ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 5, 1988 Механика

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В МАГНИТОМЯГКОМ ТЕЛЕ С ТРЕЩИНОЙ, ВЫЗВАННОЙ ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

АСАНЯН Д. Д., АСЛАНЯН А. А., БАГДАСАРЯН Г. Е.

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии упругого магнитомягкого ферромагнитного пространства с прямолинейной туннельной трещиной под действием постоянного магнитного поля. Магнитное поле является единственным источником внешних воздействий и находится в плоскости, перпендикулярной к трещине. Аналогичная задача, в случае, когда вектор магнитного поля перпендикулярен к трещине, рассмотрена в [4]. В отличие от работы [4], здесь показано, что наклонное магнитное поле приводит к возникновению концентрации сдвиговых напряжений.

1. Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле происходит намагничивание материала, приводящее как к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению массовых и поверхностных сил. Под действием этих сил в среде возникают деформации, возбуждающие добавочное (индуцированное) магнитное поле.

Характеристики магнитного поля представим в виде

$$\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{h},\quad \vec{B}=\vec{B}_0+\vec{b},\quad \vec{M}=\vec{M}_0+\vec{m}$$

где $\vec{H}_0$, $\vec{B}_0$ и $\vec{M}_0$, соответственно, векторы напряженности магнитного поля, магнитной индукции и намагниченности недеформированного тела; $\vec{h}, \vec{b}$ и $\vec{m}$—возмущения к указанным величинам, обусловленные деформацией среды. В вакууме векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ связаны соотношением $\vec{B}^{(e)}=\mu_0\vec{H}^{(e)}$, где μ_0—магнитная постоянная $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ Г/м, а в магнитомягком материале—соотношением $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=\mu_0(\vec{H}+\varkappa\vec{H})=\mu_0\mu_r\vec{H}$, где $\varkappa$—магнитная восприимчивость, $\mu_r=\varkappa+1$—относительная магнитная проницаемость среды.

Невозмущенное магнитное поле во всем пространстве определяется из решения следующей задачи магнитостатики:

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\vec{H}_0=0,\quad \operatorname{div}\vec{B}_0=0\\ \vec{n}\times[\vec{H}_0-\vec{H}_0^{(e)}]=0,\quad \vec{n}\cdot[\vec{B}_0-\vec{B}_0^{(e)}]=0,\ \text{при } (x_1,x_2,x_3)\in\Gamma \qquad (1.1)\\ \vec{H}_0^{(e)}\to\vec{H}^0 \text{ при } |r|\to\infty\end{gathered}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности Г тела, r — радиус-вектор, x_i — декартовые координаты рассматриваемой точки, H^0 — напряженность заданного магнитного поля на бесконечности при отсутствии ферромагнитного тела; индекс «е» означает принадлежность к внешней (окружающей тела) среде, электромагнитные свойства которой эквивалентны свойствам вакуума.

Напряженно-деформированное состояние среды и индуцированное в ней магнитное поле определяются из уравнений и граничных условий магнитоупругости магнитомягкого ферромагнитного тела [1]. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия линеаризуются. В результате, получаются следующие линейные уравнения и граничные условия возмущенного состояния, приведенные в работах [2, 3].

Система дифференциальных уравнений магнитоупругости деформированного состояния имеет вид

$$\operatorname{div} \hat{S} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{b} = 0 \tag{1.2}$$

где $\hat{S} = \hat{t} + \hat{T}$; $\hat{t}$ и $\hat{T}$ — тензоры магнитоупругих напряжений и напряжений Максвелла, соответственно, причем

$$t_{ij} = \sigma_{ij} + \mu_0 \varkappa H_{0i} H_{0j} + \mu_0 \varkappa (H_{0i} h_j + H_{0j} h_i)$$

$$T_{ij} = \mu_0 (\mu_r H_{0i} H_{0j} - 0{,}5 \delta_{ij} H_{0k} H_{0k}) + \mu_0 [\mu_r (H_{0i} h_j + H_{0j} h_i) - \delta_{ij} H_{0k} h_k] \tag{1.3}$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование), δ_{ij} — символ Кронекера, σ_{ij} — компоненты тензора упругих напряжений

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{1.4}$$

λ и μ — постоянные Ляме, u_i — компоненты вектора упругих перемещений.

Граничные условия на поверхностях раздела двух сред запишутся в виде

$$n_j [S_{ij} - S_{ij}^{(e)}] = 0, \quad \varepsilon_{ijk} \left\{ n_j [h_k - h_k^{(e)}] - n_m \frac{\partial u_m}{\partial x_j} [H_{0k} - H_{0k}^{(e)}] \right\} = 0 \tag{1.5}$$

$$n_i [b_i - b_i^{(e)}] = n_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} [B_{0i} - B_{0i}^{(e)}]$$

где ε_{ijk} — символ Леви-Чивита.

2. На основе приведенных уравнений и граничных условий рассмотрим задачу о концентрации упругих напряжений и индуцированного магнитного поля возле трещины, обусловленной внешним постоянным магнитным полем.

Пусть в бесконечном упругом ферромагнитном пространстве имеется прямолинейная туннельная трещина шириной 2a, берега которой свободны от внешних механических нагрузок. Прямоугольная система декартовых координат выбрана так, что поперечное сечение трещины находится в плоскости x_1ox_2 и занимает область $(-a, a)$ на координатной оси ox_1. Пространство, материал которого является изотропным, однородным и магнитомягким, помещено в постоянное магнитное поле $\vec{B}_0(0, B_{02}, B_{03})$. Указанное магнитное поле является единственным источником внешних воздействий.

Для рассматриваемого случая задача (1.1) имеет следующее решение:

$$\vec{B}_0^{(e)} = B_{02}\vec{i}_2 + B_{03}\vec{i}_3, \quad \vec{B}_0 = B_{02}\vec{i}_2 + \mu_r B_{03}\vec{i}_3, \quad \vec{H}_0^{(e)} = \mu_0^{-1}\vec{B}_0^{(e)}, \quad \vec{H}_0 = (\mu_0\mu_r)^{-1}\vec{B}_0 \tag{2.1}$$

где индекс «е» означает принадлежность к области трещины, а $\vec{i}_k$ — единичные векторы координатных осей.

Принимая, что все искомые величины не зависят от координаты x_3 из (1.2)—(1.4), в силу (2.1), получим следующие уравнения магнитоупругости деформированного состояния:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu}\theta_{,i} + F_i = 0, \quad (i=1, 2), \quad \Delta\Phi = 0, \quad \Delta\Phi^{(e)} = 0 \tag{2.2}$$

$$\Delta u_3 = 0 \tag{2.3}$$

где $\Phi^{(e)}$ и Φ — потенциалы индуцированного магнитного поля в области трещины и в среде, соответственно, Δ — двумерный оператор Лапласа,

$$\theta = u_{1,1} + u_{2,2}, \quad F_i = \frac{2\varkappa B_{02}}{\mu_0\mu_r} h_{i,2}, \quad h_k = \Phi_{,k}, \quad h_k^{(e)} = \Phi^{(e)}_{,k}, \quad f_{,k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \tag{2.4}$$

Аналогичным образом из (1.3)—(1.5) получаются следующие граничные условия на плоскости $x_2 = 0$:

$$u_2 = 0, \quad \Phi = 0 \qquad \text{при} \quad |x_1| > 0$$

$$t_{12} + \frac{\varkappa B_{02}^2}{\mu_0\mu_r} u_{2,1} = 0 \qquad \text{при} \quad |x_1| < \infty$$

$$t_{22} = \frac{\varkappa^2}{\mu_r}\left(\frac{B_{02}^2}{2\mu_0\mu_r} + B_{02}\Phi_{,2}\right) \qquad \text{при} \quad |x_1| < a \tag{2.5}$$

$$\Phi_{,1} - \Phi^{(e)}_{,1} = \frac{\varkappa B_{03}}{\mu_0\mu_r} u_{2,1} \qquad \text{при} \quad |x_1| < a$$

$$\Phi^{(e)} = 0, \quad \Phi^{(e)}_{,2} = \mu_r\Phi_{,2} \qquad \text{при} \quad |x_1| < a$$

$$\begin{cases} u_{2,1} = 0, & \text{при} \quad |x_1| > a \\ u_{2,2} = -\dfrac{\varkappa B_{03}^{(e)}}{\mu}\left(\dfrac{B_{02}}{\mu_0\mu_r} + h_2\right) & \text{при} \quad |x_1| < a \end{cases} \tag{2.6}$$

Кроме условий (2.5), (2.6) должны удовлетворяться также условия на бесконечности, согласно которым все искомые величины, обусловленные деформацией среды, должны стремиться к нулю при $r \to \infty$.

Из (2.2)—(2.6), в силу (1.3), видно, что: а) задача (2.2), (2.5) (плоская задача для определения u_1 и u_2) отделена от задачи (2.3), (2.6) (антиплоская задача для определения u_3), б) для решения антиплоской задачи необходимо иметь граничное значение компоненты h_2 индуцированного в среде магнитного поля, возникающее вследствие плоской деформации, в) антиплоская задача обусловлена только компонентом B_{03} невозмущенного магнитного поля.

3. Плоская задача (2.2), (2.5) решена в работе [1] и для интересующей нас величины h_2 на берегах трещины получено следующее значение при $|x_1|<a$:

$$h_2(x_1,0)=h_2^{(i)}=\frac{(1-\nu)(\varkappa-2)\varkappa b_0^2}{2\mu[\text{[illegible]}(1-2\nu)+8(1-\nu)(1-2\nu)\varkappa-2(1-\nu)\varkappa^2]}\,\frac{B_{03}}{\mu_0\mu}, \qquad (3.1)$$

где
$$b_0^2=\frac{B_{03}^2}{\mu_0\mu}$$

Решение уравнения (2.3) с учетом условия на бесконечности, представим в виде $(x_2>0)$

$$u_3(x_1,x_2)=\int A(\alpha)\exp(-|\alpha|x_2)\exp(-i\alpha x_1)\,d\alpha \qquad (3.2)$$

Неизвестную функцию $A(\alpha)$, входящую в (3.2), определяем, удовлетворяя граничным условиям (2.6). Для этой цели вводим новую неизвестную функцию $\varphi(x_1)$ следующим образом:

$$\varphi(x_1)=u_{3,1}(x_1,0) \qquad \text{при} \quad |x_1|<a \qquad (3.3)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.6), можно показать, что $\varphi(x_1)$ является решением следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)\,ds}{x-s}=\lambda \qquad (3.4)$$

удовлетворяющего условию

$$\int_{-a}^{a}\varphi(s)\,ds=0 \qquad (3.5)$$

где

$$\lambda=\text{[illegible]}$$

Интегральное уравнение (3.4) в классе неограниченных функций имеет следующее решение, удовлетворяющее условию (3.5) [5]

$$\varphi(x_1) = -\lambda \frac{x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} \tag{3.6}$$

На основе (3.6) из (3.3) определим перемещение u_3. Подставляя найденное выражение для u_3 в (1.3), определяем магнитоупругие напряжения S_{23} в среде. В частности, для S_{23} при $x_2=0$ получаем выражения

$$S_{23}(x_1, 0)/\mu = \frac{2\mu_r - 1}{\mu\mu_r}\,\frac{B_{02}B_{03}^{(r)}}{\mu_0} + \lambda + \frac{2\mu_r - 1}{\mu}\,B_{03}^{(r)}h_2^{(0)} \quad \text{при} \quad |x_1| < a$$

$$\begin{aligned} S_{23}(x_1, 0)/\mu = {} & \frac{2\mu_r - 1}{\mu\mu_r}\,\frac{B_{02}B_{03}^{(r)}}{\mu_0} + \lambda + \frac{2\mu_r - 1}{\mu}\,B_{03}^{(r)}h_2^{(0)} - \\ & - \left|\lambda + \frac{2\mu_r - 1}{\mu}\,B_{03}^{(r)} \cdot h_2^{(0)}\right| \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{при} \quad |x_1| > a \end{aligned} \tag{3.7}$$

Таблица 1

x	Сплав алфер	Феррит Ф—107	Железо технич.
1.1	$0.2667 \cdot 10^{-3}$	$0.2479 \cdot 10^{-3}$	$0.1516 \cdot 10^{-3}$
1.2	$0.2208 \cdot 10^{-3}$	$0.2061 \cdot 10^{-3}$	$0.1260 \cdot 10^{-3}$
1.3	$0.2019 \cdot 10^{-3}$	$0.1889 \cdot 10^{-3}$	$0.1154 \cdot 10^{-3}$
1.4	$0.1913 \cdot 10^{-3}$	$0.1792 \cdot 10^{-3}$	$0.1095 \cdot 10^{-3}$
1.5	$0.1845 \cdot 10^{-3}$	$0.1731 \cdot 10^{-3}$	$0.1057 \cdot 10^{-3}$
1.6	$0.1798 \cdot 10^{-3}$	$0.1688 \cdot 10^{-3}$	$0.1030 \cdot 10^{-3}$
1.7	$0.1763 \cdot 10^{-3}$	$0.1657 \cdot 10^{-3}$	$0.1011 \cdot 10^{-3}$
1.8	$0.1737 \cdot 10^{-3}$	$0.1633 \cdot 10^{-3}$	$0.9968 \cdot 10^{-4}$
1.9	$0.1716 \cdot 10^{-3}$	$0.1614 \cdot 10^{-3}$	$0.9853 \cdot 10^{-4}$
∞	$0.1580 \cdot 10^{-3}$	$0.1489 \cdot 10^{-3}$	$0.9089 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2

x	$B_0 = 0.2$ Тл	$B_0 = 0.4$ Тл	$B_0 = 0.8$ Тл
1.1	$0.6175 \cdot 10^{-5}$	$0.2465 \cdot 10^{-4}$	$0.9775 \cdot 10^{-4}$
1.2	$0.5103 \cdot 10^{-5}$	$0.2038 \cdot 10^{-4}$	$0.8103 \cdot 10^{-4}$
1.3	$0.4660 \cdot 10^{-5}$	$0.1862 \cdot 10^{-4}$	$0.7414 \cdot 10^{-4}$
1.4	$0.4113 \cdot 10^{-5}$	$0.1763 \cdot 10^{-4}$	$0.7029 \cdot 10^{-4}$
1.5	$0.4255 \cdot 10^{-5}$	$0.1701 \cdot 10^{-4}$	$0.6782 \cdot 10^{-4}$
1.6	$0.4145 \cdot 10^{-5}$	$0.1657 \cdot 10^{-4}$	$0.6611 \cdot 10^{-4}$
1.7	$0.4061 \cdot 10^{-5}$	$0.1625 \cdot 10^{-4}$	$0.6485 \cdot 10^{-4}$
1.8	$0.4003 \cdot 10^{-5}$	$0.1601 \cdot 10^{-4}$	$0.6389 \cdot 10^{-4}$
1.9	$0.3954 \cdot 10^{-5}$	$0.1581 \cdot 10^{-4}$	$0.6314 \cdot 10^{-4}$
∞	$0.3635 \cdot 10^{-5}$	$0.1454 \cdot 10^{-4}$	$0.5817 \cdot 10^{-4}$

На основе формул (3.7) произведены численные расчеты, результаты которых приведены в табл. 1 и 2. В табл. 1 приведены значения S_{23}/μ в различных точках $x_1 > a$ при $B_{02} = B_{03} = 1$ Тл для следующих ферромагнитных материалов: сплав алфер ($\nu = 0{,}3$; $\mu = 6{,}3 \cdot 10^4$ МПа; $\mu_r = 30$), ферит Ф—107 ($\nu = 0{,}3$; $\mu = 6{,}8 \cdot 10^4$ МПа; $\mu_r = 110$) и техническое железо ($\nu=0{,}28$; $\mu=1{,}1\cdot10^5$ МПа; $\mu_r=2{,}5\cdot10^3$). Зависимость $S_{23}(x_1)\,\mu$ от напряженности внешнего магнитного поля в случае технического железа при $B_{02}=B_{0*}$ приведена в табл. 2.

Формулы (3.7) и приведенные расчеты показывают, что: а) задача о трещине продольного сдвига возникает вследствие того, что $B_{02}\neq0$, б) существует такое значение B_{0*} величины B_{02}

$$\frac{B_{0*}^2}{\mu_0}=\frac{2\mu_r^2}{\varkappa}\,\frac{1}{\mu_r(\varkappa-2)(1-\nu)+2(1-\nu)\varkappa^2-1+2\nu-8(1-\nu)(1-2\nu)\nu}$$

для которого коэффициент интенсивности сдвиговых напряжений при $B_{02}=B_{0*}$ обращается в нуль; в) с увеличением напряженности внешнего магнитного поля напряжение S_{23} монотонно возрастает; г) влияние магнитного поля наиболее сильно около угла $\alpha=\pi/4$ (α – угол наклона H_0 относительно плоскости $x_2=0$).

STRESS CONCENTRATION IN MAGNETOSOFT BODY WITH CRACK CAUSED BY EXTERNAL MAGNETIC FIELD

D. D. ASANYAN, A. A. ASLANYAN, G. E. BAGDASARIAN

ՃԱՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՄԱԳՆԻՍԱՓԱՓՈՒԿ ՄԱՐՄՆՈՒՄ ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՎ ՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐՎԱԾ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՑԻԱՆ

Դ. Ջ. ՀԱՍԱՆՅԱՆ, Ա. Ա. ԱՍԼԱՆՅԱՆ, Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է թունելային ճաքով մագնիսափափուկ ֆեռոմագնիսական տարածության լարվածային դեֆորմացված վիճակի մասին խնդիր: Տարածությունը գտնվում է ճաքին ուղղահայաց հաստատուն մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ: Ցույց է տրված, որ թեև մագնիսական դաշտը առաջացնում է սահքային լարումների կոնցենտրացիա:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brown W. F.* Jr. Electric and Magnetic Forces.— American Journal of Physics, 1951, v. 19, pp. 290—304, 333—350.
2. *Tiersten H. F.* Coupled Magnetomechanical Equations for Magnetically Saturated Insulators.—J. of Math. Phisics, 1964, v. 5, No. 9, pp. 1298—1318.
3. *Pao Y.-H.* and *Yeh C.-S.* A Linear Theory for Soft Ferromagnetic Elastic Solids.— Int. Journal of Eng. Science, 1973, v. 11, pp. 415—436.
4. *Shindo Y.* The Linear Magnetoelactic Problem for a Soft Ferromagnetic Elastic Solid With a Finit Crack.— J. of App. Mechanics, ASME, 47, 1977.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

Институт механики АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса
Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
15.II.1988