2 / X_0(0), \quad \dot{c}_0^* = [\theta_0^* - \theta_0(0)] x_0^2 / X_0(0)$$

$$c_n^* = [\theta_n^* - \theta_n(0) \cos^2 \lambda_n^2 T - \dot{\theta}_n(0) x_n^{-2} \sin^2 \lambda_n^2 T] x_n^2 / X_n(0)$$

$$\dot{c}_n^* = [\theta_n^* + \theta_n(0) x_n^2 \sin^2 \lambda_n^2 T - \dot{\theta}_n(0) \cos^2 \lambda_n^2 T] x_n^2 / X_n(0)$$

$$n=1, 2, 3, \dots$$

Решение задачи оптимального управления (4.9), (4.10) имеет вид [5]

$$M(t) = d_0^1 (T-t) + d_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty} [d_m^1 \sin^2 \lambda_m^2 (T-t) + d_m^2 \cos^2 \lambda_m^2 (T-t)] \quad (4.11)$$

где коэффициенты d_0^1 , d_0^2 , d_m^1 , d_m^2 ($m=1, 2, 3, \dots$) определяются из (4.10)

$$d_0^1 = 6T^{-2}(2c_0^* T^{-1} - \dot{c}_0^*), \quad d_0^2 = -2T^{-1}(3c_0^* T^{-1} - 2\dot{c}_0^*) \quad (4.12)$$

$$d_m^1 = (c_m^* G_m - c_m^* F_m) / (E_m G_m - F_m^2)$$

$$d_m^2 = (c_m^* F_m - c_m^* E_m) / (F_m^2 - G_m E_m), \quad E_m = \int_0^T |\sin i_m^2 (T-t)|^2 dt$$

$$F_m = \frac{1}{2} \int_0^T \sin 2i_m^2 (T-t) dt, \quad G_m = \int_0^T |\cos i_m^2 (T-t)|^2 dt, \quad m=1, 2, 3, \dots$$

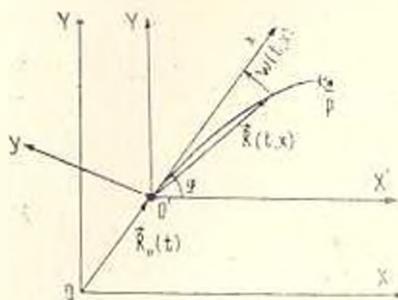
Оптимальное изменение угла поворота $\varphi(t)$ можно определить из $\dot{z}'(t, 0) = \dot{\varphi}(t)$.

Как указывалось в п. 2, оптимально управляющие функции $u(t)$, $M(t)$ из (3.8), (3.21), (4.11) построены для произвольного начального состояния φ^0 , ω^0 , $f_1(x)$, $f_2(x)$ в произвольный начальный момент времени t_0 . В результате замены $t \rightarrow (t-t_0)$, $T \rightarrow (T-t_0)$, управления $u(t)$, $M(t)$ могут быть определены как функции этих аргументов и линейные операторы от φ^0 , ω^0 , $f_1(x)$, $f_2(x)$.

$$u = u(t-t_0, T-t_0, \varphi^0, \omega^0, |f_1(x)|, |f_2(x)|)$$

$$M = M(t-t_0, T-t_0, \varphi^0, \omega^0, |f_1(x)|, |f_2(x)|) \quad (4.13)$$

Заменяя в (4.13) начальные величины текущими $t_0 \rightarrow t$, $\varphi^0 \rightarrow \varphi$, $\omega^0 \rightarrow \omega$, $f_1(x) \rightarrow \omega_1(t, x)$, $f_2(x) \rightarrow \omega_2(t, x)$, получим оптимальное в смысле (2.3), (4.9) управление в форме „синтеза“.



Фиг. 1

Итак, методом последовательного приближения получены оптимальные управляющие функции и оптимальное изменение угла поворота упругой стрелы манипулятора. Решения задач представлены в виде синтеза.

ABOUT A PROBLEM OF OPTIMAL OPERATION MOVEMENT OF THE ELASTIC SECTION OF A MANIPULATOR ON THE MOBILE BASE

A. A. GHUKASYAN

ՇԱՐՔԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ՊՏՆՎԱԾ ՄԱՆԻՊՈՒԼՅԱՏՈՐԻ ԱՌԱՋ ԳՐԱԿԱՆ
ՍՂԱԿԻ ՇԱՐՔԻՄԱՆ ԳԵՆԱՎԱՐՄԱՆ ՄԻ ԽՆԳՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ա. ՂՈՆԿԱՅԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Առաձգականության դժային տեսության սահմաններում, մեխանիկայի վարիացիոն սկզբունքի օգնությամբ, ստացված են շարժական հիմքի վրա դանվազ մանիպուլյատորի առաձգական օղակի շարժման և առաձգական տատանումների հալմասարումները:

Ուսումնասիրված են մանիպուլյատորի, առաձգական օղակի օպտիմալ շարժման և վերջնական պրոցեսում առաձգական տատանումների կատեցման

կինեմատիկական և դինամիկական խնդիրները: Որպես օպտիմալության չափանիշ է վերցված բառակուսային ֆունկցիոնալը: Խնդիրները բերված են մոմենտների պրոբլեմի լուծմանը: Հաջորդական մոտարկումների մեթոդով ստացված են օպտիմալ դեկավարող ֆունկցիաները և մանիպուլյատորի առաձգական օղակի անկյունային շարժման օպտիմալ արևերը: Խնդիրների լուծումները ներկայացված են սինթետիկ տեսքով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Акуленко Л. Д., Гукасян А. А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора.—Изв. АН СССР. МТТ, 1983, №5, с. 38—41.
2. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Я. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями.—Изв. АН СССР. МТТ, 1981, №3, с. 118—124.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. Акуленко Л. Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством импульсного граничного воздействия.—Изв. АН СССР. ПИММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1045—1103.
5. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. И. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

Институт механики АН Арм. ССР

Поступила в редакцию
27.V. 1987