ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 5, 1988 Механика

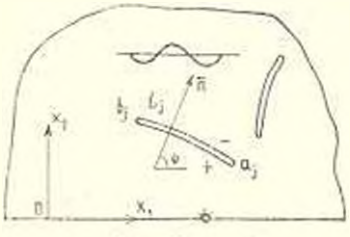
УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН МЕХАНИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЙ С ТУННЕЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

ФИЛЬШТИНСКИЙ М. Л.

Решение ряда статических и динамических задач электроупругости для тел с трещинами содержатся, например, в [1—5]. Ниже рассматривается динамическая краевая задача электроупругости для пьезокерамического полупространства с туннельными криволинейными трещинами—разрезами, находящегося в состоянии продольного сдвига. Краевая задача сводится к сингулярному интегральному уравнению. Получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений механических и электромагнитных величин. Представлены результаты расчетов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим отнесенную к кристаллофизической системе координат $ox_1x_2x_3$ полубесконечную пьезокерамическую среду $x_2 \geqslant 0$ (кристалл гексагональной системы $6mm$, пьезокерамика *PZT*—4, *PZT*—5 и др.), ослабленную туннельными вдоль оси ox_3 криволинейными трещинами-разрезами L_j ($j = 1, 2, \ldots, k$).



Фиг. 1

Пусть на берегах разрезов задана не зависящая от координаты x_3 непрерывная по Гельдеру сдвиговая нагрузка $Z_n = Z_n^+ = -Z_n^- = -\mathrm{Re}\{Z \exp(-i\omega t)\}$, а из бесконечности излучается монохроматическая *SH*-волна смещений (фиг. 1)

$$w_0 = \mathrm{Re}\{W_0 \exp(-i\omega t)\}, \quad W_0 = \exp\{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\} \tag{1.1}$$

$$\alpha_1 = \gamma_0 \cos\beta_*, \quad \alpha_2 = \gamma_2 \sin\beta_*, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c}$$

$$c = \sqrt{\frac{c_{44}(1+\varkappa_0^2)}{\rho}}, \qquad \varkappa_0^2 = \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11} c_{44}}$$

Здесь ω — частота, β_* — угол между нормалью к фронту падающей волны и осью ox_1; c_{44}, e_{15}, ε_{11} и ρ — соответственно модуль сдвига, пьезокерамический модуль, диэлектрическая проницаемость и плотность материала.

Ниже будем предполагать, что полупространство может быть либо закреплено, либо свободно от сил вдоль границы $x_2=0$. Кроме этого, рассмотрим два типа электрических краевых условий: граница полупространства электродирована и заземлена ($E_1=0$); полупространство граничит с вакуумом ($D_2=0$)

Относительно разрезов предположим, что L_j—простые разомкнутые непересекающиеся дуги с кривизнами, удовлетворяющими условию Гёльдера.

В этих условиях в теле действуют сопряженные полевые поля механических напряжений продольного сдвига $\tau_{31}(x_1, x_2)$, $\tau_{32}(x_1, x_2)$, векторов электрической и магнитной напряженности $E_3(x_1, x_2)$, $E_j(x_1, x_2)$ и $H_3(x_1, x_2)$.

Полная система уравнений поставленной задачи имеет вид: уравнения состояния пьезосреды

$$\tau_{31}=c_{44}\partial_1 w-e_{31}E_3, \quad D_1=e_{31}\partial_1 w+\varepsilon_{11}E_1 \tag{1.2}$$
$$\tau_{32}=c_{44}\partial_2 w-e_{15}E_3, \quad D_2=e_{15}\partial_2 w+\varepsilon_{11}E_2$$

уравнение движения

$$\partial_1\tau_{31}+\partial_2\tau_{32}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.3}$$

уравнения Максвелла

$$\partial_1 E_2-\partial_2 E_1+\mu\mu_0\frac{\partial H_3}{\partial t}=0, \quad \partial_2 H_3=\frac{\partial D_2}{\partial t} \tag{1.4}$$

$$\partial_1 H_3=-\frac{\partial D_2}{\partial t}, \quad \partial_1 D_1+\partial_2 D_2=0$$

Электромагнитные граничные условия на берегах разрезов возьмем в виде

$$E_3^-=E_3^+, \quad D_n^-=D_n^+, \quad H_3^-=H_3^+, \quad B_n^-=B_n^+ \tag{1.5}$$

Можно показать [4], что амплитуды механических и электромагнитных величин выражаются через две функции W и F в виде

$$T_{31}=c_{44}(1+\varkappa^2)\partial_2 W+e_{31}\partial_1 F, \quad T_{32}=c_{44}(1+\varkappa^2)\partial_1 W-e_{15}\partial_2 F$$

$$E_1=\partial_2 F-\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\partial_1 W, \quad E_2=-\partial_1 F-\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\partial_2 W \tag{1.6}$$

$$D_1=\varepsilon_{11}\partial_2 F, \quad D_2=-\varepsilon_{11}\partial_1 F, \quad H_3=-i\omega\varepsilon_{11}F$$

Здесь $T_{31}, \ldots, H_3$—амплитуды соответствующих механических, электрических и магнитных величин. Функции W и F удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 W+\gamma_2^2 W=0, \quad \nabla^2 F=0 \tag{1.7}$$

2. Интегральные представления решений динамической задачи электроупругости для трещин продольного сдвига. Волновые поля в полупространстве с дефектами складываются из прямой и отраженной от границы полупространства волн, а также рассеянного дефектами поля.

В соответствии с этим функции W и F представим в виде

$$W(x_1, x_2)=-\frac{1}{4}\int_L |W|\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}G(\zeta; z)d\xi-\frac{\partial}{\partial\eta}G(\zeta; z)d\eta\right\}+W_0-AW_1 \qquad (2.1)$$

$$F(x_1, x_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\{f(\zeta)H(\zeta; z)d\zeta-\overline{f(\zeta)}\overline{H(\zeta; z)}d\bar{\zeta}\}$$

$$G(\zeta; z)=H_0^{(1)}(\gamma_2 r)-AH_0^{(1)}(\gamma_2 r_1),\quad \zeta=\xi_1+i\xi_2$$

$$\bar{\zeta}=\xi_1-i\xi_2,\quad H(\zeta; z)=\ln(\zeta-z)-A\ln(\zeta-\bar{z})$$

$$(\xi_1, \xi_2)\in L=L_1,\quad W_1=\exp\{-i(x_1\xi_1-x_2\xi_2)\}$$

Здесь $|W|$—скачок амплитуды перемещения на L_1, случай $A=-1$ соответствует свободному, граничащему с вакуумом, полупространству, случай $A=1$—закрепленному и покрытому заземленным электродом полупространству.

Представления (2.1) удовлетворяют соответственно уравнениям (1.7), механическим и электрическим краевым условиям указанных типов на границе полупространства $x_2=0$, а также условиям излучения [6]

3. Интегральное уравнение краевой задачи. По формулам (1.6) находим интегральные представления величин $T_n=T_{12}\cos\varphi+T_{23}\sin\varphi, E_s^*$ и D_n^* (φ—угол между нормалью к левому берегу разреза и осью ox_1). Подстановка предельных значений E_s^* и D_n^* при $z\to\zeta_0\in L$ в граничные условия (1.5) приводит к зависимостям

$$f(\zeta)=\frac{e_{15}}{2c_{11}}e^{-i\varphi}\left|\frac{dW}{ds}\right|,\quad \overline{f_1(\zeta)}=\frac{e_{15}}{2c_{11}}e^{i\varphi}\left|\frac{dW}{ds}\right| \qquad (3.1)$$

Условие непрерывной продолжимости вектора механических напряжений через L выполняется автоматически, а механическое граничное условие на одном из берегов L приводит к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$\int_L p'(\zeta)g(\zeta, \zeta_0)ds+\int_L p(\zeta)g_1(\zeta, \zeta_0)ds=N(\zeta_0) \qquad (3.2)$$

$$g(\zeta, \zeta_0)=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi_0}}{\zeta-\zeta_0}+A\varkappa^2\operatorname{Im}\frac{e^{-i\varphi_0}}{\bar{\zeta}-\zeta_0}$$

$$g(\zeta, \zeta_0) = \frac{\pi i \gamma_2^2 (1+\varkappa_0^2)}{4} [A H_0^{(1)}(\gamma_2 r_{10}) \cos(\psi + \psi_0) -$$

$$- H_0^{(1)}(\gamma_2 r_0) \cos(\psi - \psi_0) + H_2(\gamma_2 r_0) \cos(\psi + \psi_0 - 2\alpha_0) -$$

$$- A H_2^{(1)}(\gamma_2 r_{10}) \cos(\psi - \psi_0 - 2\alpha_{10})]$$

$$p(\zeta) = \frac{[W]}{2}, \quad p'(\zeta) = \frac{dp(\zeta)}{ds}$$

$$N(\zeta_0) = \frac{\pi Z}{c_{44}} + \pi i \gamma_2 (1 + \varkappa_0^2) \{ \exp(-i(\alpha_1 \xi_{10} + \alpha_2 \xi_{20})) \times$$

$$\times \cos(\psi_0 - \beta_*) - A \exp(-i(\alpha_1 \xi_{10} - \alpha_2 \xi_{20})) \cos(\psi_0 + \beta_*) \}$$

$$r_0 = |\zeta_0 - \zeta|, \quad r_{10} = |\zeta_0 - \bar{\zeta}|, \quad \alpha_0 = \arg(\zeta_0 - \zeta)$$

$$\alpha_{10} = \arg(\zeta_0 - \bar{\zeta}), \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \zeta_0 = \xi_{10} + i \xi_{20}$$

$$\zeta, \zeta_0 \in L, \quad H_2(x) = \frac{4i}{\pi x^2} + H_2^{(1)}(x)$$

Интегральное уравнение (3.2) в совокупности с дополнительными условиями равенства нулю скачков перемещений на концах разрезов

$$\int_{L_j} p'(\zeta) ds = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.3}$$

имеет единственное решение в классе функций, неограниченных на концах L_j [7].

4. Динамический коэффициент интенсивности напряжений. Введем параметризацию контура L. Положим

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad -1 < \beta < 1, \quad p'(\zeta) = \frac{\Omega_0(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1-\beta^2}}, \quad s'(\beta) = \frac{ds}{d\beta} > 0$$

$$\Omega_0(\beta) \in H[-1, 1] \tag{4.1}$$

Асимптотический анализ выражений $\partial_i W$ и $\partial_i F$ $(i = 1, 2)$, полученных из (2.1), с привлечением формул (1.6), позволяет найти главную сингулярную часть механических и электрических величин на продолжении за вершины трещины

$$\tau_{\pm}^0 = - c_{44} \frac{\operatorname{Re}[e^{-i\psi}\Omega_0(\mp 1)]}{\sqrt{2 r s'(\mp 1)}}, \quad D_{\pm}^0 = \frac{e_{15}}{c_{44}} \tau_{\pm}^0, \quad E_1^0 = E_2^0 = 0 \tag{4.2}$$

Здесь верхний знак относится к вершине трещины a, нижний — к b, r — расстояние от точки до вершины.

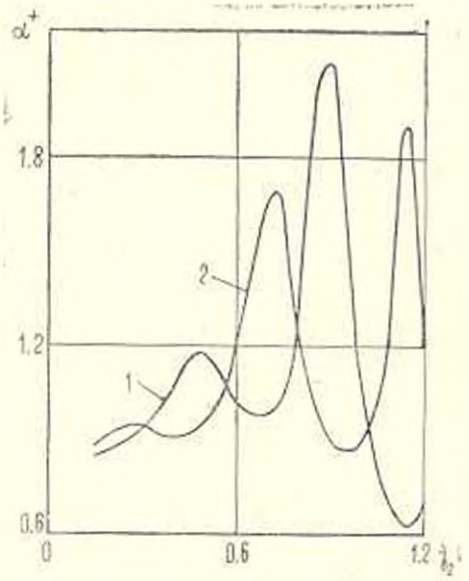
Напряженность электрического поля не имеет особенности в вершинах трещин. Это объясняется тем, что вектор $\vec{E}$ непрерывно продолжается через разрезы в силу (1.5), условия $Z_n = -Z_n$ и соотношений (1.2).

Динамический коэффициент интенсивности напряжений определяется обычным образом: $k_3=\lim\sqrt{2\pi r}\,\tau_{\cdot}$ $(r\to 0)$.

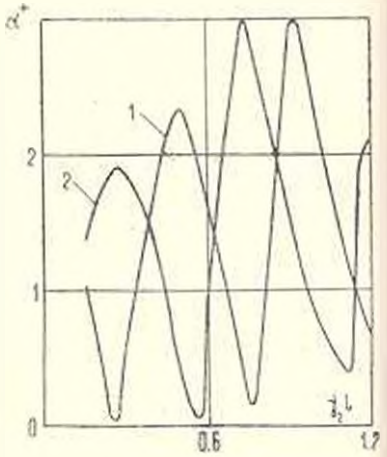
5. Результаты расчетов. Рассматривалась параболическая трещина в пьезокерамике $PZT=4$ ($c_{44}=2{,}56\cdot 10^{10}$ н/м^2, $e_{15}=12{,}7$ к/м^2, $\varepsilon_{11}=730\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}$ ф/м), параметрическое уравнение которой

$$\tau_1=\rho_1\beta,\quad \tau_2=\rho_2+\rho\beta^2,\quad -1\leqslant\beta\leqslant 1 \qquad (5.1)$$

Интегральное уравнение (3.2) с учетом (4.1) и (5.1) сводилось к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $\Omega_0(\beta)$ в узлах интерполяции согласно процедуре работы [8].



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 приведены значения $\alpha^+=c_{44}|\Omega_0(1)|\,(Z\sqrt{ls'(1)})$ в зависимости от нормализованного волнового числа $\tau_2 l$ для случая $\tau=Z=\mathrm{const}=0$, $p_1=1$, $p_2=2l=3$; ($2l$ – длина разреза); кривая 1 построена для значений $A=1$, $p=0{,}5$; кривая 2 – для $A=-1$, $p=-0{,}5$.

Зная величины α^+ и $\delta^+=\arg\Omega_0(-1)$, находим коэффициент интенсивности k_3 по формуле

$$k_3=-\sqrt{\pi l}\,Z\alpha^+\cos(\omega t-\delta^+)$$

На фиг. 3 приведены графики величины $\alpha^+=e_{15}|\Omega_0(1)|\,(|T_{23}|\sqrt{ls'(1)})$ в зависимости от нормализованного волнового числа $\tau_2 l$ для случая $Z=0$, $\tau=0$, $p_1=1$, $p_2=2l=3$. Кривая 1 построена для значений $A=1$, $p=0{,}5$; кривая 2 – для $A=-1$, $p=-0{,}5$. Здесь величина T_{23} – амплитуда напряжения τ_{23} в падающей волне. Зная α^+ и $\delta^+=\arg\Omega_0(-1)$, находим динамический коэффициент интенсивности по формуле

$$k_1=-\sqrt{\pi l}\,|T_{23}|\alpha^+\cos(\omega t-\delta^+)$$

INTERACTION BETWEEN THE WAVES OF MECHANICAL SHIFTS WITH TUNNEL CRACKS OF LONGITUDINAL SHEAR IN PIEZOCERAMIC HALF-SPACE

M. L. FILSHTINSKY

ՊԻԵԶՈԿԵՐԱՄԻԿԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԻ ԹՈՒՆԵԼԱՅԻՆ ՃԱՔԵՐԻ ՀԵՏ

Մ. Լ. ՖԻԼՇՏԻՆՍԿԻ

Ամփոփում

Կորագիծ թունելային ճաքերով պիեզոկերամիկական կիսատարածությունում մեխանիկական տեղաշարժերի ալիքների փոխազդեցության մասին էլեկտրաառաձգականության խնդիրը հանգեցվում է տեղափոխությունների թռիչքների նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման։ Այդ հավասարումը լուծվում է թվային եղանակով՝ կիրառելով Մուլտոպի տիպի ընթացակարգը։ Ճաքի գագաթում հաշվվում են մեխանիկական և էլեկտրական մեծությունների ինտենսիվության գործակիցները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И.* Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником.—ПММ, 1975, т. 39, вып. 1, с. 149—159.
2. *Белоконытова Л. В., Фильштинский Л. А.* Двумерная краевая задача электроупругости для пьезоэлектрической среды с разрезами.—ПММ, 1979, т. 43, вып. 1, с. 138—143.
3. *Иваненко О. А., Фильштинский Л. А.* Взаимодействие трещины и включения в пьезокерамическом полупространстве.—Прикладн. механика, 1983, т. 19, № 12, с. 52—58.
4. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Динамическая антиплоская задача для пьезоэлектрической среды. Тр. Моск. ин-та хим. машиностр., 1974, вып. 56, с. 3—13.
5. *Фильштинский Л. А., Фильштинский М. Л.* Взаимодействие волн смещения с криволинейными трещинами продольного сдвига в пьезоэлектрической среде.—ПММ, 1985, т. 49, вып. 5, с. 822—826.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1977. 736 с.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
8. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости.—М.: Наука, 1973. 304 с.

Сумский филиал Харьковского
политехнического института
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
16.IX 1987