

УДК 539.3:534.1

ПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ
 МАТЕРИАЛА С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ УПРУГИХ
 СВОЙСТВ

ВАПС Г. Б., КОСМОДАМНАНСКИЙ А. С., СТОРОЖЕВ В. И.

Анализ напряженно-деформированного состояния прямолинейно анизотропных пластин с криволинейными (в частном случае круговыми) граничными контурами является актуальной теоретической и прикладной задачей в механике конструкций из композиционных материалов и теории расчета упругих элементов электроакустических устройств. Далеко не исчерпывающие исследования в этой области относятся к краевым задачам, формулируемым для замкнутых односвязных областей [1—7] и задачам определения спектра собственных частот композитных пластин с вырезами [8, 9].

В настоящей работе рассматривается методика и результаты применения вариационного подхода к задаче о плоских гармонических колебаниях тонкой прямолинейно ортотропной пластины в форме концентрического кругового кольца, возбуждаемых равномерно распределенными по внутреннему или внешнему контуру нормальными пульсирующими усилиями.

Отнесем тонкую кольцевую ортотропную пластину, имеющую параллельную срединной поверхности плоскость симметрии упругих свойств, к безразмерным прямоугольным декартовым координатам (x_1, x_2) и полярным координатам (r, θ) , $r \exp(i\theta) = x_1 + ix_2$, начало которых совмещено с центром кольца. Безразмерный внутренний радиус пластины считаем равным единице, а на внешнем контуре $r=R$.

Вариационное уравнение рассматриваемой задачи для амплитудных характеристик при анализе колебаний в рамках модели динамического обобщенного плоского напряженного состояния имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \int_1^R \langle Au, \delta u \rangle r d\theta dr + \int_0^{2\pi} \{ (\sigma_{rr} - P_{r1}) \delta u_r + \sigma_{r\theta} \delta u_\theta \}_{r=1} + \\ + \{ (\sigma_{rr} - P_{r2}) \delta u_r + \sigma_{r\theta} \delta u_\theta \}_{r=R} \} d\theta = 0 \quad (1.1)$$

Здесь u —безразмерный амплитудный вектор упругих смещений, компоненты которого в прямоугольных декартовых координатах обозначены (u_1, u_2) , а в полярных координатах— (u_r, u_θ) ; σ_{ij} —безразмерные компоненты тензора напряжений, P_{rj} —характеристики интенсивности

усилий, приложенных к граничным контурам, а символом $\langle f, g \rangle$ введено скалярное произведение указанных векторов. Символом A , в соотношении (1.1) обозначен дифференциальный оператор уравнений стационарных колебаний тонкой ортотропной пластины

$$A = \begin{pmatrix} (c_{11} + c_{66})D^2 + (c_{11} - c_{66})L^2 + 2\Omega^2 & (c_{12} + c_{66})H^2 \\ (c_{12} + c_{66})H^2 & (c_{22} + c_{66})D^2 + (c_{66} - c_{22})L^2 + 2\Omega^2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

где $D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $L^2 = \partial_1^2 - \partial_2^2$, $H^2 = 2\partial_1\partial_2$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, c_{ij} — безразмерные упругие постоянные пластины, отнесенные к величине модуля упругости \bar{c}_{12} , $\Omega^2 = \rho\omega^2 R^2 \bar{c}_{12}^{-1}$ — приведенный безразмерный частотный параметр, ρ — плотность материала пластины, ω — круговая частота колебаний, R — величина внутреннего радиуса пластины, выступающая в качестве нормирующего параметра для всех характеристик, имеющих размерность смещений.

Вводя отражающие симметрию упругих свойств и нагрузки относительно координатных осей представления

$$u_1 = \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=-\infty} B_{mn} r^n \cos m\theta, \quad u_2 = \sum_{k=1,3,5,\dots} \sum_{l=-\infty} C_{kl} r^l \sin k\theta \quad (1.3)$$

и используя выражения

$$D^2 = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\theta^2, \quad L^2 = \cos 2\theta \cdot L_1 + 2\sin 2\theta \cdot L_2 \quad (1.4)$$

$$H^2 = \sin 2\theta \cdot L_1 - 2\cos 2\theta \cdot L_2, \quad L_1 = \partial_r^2 - r^{-1}\partial_r - r^{-2}\partial_\theta^2$$

$$L_2 = r^{-2}\partial_\theta - r^{-1}\partial_r\partial_\theta, \quad \partial_r = \partial/\partial r, \quad \partial_\theta = \partial/\partial\theta$$

$$u_r = u_1 \cos\theta + u_2 \sin\theta, \quad u_\theta = -u_1 \sin\theta + u_2 \cos\theta \quad (1.5)$$

$$\sigma_{rr} = 1/2((c_{11} + c_{12}) + (c_{11} - c_{12})\cos 2\theta)\partial_1 u_1 + ((c_{22} + c_{12}) + (c_{12} - c_{22})\cos 2\theta)\partial_2 u_2 + 2c_{66}\sin 2\theta(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) \quad (1.6)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\sin 2\theta((c_{12} - c_{11})\partial_1 u_1 + (c_{22} - c_{12})\partial_2 u_2) + c_{66}\cos 2\theta(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1)$$

после ряда преобразований из вариационного уравнения (1.1) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных B_{mn} , C_{kl} :

$$\sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=-\infty} B_{mn} a_{mnst} + \sum_{k=1,3,\dots} \sum_{l=-\infty} C_{kl} b_{klst} = P_{st}$$

$$\sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=-\infty} B_{mn} u_{mnij} + \sum_{k=1,3,\dots} \sum_{l=-\infty} C_{kl} v_{klj} = \bar{P}_{ij}$$

$$s, t = 1, 3, 5, \dots, \infty; \quad i, j = -\infty, \infty$$

Здесь

$$a_{mnst} = (R^{n+t} - 1)(n+t)^{-1}((c_{11} + c_{66})\gamma_{2,2}^{(mn)}\gamma_{s,m,0,0}^{(1)} + (c_{11} - c_{66})(\gamma_{4,4}^{(mn)})\gamma_{s,m-2,0,0}^{(1)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_5^{(mn)} \lambda_{s,m-2,0,0}^{(1)} + 2\Omega^2 (R^{n+t+2} - 1) (n+t+2)^{-1} \lambda_{s,m,0,0}^{(1)} + \{1/2(c_{11} + \\
& + c_{12}) (\gamma_1^{(mn)} \lambda_{s,m-1,1,0}^{(1)} - \gamma_2^{(mn)} \lambda_{s,m+1,1,0}^{(1)}) + 1/2(c_{11} - c_{12}) (\gamma_1^{(mn)} \lambda_{s,m-1,1,2}^{(1)} + \\
& + \lambda_{s,m-1,1,2}^{(2)}) - \gamma_2^{(mn)} (\lambda_{s,m+1,1,2}^{(1)} + \lambda_{s,m+1,1,2}^{(2)})\} + c_{66} (\gamma_1^{(mn)} (\lambda_{s,2,m-1,1}^{(2)} - \lambda_{s,1,m-1,2}^{(2)}) + \\
& + \gamma_2^{(mn)} (\lambda_{s,2,m+1,1}^{(2)} - \lambda_{s,1,m+1,2}^{(2)})) \} (1 + R^{n+t-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{klst} = & (R^{l+t} - 1) (l+t)^{-1} (c_{12} + c_{66}) (\gamma_4^{(kl)} \lambda_{s,k-2,0,0}^{(1)} - \gamma_5^{(kl)} \lambda_{s,k+2,0,0}^{(1)}) + \\
& + \{1/2(c_{12} + c_{66}) (\gamma_1^{(kl)} \lambda_{s,k-1,1,0}^{(1)} + \gamma_2^{(kl)} \lambda_{s,k+1,1,0}^{(1)}) + 1/2(c_{12} - c_{22}) (\gamma_1^{(kl)} (\lambda_{s,k-1,1,2}^{(1)} + \\
& + \lambda_{s,k-1,1,2}^{(2)}) + \gamma_2^{(kl)} (\lambda_{s,k+1,1,2}^{(1)} + \lambda_{s,k+1,1,2}^{(2)})) + c_{66} (\gamma_1^{(kl)} (\lambda_{s,2,k-1,1}^{(2)} - \lambda_{s,2,k-1,1}^{(2)}) - \\
& - \gamma_2^{(kl)} (\lambda_{s,1,k+1,2}^{(2)} - \lambda_{s,2,k+1,1}^{(2)}))\} (1 + R^{l+t-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{mnij} = & (1 - R^{n+j}) (n+j)^{-1} (c_{12} + c_{66}) (\gamma_4^{(mn)} \lambda_{i,m-2,0,0}^{(3)} - \gamma_5^{(mn)} \lambda_{i,m+2,0,0}^{(3)}) + \\
& + \{1/2(c_{11} + c_{12}) (\gamma_1^{(mn)} \lambda_{i,m-1,0,l,1}^{(2)} - \gamma_2^{(mn)} \lambda_{i,m+1,0,l,1}^{(2)}) + 1/2(c_{11} - c_{12}) (\gamma_1^{(mn)} (\lambda_{i,m-1,2,l,1}^{(2)} - \\
& - \lambda_{i,m-1,2,l,1}^{(2)}) - \gamma_2^{(mn)} (\lambda_{i,m+1,2,l,1}^{(2)} - \lambda_{i,m+1,2,l,1}^{(2)})) - c_{66} (\gamma_1^{(mn)} (\lambda_{i,2,m-1,1}^{(2)} + \lambda_{i,2,l,m-1}^{(2)}) + \\
& + \gamma_2^{(mn)} (\lambda_{i,2,m+1,1,2}^{(2)} + \lambda_{i,2,l,m+1}^{(2)}))\} (1 + R^{n+j-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{klst} = & (R^{l+t} - 1) (l+t)^{-1} ((c_{22} + c_{66}) \gamma_3^{(kl)} \lambda_{i,k,0,0}^{(3)} + (c_{66} - c_{22}) (\gamma_4^{(kl)} \lambda_{i,k-2,0,0}^{(3)} + \\
& + \gamma_5^{(kl)} \lambda_{i,k+2,0,0}^{(3)})) + 2\Omega^2 \lambda_{i,k,0,0}^{(3)} (R^{l+t+2} - 1) (l+t+2)^{-1} + \{1/2(c_{12} + \\
& + c_{22}) (\gamma_1^{(kl)} \lambda_{k-1,0,l,1}^{(2)} + \gamma_2^{(kl)} \lambda_{k+1,0,l,1}^{(2)}) + 1/2(c_{12} - c_{22}) (\gamma_1^{(kl)} (\lambda_{k-1,2,l,1}^{(2)} - \lambda_{k-1,1,1,2}^{(2)}) + \\
& + \gamma_2^{(kl)} (\lambda_{k+1,2,l,1}^{(2)} - \lambda_{k+1,1,1,2}^{(2)})) + c_{66} (\gamma_1^{(kl)} (\lambda_{i,k-1,1,2}^{(2)} + \lambda_{i,2,l,k-1}^{(2)}) - \\
& - \gamma_2^{(kl)} (\lambda_{i,k+1,1,2}^{(2)} + \lambda_{i,2,l,k+1}^{(2)}))\} (1 + R^{l+t-1})
\end{aligned}$$

$$P_{st} = (P_{r1} + P_{r2} R^t) \lambda_{s,1,0,0}^{(1)}, \quad \bar{P}_{tj} = (P_{r1} + P_{r2} R^t) \lambda_{i,1,0,0}^{(3)}$$

$$\lambda_{i/jk}^{(2)} = \int_0^{2\pi} \cos i\theta \cos j\theta \cos k\theta \cos l\theta d\theta, \quad \lambda_{i/jkl}^{(2)} = \int_0^{2\pi} \cos i\theta \cos j\theta \sin k\theta \sin l\theta d\theta$$

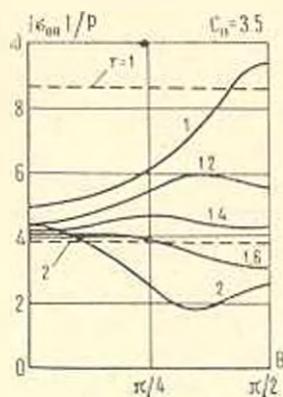
$$\lambda_{i/jkl}^{(3)} = \int_0^{2\pi} \sin l\theta \sin j\theta \sin k\theta \sin l\theta d\theta, \quad \gamma_1^{(mn)} = 1/2(m+n), \quad \gamma_2^{(mn)} = 1/2(m-n)$$

$$\gamma_3^{(mn)} = n^2 - m^2, \quad \gamma_4^{(mn)} = 1/2(n^2 + m^2) - n - m(1-n)$$

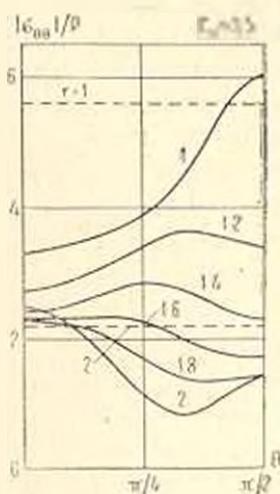
$$\gamma_5^{(mn)} = 1/2(n^2 + m^2) - n + m(1-n)$$

P_{r1} и P_{r2} — соответственно, амплитуды нагрузки, распределенной по внутреннему ($r=1$) и внешнему ($r=R$) контуру кольца.

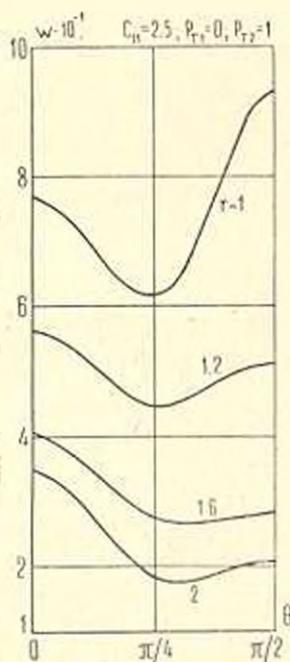
На фиг. 1—4 приведены результаты расчета при помощи описанной методики амплитудных значений возникающих в кольцевой пластине с $R=2$ при колебаниях с частотой $\Omega^2=0,5$ напряжений σ_0 и плотности средней за период энергии упругих деформаций, безразмерное значение которой определяется по формуле



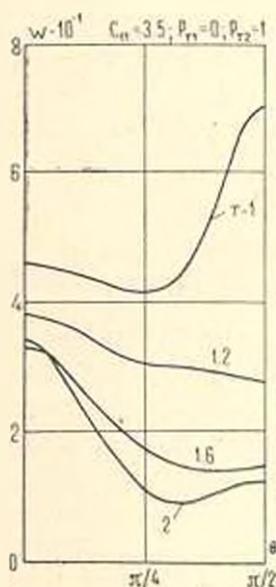
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\omega = c_{11}^2 \alpha_{11}^2 + c_{22}^2 \alpha_{22}^2 - c_{66}^2 \alpha_{12}^2 + 2c_{12} \alpha_{11} \alpha_{22} + \Omega^2 (u_1^2 + u_2^2)$$

Материал, составляющий пластину, характеризуется параметрами $c_{22}=2,0$; $c_{12}=1,0$; $c_{66}=0,5$; а постоянная c_{11} принимает значения $c_{11}=2,5$ или $c_{11}=3,5$, что соответствует различной степени анизотропии механических свойств (при $c_{11}=2,0$ пластина является изотропной и соответствующая задача — осесимметричной). При редуцировании системы (1.7) вводились конечные пределы изменения индексов

$n, l = \overline{1, N}; m, k = \overline{1, M_n}$. В процессе расчетов контролировалась точность удовлетворения поставленным краевым условиям в напряжениях и устойчивость численного решения в целом по отношению к ошибке удовлетворения краевым условиям и изменениям пределов суммирования N, M_n . Обнаружено, что для получения устойчивых решений с ошибкой удовлетворения краевым условиям, не превышающей 7% по отношению к P необходимо удерживать в редуцируемой системе порядка 90 уравнений.

Как свидетельствуют приведенные на фиг. 1, 2 распределения $|z_{33}|/P$, соответственно, при действии на пластину внутреннего ($P_{r1}=P, P_{r2}=0$) и внешнего ($P_{r1}=0, P_{r2}=P$) гармонического давления при учете анизотропии материала обнаруживаются не только качественные, но и значительные количественные отличия в картине напряженно-деформированного состояния по сравнению с напряженным состоянием изотропной пластины (пунктирные линии на фиг. 1, 2). Анализ распределения плотности энергии упругих деформаций (фиг. 3, 4) дает основания для оценок прочности рассматриваемого тела на основании энергетических критериев разрушения.

PLANE VIBRATIONS OF CIRCULAR PLATE MADE OF ELASTIC MATERIAL WITH RECTANGLE ANISOTROPIC PROPERTIES

G. B. VICE, A. S. KOSMODAMIANSKY, V. I. STOROZHEV

ԱՌԱՋՊԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՂՂԱԳԻԾ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊԻԱՅՈՎ ՆՅՈՒԹԻՅ ՕՂՍԿԱԶՅԵՎ ՍԱԼԻ ՀԱՐԹ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Գ. Բ. ՎԻՍԵ, Ա. Ս. ԿՈՍՄՈԴԱՄԻԱՆՍԿԻ, Վ. Ի. ՍՏՈՐՈՅԵՎ

Ա մ փ ո փ ո ռ մ

Վարիացիոն մեթոդի օգնությամբ ստացված է ուղղադիմ օրթոտրոպ նյութից կոնցենտրացված օղակի տեսք ունեցող բարակ սալի հարթ դեֆորմացիված լարվածային վիճակի մասին ինդերի լուծումը՝ հարմոնիկ տասանումների գեպրում, որոնք առաջանում են Լգրում բարախող նորմալ ճիգերի միջոցով: Բերված են թվային արդյունքներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Bert Charles W. Vibration of composite structures.—In Recent. adv. struct. dyn. pap. int. conf. (Southampton, 1980), Southampton, 1980, vol. 2, p. 693—712.
2. Cowdrey D. R., Willis J. R. Application of the finite element method to the vibration of quartz plates.—I. Acoust. Soc. Amer., 1974, 56, № 1, p. 94—98.
3. De Capua N. J., Sun B. C. Transverse vibration of a class of orthotropic plates.—Trans. ASME, E, 1972, 39, № 2, p. 613—615.

4. *Dokmeci M. G.* Vibrations of piezoelectric crystals.—*Int. J. Eng. Sci.*, 1986, 18, № 3A, p. 431—449.
5. *Laura P. A. A., Lulsoni L. E., Sarmiento G. S.* A method for the determination of the fundamental frequency of orthotropic plates of polygonal boundary shape.—*J. Sound and Vibr.*, 1980, 70, № 1, p. 77—84.
6. *Lulsoni L. E., Laura P. A. A.* Vibrations of rectangularly orthotropic, circular plates with edges elastically restrained against rotation.—*Fibre Sci. and Technol.*, 1981, 15, № 1, p. 1—11.
7. *Lubowe A. G., Mindlin R. D.* Extensional vibrations of thin quartz disks.—*J. Acoust. Soc. Amer.*, 1962, 34, № 12, p. 1911—1918.
8. *Преображенский И. Н., Шасалимов Ж. Ш.* О колебаниях пластинок с вырезами из композитных материалов.—*Механ. композитных материалов*, 1981, № 5, с. 797—801.
9. *Преображенский И. Н., Шасалимов Ж. Ш.* Влияние граничных условий на частоты собственных колебаний ортотропных прямоугольных пластинок с вырезами.—*Механ. композитных материалов*, 1982, № 1, с. 68—72.

Донецкий Государственный университет

Поступила в редакцию
8.VII.1985