ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 4, 1988 Механика

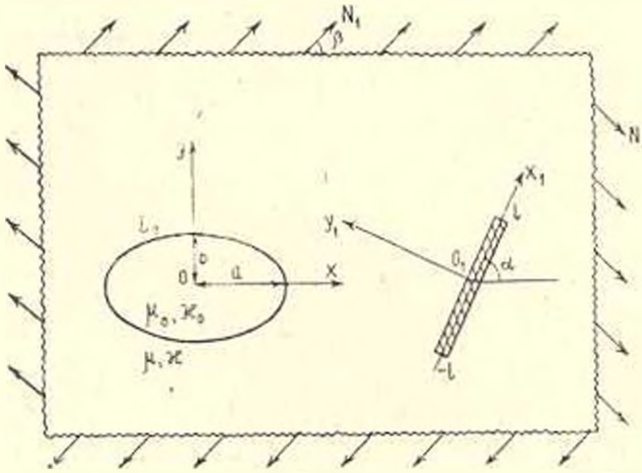
УДК 539.3.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ШАЙБОЙ И ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ТОНКИМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

ГРИЛИЦКИЙ Д. В., ОПАНАСОВИЧ В. К., ТИСОВСКИЙ Л. О.

Исследуем состояние упругого равновесия в пластине, содержащей упругую эллиптическую шайбу S_0 с полуосями a, b, ограниченную контуром L_0, и прямолинейное тонкое упругое включение длины $2l$, ширины $2h$ (фиг. 1). На линиях раздела материалов имеют место условия идеального механического контакта. Пластина находится под действием системы заданных силовых факторов.

Центр шайбы, точку O, свяжем с декартовой системой координат xOy, а в центре тонкого включения, точке O_1, поместим начало локальной системы координат $x_1O_1y_1$, причем ось O_1x_1 совпадает со срединной линией включения и образует угол α с осью x.



Фиг. 1

Величины, характеризующие шайбу, будем обозначать индексом 0, включение—индексом 1, матрицу—без индексов.

Граничные условия на линиях раздела материалов можно представить следующим образом:
для шайбы

$$[N(t)+iT(t)]=[N(t)+iT(t)]_0,\quad \frac{\partial}{\partial t}[u(t)+iv(t)]=\frac{\partial}{\partial t}[u(t)+iv(t)]_0,\quad t\in L_0 \tag{1}$$

для тонкого включения

$$(\sigma_y-i\tau_{xy})|_{y_1=\pm h}=(\sigma_y-i\tau_{xy})_1|_{y_1=\pm h}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}(u+iv)\right|_{y_1=\pm h}=\left.\frac{\partial}{\partial x_1}(u+iv)_1\right|_{y_1=\pm h}+i\gamma \tag{2}$$

Здесь $N(t)$, $T(t)$ — нормальная и касательная составные вектора напряжений на контуре шайбы; u, v и σ_y, τ_{xy} — соответственно компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, γ — поворот включения как жесткого целого.

Для решения задачи применим аппарат теории функций комплексного перменного [1]. Комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, в силу линейности, представим в виде

$$\Phi(z)=\Phi_*(z)+\Phi_0(z)+\Phi_1(z),\quad \Psi(z)=\Psi_*(z)+\Psi_0(z)+\Psi_1(z) \tag{3}$$

где функции $\Phi_*(z)$, $\Psi_*(z)$ определяют напряженно-деформированное состояние в однородной пластине при действии заданной системы внешних силовых факторов и считаются известными; потенциалы $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ характеризуют состояние упругого равновесия в пластине с тонким включением, а $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ — в пластине с шайбой S_0.

Считая включение пластиной малой ширины [2], будем иметь

$$(\sigma_y-i\tau_{xy})_1^+-(\sigma_y-i\tau_{xy})_1^-=2hK'(x),\quad |x|\leqslant l$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)_1^+-\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)_1^-=\frac{ih}{\mu_1}M'(x),\quad |x|\leqslant l$$

$$(\sigma_y-i\tau_{xy})_1^+ +(\sigma_y-i\tau_{xy})_1^-=\frac{2}{1+\varkappa_1}[(1-\varkappa_1)K(x)+2M(x)+$$

$$+2\overline{K(x)}+2\overline{M(x)}],\quad |x|\leqslant l$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)_1^+ +\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)_1^-=\frac{1}{\mu_1(1+\varkappa_1)}[2\varkappa_1K(x)+(\varkappa_1-1)M(x)-$$

$$-2\overline{K(x)}-2\overline{M(x)}],\quad |x|\leqslant l \tag{4}$$

Соотношения (4) представляют собой модель тонкого упругого включения. Здесь $K(x)$, $M(x)$ — подлежащие определению функции, а значками «+» и «−» обозначены граничные значения функций соответственно при $y_1\to+0$ и $y_1\to-0$. Для простоты в (4) и далее индекс 1 у переменной x опускаем.

Используя известные представления напряжений и перемещений через функции комплексного переменного [1], а также зависимости (4) и соотношения (3), из граничных условий (1), (2) получим краевые задачи

$$\Phi_0^+(t_0)-\Phi_0^-(t_0)+\overline{\Phi_0^+(t_0)}-\overline{\Phi_0^-(t_0)}+\frac{d\bar t_0}{dt_0}[R_0^+(t_0)-R_0^-(t_0)]=0, \quad t_0\in L_0$$

$$[\Phi_1(x)-\Omega_1(x)]^+-[\Phi_1(x)-\Omega_1(x)]^-=2ihK'(x), \quad |x|\leqslant l$$

$$[\varkappa\Phi_1(x)+\Omega_1(x)]^+-[\varkappa\Phi_1(x)+\Omega_1(x)]^-=2ih\frac{\mu}{\mu_1}M'(x), \quad |x|\leqslant l \tag{5}$$

$$\varkappa\Phi^+(t_0)-\overline{\Phi^+(t_0)}-\frac{d\bar t_0}{dt_0}R^+(t_0)=\frac{\mu}{\mu_0}[\varkappa_0\Phi^-(t_0)-\overline{\Phi^-(t_0)}-\frac{d\bar t_0}{dt_0}R^-(t_0)]$$

$$t_0\in L_0$$

$$[\Phi_1(x)+\Omega_1(x)]^++[\Phi_1(x)+\Omega_1(x)]^-=\frac{2}{1+\varkappa_1}[(1-\varkappa_1)K(x)+$$

$$+2M(x)+2\overline{K(x)}+2\overline{M(x)}]-2P(x)\varepsilon_1, \quad |x|\leqslant l$$

$$[\varkappa\Phi_1(x)-\Omega_1(x)]^++[\varkappa\Phi_1(x)-\Omega_1(x)]^-=\frac{2\mu}{\mu_1(1+\varkappa_1)}[2\varkappa_1K(x)+$$

$$+(\varkappa_1-1)M(x)-2\overline{K(x)}-2\overline{M(x)}]-2T(x)\varepsilon_2+2i\frac{\mu}{\mu_1}\gamma, \quad |x|\leqslant l \tag{6}$$

Здесь

$$R(z)=z\overline{\Phi'(z)}+\overline{\Psi(z)}$$

$$\Omega(z)=\overline{\Phi}(z)+z\overline{\Phi}'(z)+\overline{\Psi}(z), \quad \overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar z)}$$

$$P(x)=\Phi_p(X)+\overline{\Phi_p(X)}+e^{-2i\alpha}R_p(X)$$

$$T(x)=(1+\varkappa)\Phi_p(X)-P(x), \quad X=xe^{i\alpha}+z_0, \quad z_0=x_0+iy_0$$

$f_p(z)=f_*(z)+f_0(z)$, x_0, y_0 – координаты центра тонкого включения в системе координат xOy, $\varepsilon_1=1-\frac{\min(\mu,\mu_1)}{\mu}$, $\varepsilon_2=1-\frac{\min(\mu,\mu_1)}{\mu_1}$.

Используя результаты работ [3, 4, 5, 2], представим комплексные потенциалы задачи в виде

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{Q(t)dt}{t-z}, \quad \Psi_0(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\left[\frac{\overline{Q(t)}d\bar t}{t-z}+\frac{\bar t\,Q(t)dt}{(t-z)^2}\right]$$

$$\Phi_1(z)=\frac{he^{i\alpha}}{\pi(1+\varkappa)}\int\limits_{-l}^{l}\frac{K'(t)+\frac{\mu}{\mu_1}M'(t)}{T-z}dt \tag{7}$$

$$\Psi_1(z)=\frac{he^{-i\alpha}}{\pi(1+\varkappa)}\int\limits_{-l}^{l}\left[\frac{-\varkappa\overline{K'(t)}+\frac{\mu}{\mu_1}\overline{M'(t)}}{T-z}-\frac{Te^{2i\alpha}\left[K'(t)+\frac{\mu}{\mu_1}M'(t)\right]}{(T-z)^2}\right]dt$$

где $T=te^{i\theta}+z_0$, $Q(t)$ — неизвестная комплекснозначная функция. Отметим при этом, что выбор комплексных потенциалов в виде (7) позволяет тождественно удовлетворить соотношения (5).

Подставляя выражения для функций $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$ $(j=0,\ 1)$ в условия (6) и используя известные результаты для граничных значений интегралов типа Коши [4], получим систему трех сингулярных интегродифференциальных уравнений для определения неизвестных функций скачка

$$a\overline{Q(\theta)}-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}[L_{11}(\tau,\theta)Q(\tau)+L_{12}(\tau,\theta)\overline{Q(\tau)}]d\tau-\frac{h}{l\pi(1+\varkappa)}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}[L_{13}(\xi,\theta)M'(\xi)+L_{14}(\xi,\theta)\overline{M'(\xi)}+L_{15}(\xi,\theta)K'(\xi)+L_{16}(\xi,\theta)\overline{K'(\xi)}]d\xi=$$

$$=p_1(\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

$$\frac{1}{1+\varkappa_1}[(1-\varkappa_1)K(\eta)+2M(\eta)+2\overline{K(\eta)}+2\overline{M(\eta)}]-\frac{h(1-\varkappa)}{l\pi(1+\varkappa)}\int_{-1}^{1}\frac{K'(\xi)d\xi}{\xi-\eta}-$$

$$-\frac{h}{l}\frac{\mu}{\mu_1}\frac{2}{\pi(1+\varkappa_0)}\int_{-1}^{1}\frac{M'(\xi)d\xi}{\xi-\eta}+\frac{\varepsilon_1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}[L_{21}(\tau,\eta)Q(\tau)+L_{22}(\tau,\eta)\times$$

$$\times\overline{Q(\tau)}]d\tau=p_2(\eta),\quad |\eta|\leqslant 1$$

$$\frac{\mu}{\mu_1(1+\varkappa)}[2\varkappa_1K(\eta)+(\varkappa_1-1)M(\eta)-2\overline{K(\eta)}-2\overline{M(\eta)}]-\frac{h}{l}\frac{2\varkappa}{\pi(1+\varkappa)}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}\frac{K'(\xi)d\xi}{\xi-\eta}-\frac{h}{l}\frac{\varkappa-1}{\pi(1+\varkappa)}\frac{\mu}{\mu_1}\int_{-1}^{1}\frac{M'(\xi)d\xi}{\xi-\eta}+\frac{\varepsilon_2}{2\pi i}\int_0^{2\pi}[L_{31}(\tau,\eta)\times$$

$$\times Q(\tau)+L_{32}(\tau,\eta)\overline{Q(\tau)}]d\tau=p_3(\eta),\quad |\eta|\leqslant 1 \tag{8}$$

которая имеет единственное решение при выполнении условий равновесия тонкого включения и однозначности перемещений при обходе его контура

$$\int_{-1}^{1}K'(\xi)d\xi=0,\quad \int_{-1}^{1}M'(\xi)d\xi=0,\quad \mathrm{Im}\int_{-1}^{1}\xi K'(\xi)d\xi=0 \tag{9}$$

В соотношениях (8), (9) введены обозначения

$$L_{11}(\tau,\theta)=c\left[1-\frac{\omega'(\theta)}{\overline{\omega'(\theta)}}\frac{\overline{\omega(\tau)}-\overline{\omega(\theta)}}{\omega(\tau)-\omega(\theta)}\right]\frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)-\omega(\theta)}$$

$$L_{12}(\tau,\theta)=-\left[k+c\frac{\omega'(\theta)}{\overline{\omega'(\theta)}}\frac{\overline{\omega(\tau)}-\overline{\omega(\theta)}}{\omega(\tau)-\omega(\theta)}\right]\frac{\overline{\omega'(\tau)}}{\overline{\omega(\tau)}-\overline{\omega(\theta)}}$$

$$L_{13}(\xi,\theta)=c\frac{\mu}{\mu_1}\left[1-\frac{\omega'(\theta)}{\overline{\omega'(\theta)}}\frac{\overline{T}-\overline{\omega(\theta)}}{T-\omega(\theta)}\right]\frac{e^{i\alpha}}{T-\omega(\theta)}$$

$$L_{14}(\xi,\theta)=\frac{\mu}{\mu_1}\left[b+c\frac{\omega'(\theta)}{\overline{\omega'(\theta)}}\frac{\overline{T}-\overline{\omega(\theta)}}{T-\omega(\theta)}\right]\frac{e^{-i\alpha}}{\overline{T}-\overline{\omega(\theta)}}$$

$$L_{15}(\xi,\theta)=c\left[1-\frac{\omega'(\theta)}{\overline{\omega'(\theta)}}\frac{\overline{T}-\overline{\omega(\theta)}}{T-\omega(\theta)}\right]\frac{e^{i\alpha}}{T-\omega(\theta)}$$

$$L_{16}(\xi,\theta)=\left[b-c\mu\frac{\omega'(\theta)}{\overline{\omega'(\theta)}}\frac{\overline{T}-\overline{\omega(\theta)}}{T-\omega(\theta)}\right]\frac{e^{-i\alpha}}{\overline{T}-\overline{\omega(\theta)}}$$

$$L_{21}(\tau,\eta)=\left[1+e^{-2i\alpha}\frac{\omega(\tau)-X}{\overline{\omega(\tau)}-\overline{X}}\right]\frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)-X}$$

$$L_{22}(\tau,\eta)=\left[1-e^{-2i\alpha}\frac{\omega(\tau)-X}{\overline{\omega(\tau)}-\overline{T}}\right]\frac{\overline{\omega'(\tau)}}{\overline{\omega(\tau)}-\overline{X}}$$

$$L_{23}(\tau,\eta)=\left[-\varkappa+e^{-2i\alpha}\frac{\omega(\tau)-X}{\overline{\omega(\tau)}-\overline{X}}\right]\frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)-X}$$

$$L_{24}(\tau,\eta)=\left[-1+e^{-2i\alpha}\frac{\omega(\tau)-X}{\overline{\omega(\tau)}-\overline{X}}\right]\frac{\overline{\omega'(\tau)}}{\overline{\omega(\tau)}-\overline{X}}$$

$$\omega(\theta)=a(\cos\theta+i\varepsilon\sin\theta),\quad \varepsilon=b/a,\quad T=l\xi e^{i\alpha}+z_0,\quad X=l\eta e^{i\alpha}+z_0$$

$$a=\frac{1}{2}\left[\varkappa_0+1+\frac{\mu_0}{\mu}(\varkappa+1)\right],\; b=\frac{\mu_0}{\mu}\varkappa-\varkappa_0,\quad c=1-\frac{\mu_0}{\mu}$$

$$p_1(\theta)=b\overline{\Phi_0(\theta)}+c\Phi_0(\theta)+c\frac{\omega'(\theta)}{\overline{\omega'(\theta)}}\left[\overline{\omega(\theta)}\,\Phi_0'(\theta)+\Psi_0(\theta)\right]$$

$$\begin{pmatrix}p_1(\eta)\\ p_2(\eta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \varkappa\end{pmatrix}\Phi_0(X)+\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\overline{\Phi_0(X)}+\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{-2i\alpha}\left(X\overline{\Phi_0'(X)}+\right.$$

$$\left.+\overline{\Psi_0(X)}\right)-2i\gamma\frac{\mu}{\mu_0}\delta_{2n}$$

Дискретизуя систему сингулярных интегродифференциальных уравнений (8) и условий (9) с использованием численного метода механических квадратур [4], приходим к системе линейных алгебраических уравнений. Решив ее, можно определить напряженно-деформированное состояние в произвольной точке пластины.

Для случая растяжения пластины равномерно распределенными усилиями N_1, N_2 $\left(\Phi_0(z)\equiv\Gamma=\frac{1}{4}(N_1+N_2),\ \Psi_0(z)\equiv\Gamma'=-\frac{1}{2}(N_1-N_2)e^{-2i\beta},\right.$ $\left.\beta\text{—угол между направлением усилия } N_1 \text{ и осью } x\right)$ был проведен численный анализ решения задачи. Для определения коэффициентов интенсивности напряжений K_i $(i=\overline{1,4})$ в вершинах включения использовались формулы

$$K_1^j - iK_2^j = \frac{\mu}{\mu_0}\Sigma_1, \quad K_3^j - iK_4^j = \Sigma_3$$

$$\Sigma_k = \frac{2h}{\sqrt{l}(1+\varkappa)}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(-1)^m u_{km}\left(\mathrm{ctg}\frac{2m-1}{4M}\pi\right)^{(2j-3)}, \quad k=1,3$$

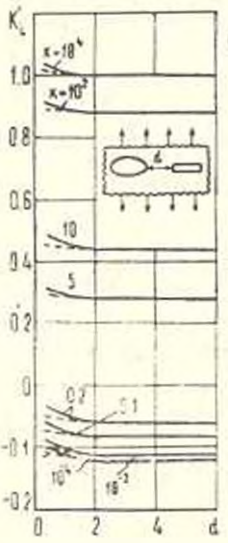
$$\begin{pmatrix} u_{1m} \\ u_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M'(t_m) \\ K'(t_m) \end{pmatrix}\sqrt{1-t_m^2}, \quad t_m = \cos\frac{2m-1}{2M}\pi$$

Здесь $j=1$ для левого конца, $j=2$ для правого конца (в локальной системе координат), M—число узлов интерполяции, четное натуральное число.

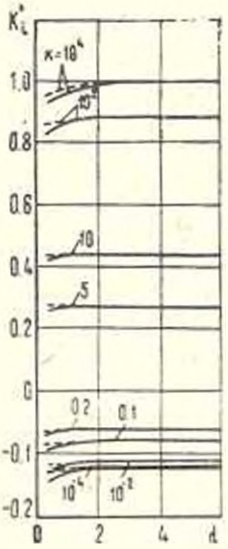
Кроме того, в случае эллиптического отверстия, напряжения на его контуре определялись на основании соотношения

$$\sigma_\theta = 4\mathrm{Re}\left[\Gamma - \frac{1}{2}Q(\theta) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{Q(\tau)\omega'(\tau)d\tau}{\omega(\tau)-\omega(\theta)}\right]$$

Вычисления проводились при следующих значениях безразмерных параметров: $y_0/l=0$; $h/l=0.1$; $a/l=1$; $\varkappa_0=\varkappa_1=\varkappa=2$; $N_2=0$, $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$. При этом, как тестовая, вначале рассматривалась задача о растяжении пластины с круглой шайбой и тонким включением. Полученные результаты численного расчета сравнивались с результатами работы [6], где при решении этой же задачи использован иной подход. Установлено, что для коэффициентов интенсивности напряжений максимальная относительная ошибка не превышает 3%.

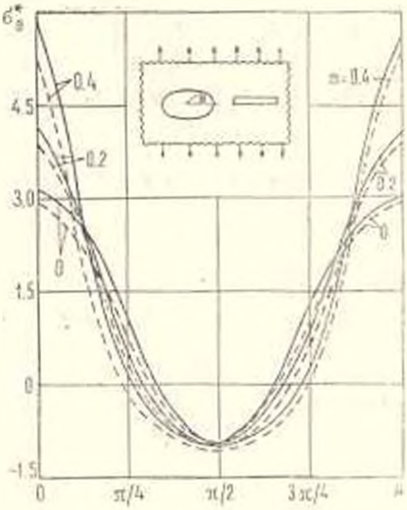


Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2, 3 представлены зависимости приведенных коэффициентов интенсивности напряжений $K_i^1 = K_i/(\sqrt{l}N_1)$ в вершинах включения от расстояния d при $m=(1-b/a)/(1+b/a)=0.5$ и различных относительных жесткостях тонкого включения. На фиг. 2 относительная жесткость шайбы μ_0/μ равна 0,2, а на фиг. 3 — $\mu_0/\mu=5$. Сплошными линиями показаны значения коэффициентов интенсивности напряжения в ближней к шайбе вершине включения, штриховыми — в дальней. В верхней части рисунка при ординатах больше нуля приведены графики для K_1, в нижней — для K_2, при этом $K_2=K_1=0$. Из рассмотрения приведенных численных результатов видно, что шайба незначительно влияет на концентрацию напряжений в окрестности вершин включения, так на расстоянии между ними равном 1,5 полудлинам прослойки взаимодействие прекращается.



Фиг. 4

Распределение напряжений $\sigma_\theta^*=\sigma_\theta/N_1$ по контуру отверстия при $x_0/l=3$ и различных значениях m показано на фиг. 4. Сплошные линии построены для пластины с отверстием и трещиной, штриховые — для пластины только с отверстием. Для упругого включения исследуемые зависимости лежат между сплошной и штриховой линиями, при этом следует отметить, что в заданном случае взаимного расположения прослойки и отверстия наличие включения, материал которого жестче материала матрицы, не приводит к перераспределению концентрации напряжений на контуре последнего, то есть искомые зависимости представляются на фиг. 4 штриховыми линиями.

STRESS DISTRIBUTION IN THE PLATE WITH AN ELLIPTICAL WASHER AND STRAIGHT THIN ELASTIC INCLUSION

D. V. GRILITSKI, V. K. OPANASOWITH, I. O. TISOWSKI

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ ՈՒՂՂԱԳԻԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԲԱՐԱԿ ՆԵՐԴՐԱԿ ԵՎ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՏԱՓՕՂԱԿ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՍԱԼՈՒՄ

Դ. Վ. ԳՐԻԼԻՑԿԻ, Վ. Կ. ՕՊԱՆԱՍՈՎԻՉ, Լ. Օ. ՏԻՍՈՎՍԿԻ

Ամփոփում

Դիտարկված է կամայական ձևով տեղադրված էլիպտական տափօղակ և ուղղագիծ բարակապատ առաձգական ներդրակ պարունակող անվերջ սալում լարվածային դեֆորմացված վիճակը որոշելու խնդիրը։ Կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության մեթոդների օգնությամբ խնդիրը բերվում է երկու սինգուլյար ինտեգրադիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի։ Ստացված համակարգի թվային լուծումը կատարված է մեխանիկական քառակուսացման մեթոդով։

Խնդրի տարբեր պարամետրերի համար կատարված է բարակ ներդրակի գագաթներում լարումների ինտենսիվության գործակիցների և էլիպտական անցքի եզրագծով լարումների բաշխման թվային մանրամասն հետազոտում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.—М.: Наука, 1966, 707 с.
2. *Драган М. С., Опанасович В. К.* Напряженное состояние полосы (балки) с прямолинейным тонкостенным включением.—Прикл. математика и механика, 1979, *43*, №2, с. 342—348.
3. *Theocaris P. S., Joakimidis N. Y.* The inclusion problem in plane elasticity.—Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1977, 30, № 4, p. 437—448.
4. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.—Киев: Наук. думка, 1981, 324 с.
5. *Григолюк Э. И., Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А.* Об одном подходе к исследованию сингулярных полей напряжений в кусочно-однородной среде с ветвящимися разрезами.—Докл. АН СССР, 1981, *261*, №3, с. 567—570.
6. *Грилицкий Д. В., Опанасович В. К., Тисовский Л. О.* Упругое состояние пластины с круглой шайбой и прямолинейным тонким упругим включением.—Прикл. математика и механика, 1982, *46*, №6, с. 993—1000.

Львовский государственный университет
им. Ив. Франко

Поступила в редакцию
13.V.1987