УДК 539.3:534.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ
МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОМ
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКЕ

АВЕТИСЯН А. С.

В связи с широким применением различных конструктивных элементов, изготовленных из композитных материалов, в современной технике, все более актуальной становится изучение вопросов распространения волн в неоднородных средах. Неоднородность среды приводит к тому, что амплитуда и фаза волны становятся функциями координат. Тем самым, усложняется решение задач о распространении волн в неоднородных средах. Особое значение имеют проблемы, касающиеся взаимодействия механической и электромагнитной полей в неоднородных средах. Учет сопряженности механических и электромагнитных полей (пьезоэлектрический эффект, электрострикция и т. д.) еще более усложняют проблему.

Проблеме распространения волн в неоднородных упругих средах посвящены немало работ [3—4] и др. В этих работах исследуется распространение волн при конкретных законах неоднородности среды.

В работе [1] исследовано распространение электроупругих поверхностных волн типа Лява в случае неоднородного тонкого пьезоэлектрического слоя.

В настоящей работе исследуется вопрос распространения электроупругой монохроматической волны в неоднородном пьезоэлектрике. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений относительно амплитудных и фазовых функций электроупругой монохроматической волны. Исследуется распространение сдвиговой электроупругой волны в неоднородном пьезоэлектрическом слое с линейной неоднородностью по толщине.

Рассмотрим распространение монохроматических электроупругих волн в неоднородной пьезоэлектрической среде гексагональной симметрии (класс *6mm*). Пусть координатная ось *oz* параллельна оси симметрии пьезокристалла, а плоскость *doy* есть плоскость изотропии. В этой плоскости плоское деформированное состояние не электроактивное. Исходя из этого, здесь будем исследовать распространение горизонтально поляризованных (*SH*) электроупругих монохроматических волн

$$\{\vec{n}, \Phi\} = \{0; 0; \kappa(x, y, t); \Phi(x, y, t)\}$$

Уравнения антилазкового электроупругого состояния записываются в виде

$$\operatorname{div} \vec{z} = \rho(x, y) \omega; \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi \quad (1.1)$$

Механические напряжения z_{xx} , z_{yy} и компоненты вектора электрической индукции D_x , D_y для неоднородного пьезоэлектрика указанной симметрии будут

$$z_{xx} = G(x, y) \omega_{,x} + e(x, y) \Phi_{,x}, \quad z_{yy} = G(x, y) \omega_{,y} + e(x, y) \Phi_{,y}, \\ D_x = e(x, y) \omega_{,x} - \varepsilon(x, y) \Phi_{,x}, \quad D_y = e(x, y) \omega_{,y} - \varepsilon(x, y) \Phi_{,y} \quad (1.2)$$

с учетом которых уравнения (1.1) можно привести к следующему виду:

$$G(x, y) \nabla^2 \omega(x, y, t) + \operatorname{grad} G(x, y) \operatorname{grad} \omega(x, y, t) + \\ + e(x, y) \nabla^2 \Phi(x, y, t) + \operatorname{grad} e(x, y) \operatorname{grad} \Phi(x, y, t) = \rho(x, y) \omega(x, y, t) \quad (1.3) \\ e(x, y) \nabla^2 \omega(x, y, t) + \operatorname{grad} e(x, y) \operatorname{grad} \omega(x, y, t) - \\ - \varepsilon(x, y) \nabla^2 \Phi(x, y, t) - \operatorname{grad} \varepsilon(x, y) \operatorname{grad} \Phi(x, y, t) = 0$$

Очевидно, что в отличие от случая однородного пьезоэлектрика уравнения деформации и электростатики не разделяются. Но если предполагать, что диэлектрическая проницаемость и пьезоэлектрический модуль в неоднородном пьезокристалле меняются идентичным образом, то есть $e(x, y) = a_0 \varepsilon(x, y)$, то получим

$$\nabla^2 \omega(x, y, t) + \frac{\operatorname{grad} f(x, y)}{f(x, y)} \omega(x, y, t) - \frac{1}{C^2(x, y)} \omega(x, y, t) \\ \nabla^2 \psi(x, y, t) + \frac{\operatorname{grad} e(x, y)}{\varepsilon(x, y)} \psi(x, y, t) = 0 \quad (1.4)$$

где

$$f(x, y) = G(x, y) + a_0 e(x, y); \quad C^2(x, y) = f(x, y) / \rho(x, y) \\ \psi(x, y, t) = \Phi(x, y, t) - a_0 \omega(x, y, t); \quad a_0 - \text{постоянная.}$$

Возьмем решение уравнений (1.4) в виде монохроматической волны

$$\begin{Bmatrix} \omega(x, y, t) \\ \psi(x, y, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{\omega}(x, y) \\ A_{\psi}(x, y) \end{Bmatrix} \exp i \left[\begin{Bmatrix} \varphi_{\omega}(x, y) \\ \varphi_{\psi}(x, y) \end{Bmatrix} - \omega t \right] \quad (1.5)$$

Здесь $A_{\omega}(x, y)$ и $A_{\psi}(x, y)$ — амплитуды, а $\varphi_{\omega}(x, y)$ и $\varphi_{\psi}(x, y)$ — укороченные фазы монохроматических волн.

Найдем условия существования монохроматических волн (1.5) для уравнений электроупругости (1.4). С учетом (1.5) из (1.4) после несложных преобразований находим системы уравнений, которым должны удовлетворять амплитуды $A_{\omega}(x, y)$; $A_{\psi}(x, y)$ и фазы $\varphi_{\omega}(x, y)$; $\varphi_{\psi}(x, y)$:

$$(\operatorname{grad} U_{\omega})^2 - (\operatorname{grad} \varphi_{\omega})^2 + \nabla^2 U_{\omega} + \frac{\operatorname{grad} f(x, y)}{f(x, y)} \operatorname{grad} U_{\omega} + \frac{\omega^2}{C^2(x, y)} = 0 \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
 2\text{grad}U_w \cdot \text{grad}\varphi_w + \nabla^2\varphi_w + \frac{\text{grad}f(x, y)}{f(x, y)} \text{grad}\varphi_w &= 0 \\
 (\text{grad}U_w)^2 - (\text{grad}\varphi_w)^2 + \nabla^2 U_w + \frac{\text{grad}\epsilon(x, y)}{\epsilon(x, y)} \text{grad}U_w &= 0 \\
 2\text{grad}U_w \cdot \text{grad}\varphi_w + \nabla^2\varphi_w + \frac{\text{grad}\epsilon(x, y)}{\epsilon(x, y)} \text{grad}\varphi_w &= 0
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$U(x, y) = \ln A(x, y)$$

Точные решения полученных систем нелинейных уравнений даются решениями

$$\varphi(x, y, t) = \exp[U_w(x, y) - i\varphi_w(x, y) - i\omega t] \tag{1.12}$$

$$\Phi(x, y, t) = \exp[U_w(x, y) - i\varphi_w(x, y) - i\omega t] - a_0 w(x, y, t)$$

Если аналогично гармонической волне задать вектор $\vec{k} = \text{grad}U$, то этот вектор будет функцией координат x и y как по величине, так и по направлению.

Таким образом, задача о распространении монохроматической волны в неоднородной пьезоэлектрической среде приводится к решению систем нелинейных дифференциальных уравнений типа (1.6) относительно амплитуд и фаз волны.

2. Пусть неоднородный по толщине пьезоэлектрический слой ориентирован к системе декартовых координат таким образом, что занимает область $\{|x| < \infty, |y| \leq h, |z| < \infty\}$. Тогда все физические характеристики материала будут функциями координаты y . Рассмотрим распространение монохроматической электроупругой SrI волны в направлении оси ox , когда поверхности $y = \pm h$ металлизированы и свободны от механических нагрузок

$$\varphi_w(x, \pm h, t) = 0, \quad \Phi(x, \pm h, t) = 0 \tag{2.1}$$

Требую, чтобы волна распространялась по оси ox , мы предопределяем функции $\varphi_w(x, y)$ и $\varphi_w(x, y)$:

$$\text{grad}\{\varphi_w(x, y), \varphi_w(x, y)\} = k \cdot i_x \tag{2.2}$$

Допущения, сделанные по отношению неоднородности пьезоэлектрика и о направлении распространения волны, дают возможность утверждать, что амплитуды волны будут изменяться только по толщине слоя. Следовательно, уравнения (1.6) и (1.7) упрощаются и принимают вид

$$\frac{d^2 U_w}{dy^2} + \frac{f(y)}{f(y)} \frac{dU_w}{dy} + \left(\frac{dU_w}{dy}\right)^2 - k^2(1 - v^2(y)) = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{d^2 U_w}{dy^2} + \frac{\epsilon'(y)}{\epsilon(y)} \frac{dU_w}{dy} + \left(\frac{dU_w}{dy}\right)^2 - k^2 = 0 \tag{2.4}$$

где

$$V^2(y) = \omega^2 / |k^2 C^2(y)|$$

Введя обозначение $dU_x/dy = U_x'(y)$, уравнение типа (2.3) приводится к уравнению Риккати

$$U_x'(y) = U_x(y) - |f'(y)/f(y)| U_x(y) + k^2 [1 - V^2(y)]$$

которое при произвольной неоднородности среды не имеет аналитического решения. Но если функция $f'(y)/f(y)$ непрерывна в интервале $-h < y < h$, то решение уравнения Риккати приводится в отличие от нуля к решению линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами относительно амплитуды $A_x(y)$

$$\frac{d^2 A_x(y)}{dy^2} + \frac{f'(y)}{f(y)} \frac{dA_x(y)}{dy} - k^2 [1 - V^2(y)] A_x(y) = 0 \quad (2.5)$$

Аналогичным образом, решение уравнения (2.4) приводится к решению линейного уравнения относительно амплитуды электрического потенциала $A_z(y)$

$$\frac{d^2 A_z(y)}{dy^2} + \frac{\varepsilon'(y)}{\varepsilon(y)} \frac{dA_z(y)}{dy} - k^2 A_z(y) = 0 \quad (2.6)$$

Очевидно, что полученные уравнения (2.5), (2.6) соответствующие рассматриваемому частному случаю, можно сразу получить из (1.4), представляя искомые функции $\omega(x, y, t)$ и $\phi(x, y, t)$ в виде

$$\bar{F}(x, y, t) = A(y) \cdot \exp\{i(kx - \omega t)\}$$

Пусть неоднородность по толщине неэлектрического слоя является линейной

$$\gamma(y) = \frac{\gamma^+ + \gamma^-}{2} + \frac{\gamma^+ - \gamma^-}{2h} y \quad (2.7)$$

где γ^+ и γ^- соответствуют значениям физических характеристик $G(y)$, $\rho(y)$, $\varepsilon(y)$ на границах слоя $y = \pm h$, соответственно.

С учетом закона неоднородности слоя (2.7) уравнения (2.5) и (2.6) преобразуются к виду

$$(1 + \varepsilon_0 y) \frac{d^2 A_x}{dy^2} + \varepsilon_0 \frac{dA_x}{dy} + k^2 \left[\left(\frac{\rho_0^2}{\varepsilon_0^2} - 1 \right) + \left(\rho_0 \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2} - \varepsilon_0 \right) y \right] A_x = 0 \quad (2.8)$$

$$(1 + \varepsilon_0 y) \frac{d^2 A_z}{dy^2} + \varepsilon_0 \frac{dA_z}{dy} - k^2 (1 + \varepsilon_0 y) A_z = 0 \quad (2.9)$$

здесь $\varepsilon_0 = \frac{1}{h} \frac{\bar{G}^+ - \bar{G}^-}{\bar{G}^+ + \bar{G}^-}$, $\rho_0 = \frac{1}{h} \frac{\rho^+ - \rho^-}{\rho^+ + \rho^-}$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{h} \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}$, $\varepsilon_0^2 = G_0^2 \rho_0^2$

$\bar{G}_0 = (\bar{G}^+ + \bar{G}^-)/2$, $\rho_0 = (\rho^+ + \rho^-)/2$, $\bar{G}^\pm = G^\pm + a_0 e^{\pm}$, $v_0 = \omega/k$.

Решения уравнения (2.8) и (2.9) с помощью представления искомых функций $A_x(y)$ и $A_z(y)$ в виде

$$F(y) = \exp(-k\gamma y) \cdot Z(\xi), \quad y = k\xi + a$$

приводятся к решению вырожденных гипергеометрических уравнений относительно функции $Z(\xi)$. Решения $A_\alpha(y)$ и $A_\beta(y)$ представляются вырожденными гипергеометрическими функциями $F(a; 1; \xi)$ и $M(a; 1; \xi)$:

$$A_\alpha(y) = \exp(-k\gamma y) [C_1 F(a; 1; \xi) + C_2 M(a; 1; \xi)] \quad (2.10)$$

$$A_\beta(y) = \exp(-k\gamma y) \left[C_3 F\left(\frac{1}{2}; 1; \gamma\right) + C_4 M\left(\frac{1}{2}; 1; \gamma\right) \right]$$

где $F(a, b, x)$ и $M(a, b, x)$ — гипергеометрические ряды

$$F(a; b; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

$$M(a; b; x) = F(a; b; x) \cdot \ln|x| + \sum_{m=1}^{\infty} C_{a, m-1}^m \cdot \frac{x^m}{m!} \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{1}{n+a} - \frac{2}{1+n} \right) \quad (2.11)$$

$$\xi = (1 - \nu_1)(y - \mu_1), \quad \gamma = (1 - \nu_2)(y - \mu_2), \quad \mu_1 = -(1 - g_0)$$

$$\nu_1 = \{2k|1 - (g_0 g_0)(v_\phi/c_0)^2|^{-1/2}\}^{-1}$$

$$\mu_2 = -(1 - \varepsilon_0), \quad \nu_2 = (2k)^{-1}, \quad \gamma = |1 - (g_0 g_0)(v_\phi/c_0)^2|^{-1/2}$$

$$a = \frac{1}{2} \{1 - (1 - g_0 g_0)(v_\phi/c_0)^2|^{-1/2} - (g_0 g_0)(v_\phi/c_0)^2|^{-1/2}\}$$

Для определения фазовой скорости v_ϕ получим дисперсионное уравнение в виде

$$\det|C_{ij}(v_\phi)| = 0 \quad (2.12)$$

где

$$C_{j1} = (e^{\pm i\tilde{a}})^{\pm b} \exp(\pm k\gamma h) \cdot F(a; 1; \xi(\pm h)), \quad C_{j2} = (e^{\pm i\tilde{a}})^{\pm b} \exp(\pm k\gamma h) \times \\ \times M(a; 1; \xi(\pm h)), \quad C_{j3} = \exp(\pm kh) \cdot F\left(\frac{1}{2}; 1; \gamma(\pm h)\right)$$

$$C_{j4} = \exp(\pm kh) \cdot M\left(\frac{1}{2}; 1; \gamma(\pm h)\right)$$

$$C_{11} = \left[\frac{a}{\lambda_1} F(a+1; 2; \xi(\pm h)) - k\gamma F(a; 1; \xi(\pm h)) \right] \exp(\pm k\gamma h) \quad (2.13)$$

$$C_{12} = - \left[\frac{a}{\lambda_1} M(a+1; 2; \xi(\pm h)) + k\gamma M(a; 1; \xi(\pm h)) \right] \exp(\mp k\gamma h)$$

$$C_{13} = (e^{\pm i\tilde{a}})^{\pm b} \left[\frac{1}{2\lambda_2} F\left(\frac{3}{2}; 2; \gamma(\pm h)\right) - kF\left(\frac{1}{2}; 1; \gamma(\pm h)\right) \right] \exp(\pm kh)$$

$$C_{14} = - (e^{\pm i\tilde{a}})^{\pm b} \left[\frac{1}{2\lambda_2} M\left(\frac{3}{2}; 2; \gamma(\pm h)\right) + kM\left(\frac{1}{2}; 1; \gamma(\pm h)\right) \right] \exp(\mp kh)$$

$$j = 1; 2; \quad n = 3; 4$$

При отсутствии пьезоэлектрического эффекта элементы матрицы $C_{11}=C_{12}=C_{13}=C_{14}=0$, и дисперсионное уравнение в этом случае намного упрощается.

Дисперсионное уравнение (2.12) имеет сложный трансцендентный вид. Существование его решения означает, что в неоднородном пьезоэлектрическом слое, с линейной неоднородностью физических характеристик, возможно распространение сдвиговой электроупругой волны по направлению ox .

Рассмотрим предельные случаи. Предположим, что длина волны $l=2\pi/k$ очень мала по сравнению с толщиной неоднородного слоя $2h$. Используя асимптотики гипергеометрических функций $F(a, b, x)$ и $M(a, b, x)$ при $|x| \rightarrow \infty$

$$F(a, b, x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(b)\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)} x^{-a} \cdot \exp x \cdot [1 + O(x^{-1})] & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \frac{\Gamma(b)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)} (-1)^a x^a \cdot [1 + O(|x|^{-1})] & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$M(a, b, x) = (1/x)^a [1 + O(|x|^{-1})] \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty$$

получим

$$V^2 = C_{44}^0(1 - \epsilon_{\pm}^2) = (\bar{G}^+ - \bar{G}^-)(1 - \nu_{\pm}^2)/(\rho^+ - \rho^-) \quad (2.14)$$

Здесь величины $\nu_{\pm}$ и $\rho_{\pm}$ — коэффициенты электроупругой связи пьезоэлектрика на поверхностях $y = \pm h$ неоднородного пьезослоя, соответственно.

Полученные значения для фазовой скорости v_{ϕ} напоминают характеристическое уравнение для поверхностных волн Гуляева-Блюстения. В случае неоднородного слоя поверхностные сдвиговые волны вблизи поверхностей $y = \pm h$ распространяются с разными скоростями: $v_{\phi} = V_{\pm}$, соответственно.

Из (2.14) очевидно, что если неоднородный слой на поверхностях $y = \pm h$ имеет характеристики таких пьезоэлектриков, для которых

$$(\bar{G}^+ > \bar{G}^- \text{ и } \nu^+ < \nu^-) \text{ или } (\bar{G}^+ < \bar{G}^- \text{ и } \nu^+ > \nu^-) \quad (2.15)$$

то поверхностные волны по границам $y = \pm h$ не будут распространяться.

Если длина волны очень велика по сравнению с толщиной слоя $l = 2\pi/k \gg 2h$, то заменяя в уравнении (2.12) вырожденные гипергеометрические функции на их асимптоты при $l, \eta \rightarrow 0$

$$F(a, b, \xi) \rightarrow 1,$$

$$M(a, b, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} \ln \xi + O(|\ln \xi|) & \text{при } b=1 \\ \frac{1}{\Gamma(a)} (1/\xi) + O(|\ln \xi|) & \text{при } b=2 \end{cases}$$

получим, что линейная неоднородность пьезоэлектрического материала не вносит качественные поправки в общую картину длинных волн. Она только количественно изменяет скорость распространения длинных волн. При соблюдении условия (2.15) длинные волны также не могут распространяться.

Пара пьезоэлектриков — пьезокерамика ЦТС-4 ($c_{44}^0 = 2,56 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho^+ = 7,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $e_{11}^+ = 12,5$ Кл/м², $\epsilon_{11}^+ = 650 \cdot 10^{-11}$ Ф/м) и окись

шника ($c_{44} = 4,25 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 5,68 \cdot 10^3$ кг/м³, $e_{15} = -0,59$ Кл/м², $\epsilon_{11} = 7,38 \cdot 10^{-11}$ Ф/м) имеют характеристики, удовлетворяющие условиям $G \ll G^*$ и $\rho \gg \rho^*$. Следовательно, в этом случае распространение поверхностных сдвиговых волн в неоднородном слое невозможно.

ABOUT PROPGATION OF ELECTROELASTIC MONOCHROMATIC WAVE IN NONHOMOGENEOUS PIEZOELECTRIC

A. S. AVETISIAN

ԱՆՀՄԱՍՈՒՆՈ ՊԻԵՉՈՒԷԼԵՍՏԻՎՈՒՄԻ ԷԼԵԿՏՐՈՍՏՐԱԿԱՆ ԻՐՈՆՈՔՐՈՄԱՆՏԻ ԱՍԷԻ ՏՐԱՆՍՄԱՆ ԴԱՍԻՆ

Ա. Ս. ԱՎԵՏԻՍԻԱՆ

Ա ճ փ ո փ ո ճ

Հետազոտվում է անհամասեռ պիեզոէլեկտրիկում էլեկտրաստատիկական մոնոքրոմատիկ ալիքի տարածման հարցը: Ստացված է ոչ դժային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ, որին բավարարում են ալիքի ամպլիտուդային և ֆազային ֆունկցիաները:

Դիտարկվում է դժային անհամասեռ պիեզոէլեկտրիկ շերտում սահմանափակ տարածման խնդիրը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Аветисян А. С. Поверхностные электроупругие волны Ляна в случае неоднородного пьезоэлектрического слоя.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1987, т. 4, № 1, с. 24—29.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики т. 1. М.—Л.: ГИИЛ, 1951, 476 с.
3. Bacteria I., Maugin G. A. Ondes de surface SH pures en elasticite inhomogene.—Journ. de Mecanique theorique et appliquee, 1982, vol. 1, № 6, p. 995—1013.
4. Bhattacharya S. H. Exact solutions of SH wave equations in transversely isotropic inhomogeneous elastic media.—Pure and Appl. Geophys., 1971, vol. 97, № 1, p. 19—35.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
21.XII.1986