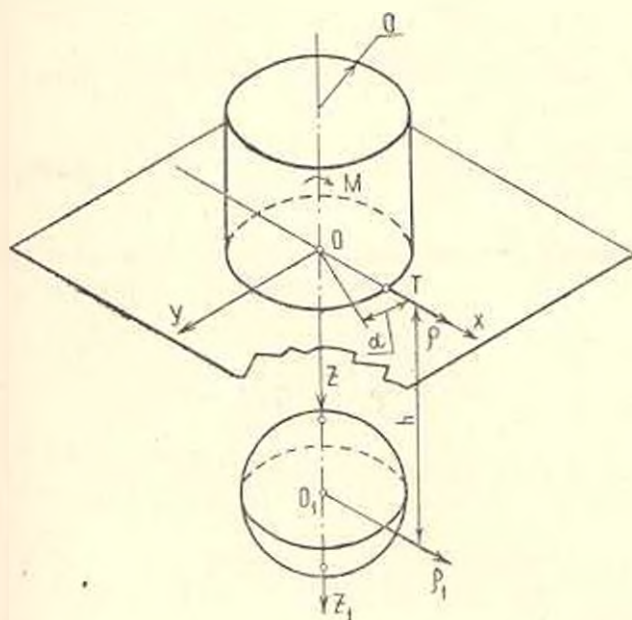


УДК 539.3

КРУГЛЫЙ ПЛОСКИЙ ШТАМП СО СЦЕПЛЕНИЕМ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ШАРОВОЙ ПОЛОСТЬЮ

ПРОЦЕНКО В. С.

Задача о взаимодействии круглого штампа с упругим однородным полупространством в условиях полного сцепления изучалась в [1—3]. В [4] рассматривалась аналогичная задача для линейно-деформируемого основания. Авторы работы [5] исследовали близкую задачу о контакте двух слоев из различных материалов с учетом сцепления. В настоящей работе предложен метод решения задачи для плоского круглого штампа, сцепленного с упругим полупространством с шаровой полостью. Штамп предполагается нагруженным силой T , в плоскости его основания (в направлении оси ox) и моментом M в плоскости осевого сечения штампа (фиг. 1). Поверхность шаровой полости свободна от нагрузки.



Фиг. 1

Приведенные ниже формулы перехода в решениях уравнения Ламе от сферических координат к цилиндрическим и им обратные позволили свести задачу к совокупности пяти бесконечных систем, допускающих применение метода редукции.

1. Введем сферические решения уравнения Ламе в виде [6]

$$\begin{aligned}\vec{U}_{l,n}^{\pm} &= \text{grad } u_{n\pm 1,l}^{\pm} \\ \vec{U}_{2,n}^{\pm} &= (z \text{grad} + r \vec{e}_z) u_{n,l}^{\pm} - \frac{R^2 \left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right)}{2(n+1) \pm 1} \text{grad } u_{n\pm 1,l}^{\pm}\end{aligned}\quad (1.1)$$

$\vec{U}_{3,n}^{\pm} = \text{rot}(\vec{e}_z u_{n\pm 1,l}^{\pm})$, R — радиус шара, $\nu = 4\nu - 3$, ν — коэффициент Пуассона,

на, $u_{n,l}^{\pm} = r^{\mp n - \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}} P_n^l(\cos \vartheta) \cos \varphi$, $u_{n,l}^{\pm} = r^{\mp n - \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}} P_n^l(\cos \vartheta) \sin \varphi$.

Кроме того, нам понадобятся решения в цилиндрической системе

$$\begin{aligned}\vec{V}_{l,1}^{\pm} &= -\frac{1}{l} \text{grad } v_l^{\pm}, \quad \vec{V}_{2,1}^{\pm} = -(z \text{grad} + r \vec{e}_z) v_l^{\pm}, \quad \vec{V}_{3,1}^{\pm} = -\frac{1}{l} \text{rot}(\vec{e}_z v_l^{\pm}) \\ v_l^{\pm} &= J_l(\rho) e^{\pm i l \varphi} \cos \varphi, \quad v_l^{\pm} = J_l(\rho) e^{\pm i l \varphi} \sin \varphi\end{aligned}\quad (1.2)$$

Имеют место формулы разложения внешних решений для шаровых решений (1.2)

$$\begin{aligned}\vec{U}_{l,n}^{\pm} &= \frac{(-1)^n}{(n-2)!} \int_0^{\pi} \vec{V}_{l,1}^{\pm}(\vartheta, z, \varphi; i) d\vartheta \\ \vec{U}_{2,n}^{\pm} &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^{\pi} \left(\vec{V}_{2,1}^{\pm} + \frac{i^2 R^2}{2n+3} \vec{V}_{l,1}^{\pm} \right) d\vartheta \\ \vec{U}_{3,n}^{\pm} &= \frac{(-1)^n}{(n-2)!} \int_0^{\pi} \vec{V}_{3,1}^{\pm}(\vartheta, z, \varphi; i) d\vartheta, \quad (z < 0)\end{aligned}\quad (1.3)$$

Они получены непосредственным вычислением с использованием формулы 6.621 из [7]. Другая группа формул (обратные разложения) имеют вид

$$\begin{aligned}\vec{V}_{0,1}^{\pm} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm i)^k}{(k+2)!} \vec{U}_{0,1}^{\pm}(r, \vartheta, \varphi) \\ \vec{V}_{2,1}^{\pm} &= \sum_{k=0}^{\infty} (\pm i)^{k+1} \frac{i^2}{(k+1)!} \left(\vec{U}_{2,1}^{\pm} + \frac{i^2 R^2}{(k+2)(2k+3)} \vec{U}_{0,1}^{\pm} \right) \\ \vec{V}_{3,1}^{\pm} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm i)^k}{(k+2)!} \vec{U}_{3,1}^{\pm}(r, \vartheta, \varphi)\end{aligned}\quad (1.4)$$

Эти разложения получены путем применения формулы 30 стр. 178 из [8] к решениям (1.2).

2. Будем решать поставленную задачу в цилиндрической и сферической системах координат. Краевые условия имеют вид

$$\tau_{rz}(\rho, 0, \varphi) = \tau_{\varphi z}(\rho, 0, \varphi) = \tau_{rz}(\rho, 0, \varphi) = 0 \quad (\rho > a) \quad (2.1)$$

$$u_r(\rho, 0, \varphi) = u_{\vartheta} \cos \varphi, \quad u_{\varphi}(\rho, 0, \varphi) = \tau_{\vartheta} \cos \varphi, \quad u_r(\rho, 0, \varphi) = -u_{\vartheta} \sin \varphi \quad (\rho < a) \quad (2.2)$$

$$\vec{F}_n = e_r F_r + e_\theta F_\theta + e_z F_z = 0 \quad (r_1 = R, n = e_r) \quad (2.3)$$

Здесь u_0 — жесткое смещение штампа вдоль оси ox , $\gamma = \gamma x$, z — угол поворота штампа вокруг оси oy , R — радиус шаровой полости. Параметры u_0 и γ определяются из условий равновесия штампа. Полагаем, что перемещения исчезают на бесконечности. $\vec{F}_n$ — усилия на поверхности шара.

Решение задачи ищем в виде

$$\vec{u} = \int_0^\infty \sum_{m=1}^\infty A_m(\lambda) \vec{V}_{m,1}(\rho, z, \varphi; \lambda) d\lambda = \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^3 a_n^{(m)} R^n \vec{U}_{m,n}(r_1, \theta_1, \varphi) \quad (2.4)$$

где (r_1, θ_1, φ) — локальная сферическая система координат, связанная с центром шара (фиг. 1). В окрестности границы $z=0$ решение (2.4) представим в интегральной форме с помощью формул (1.3).

Имеем

$$\vec{u} = \int_0^\infty \sum_{m=1}^\infty [A_m(\lambda) \vec{V}_{m,1}(\rho, z, \varphi; \lambda) + \Psi_m(\lambda) \vec{V}_{m,1}(\rho, z_1, \varphi; \lambda)] d\lambda$$

где обозначено

$$\Psi_1(\lambda) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n (\lambda R)^n}{(n-1)!} \left[a_n^{(1)} - \frac{\lambda^2 R^2}{2n+3} a_n^{(2)} \right]$$

$$\Psi_2(\lambda) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1} (\lambda R)^n}{(n-1)!} a_n^{(2)}, \quad \Psi_3(\lambda) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-\lambda R)^n}{(n-1)!} a_n^{(3)}$$

Краевые условия под штампом (2.2) приводят к равенствам ($\rho < a$)

$$\int_0^\infty [A_1 + A_3 + e^{-\lambda h} (\Psi_1 - \lambda h \Psi_2 + \Psi_3)] J_0(\lambda \rho) d\lambda = -2u_0$$

$$\int_0^\infty [A_1 - A_3 + e^{-\lambda h} (\Psi_1 - \lambda h \Psi_2 - \Psi_3)] J_2(\lambda \rho) d\lambda = 0$$

$$\int_0^\infty [A_1 - \lambda A_3 - e^{-\lambda h} (\Psi_1 + (\lambda - 1)h \Psi_2)] J_1(\lambda \rho) d\lambda = \gamma \rho$$
(2.5)

Краевые условия для напряжений (2.1) приводят к равенствам

$$\int_0^\infty H_0(\lambda) J_1(\lambda \rho) \lambda d\lambda = (2G)^{-1} \tau_z(\rho, 0) = \begin{cases} p(\rho) & (\rho < a) \\ 0 & (\rho > a) \end{cases}$$

$$\int_0^a (H_1 + H_2) J_0(\lambda \varphi) \lambda d\lambda = (2G)^{-1} [\tau_{\varphi 1}(\varphi, 0) + \tau_{\varphi 2}(\varphi, 0)] = \begin{cases} 2\tau^+(\varphi) & (\varphi < a) \\ 0 & (\varphi > a) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\int_0^a (H_2 - H_1) J_2(\lambda \varphi) \lambda d\lambda = (2G)^{-1} [\tau_{\varphi 2}(\varphi, 0) - \tau_{\varphi 1}(\varphi, 0)] = \begin{cases} 2\tau^-(\varphi) & (\varphi < a) \\ 0 & (\varphi > a) \end{cases}$$

G — модуль сдвига. Функции H_j ($j=0, 1, 2$) имеют вид

$$\begin{aligned} H_0 &= A_1 - 2(\sigma - 1)A_2 + e^{-\lambda h} [\Psi_1 + (2\sigma - 2 - \lambda h)\Psi_2] \\ H_1 &= -A_1 + (2\sigma - 1)A_2 + e^{-\lambda h} [\Psi_1 + (2\sigma - 1 - \lambda h)\Psi_2] \\ H_2(\lambda) &= -\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}\Psi_2 e^{-\lambda h} \end{aligned}$$

Переход к плоской задаче осуществляется с помощью операторов преобразования [5]. Вместо функций $p(\varphi)$, $\tau_{\pm}(\varphi)$ вводим новые функции

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{2}{\pi} x \int_x^a \frac{p(t) dt}{t \sqrt{t^2 - x^2}}, \quad r(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{\tau^-(t) dt}{t \sqrt{t^2 - x^2}} \\ q(x) &= \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{\tau^-(t)(t^2 - 2x^2)}{t \sqrt{t^2 - x^2}} dt \end{aligned} \quad (2.7)$$

которые продолжим на промежутке $(-a, 0)$ по формулам

$$S(-x) = -S(x), \quad r(-x) = r(x), \quad q(-x) = q(x).$$

Уравнения плоской задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A_1 \cos \lambda x d\lambda &= \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad \int_0^{\infty} A_2 \cos \lambda x d\lambda = \frac{1}{2}(f_1 - f_2) \\ \int_0^{\infty} (A_1 - \kappa A_2) \sin \lambda x d\lambda &= f_3(x), \quad (|x| < a) \end{aligned} \quad (2.8)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_0^{\infty} (\lambda h \Psi_2 - \Psi_1 - \Psi_2) e^{-\lambda h} \cos \lambda x d\lambda - 2u_0 \\ f_2(x) &= 2c_0 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda h} (\Psi_1 - \lambda h \Psi_2 - \Psi_2) \cos \lambda x d\lambda \\ f_3(x) &= 2\gamma x + \int_0^{\infty} e^{-\lambda h} [\Psi_1 + (\kappa - \lambda h) \Psi_2] \sin \lambda x d\lambda \end{aligned} \quad (2.9)$$

Функции $A_n(\lambda)$ представим с учетом (2.7) в виде

$$A_1 = \int_{-a}^a \left[(\sigma-1)h(x)\cos ix - \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) S(x)\sin ix \right] dx - e^{-\lambda h} (\kappa \Psi_1 + m \Psi_2)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{-a}^a [h(x)\cos ix - S(x)\sin ix] dx - e^{-\lambda h} [2\Psi_1 + (\kappa-2\lambda h)\Psi_2] \quad (2.10)$$

$$A_3 = - \int_{-a}^a [r(x) + q(x)] \cos ix dx + \Psi_3 e^{-\lambda h}$$

$$m = 2(\sigma-1)(2\sigma-1-i\lambda h) + (2\sigma-1)(2\sigma-2-i\lambda h)$$

Из второго уравнения (2.8) находим

$$r + q = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} (f_2 - f_1) + \int_0^{\infty} \Psi_3 e^{-i\lambda h} \cos ix d\lambda \right] \quad (2.11)$$

а первое и третье уравнения системы (2.8) приводят к сингулярному уравнению для функции $w = S + i(r-q)$

$$w(x) + i0 \int_{-a}^a \frac{w(t)}{x-t} dt = \varphi(x) \quad (|x| < a) \quad (2.12)$$

$$\varphi = \frac{1-2\sigma}{2-(1-\sigma)}, \quad \varphi(x) = \pi^{-1} (1-\sigma)^{-1} \left\{ 2\gamma x + i(u_0 - c_0) + \right.$$

$$\left. + i(1-\kappa) \int_0^{\infty} \Psi_3 e^{-i\lambda(h+\lambda x)} d\lambda - \int_0^{\infty} e^{-\lambda h} [i(m + \lambda h)e^{i\lambda x} + \right.$$

$$\left. + (\kappa^2 + 2\kappa\lambda h + i\lambda h)\sin ix] d\lambda \right\}$$

Постоянная c_0 , возникшая в результате интегрирования, находится из равенства

$$c_0 = \pi [r(0) + q(0)] - 2 \int_0^{\infty} \Psi_3 e^{-\lambda h} d\lambda - u_0 \quad (2.13)$$

В заключение этого пункта отметим, что функции $\pm(\rho)$, $p(\rho)$ находятся в результате обращения равенств (2.7). Имеем

$$p^{\pm}(\rho) = - \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^a \frac{x r(x) dx}{\sqrt{x^2 - \rho^2}}, \quad p(\rho) = \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^a \frac{S(x) dx}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} \quad (2.14)$$

$$\tau^+(p) = p \frac{d}{dp} \int_0^p (x^2 - p^2)^{-\frac{1}{2}} d \left(x^{-1} \int_0^x q(u) du \right)$$

Формула для функции $\tau^+(p)$ получена в предположении ее интегрируемости на $(0, a)$.

3 Вектор $\vec{u}$ в окрестности шаровой полости представим с помощью формул (1.4) в виде, удобном для удовлетворения краевых условий при $r_1=R$

$$\vec{u} = \sum_{m=1}^3 \left[\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(m)} \vec{U}_{m,k}^-(r_1, \theta_1, \varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(m)} R^k \vec{U}_{m,k}^+(r_1, \theta_1, \varphi) \right]$$

где обозначено

$$B_k^{(1)} = \frac{(-1)^k}{(k+2)!} \int_0^{\pi} e^{-ik\varphi} \left[A_1 - \frac{\lambda^2 R^2 A_2}{(k+2)(2k+3)} \right] k^k d\varphi, \quad (3.1)$$

$$B_k^{(j)} = \frac{(-1)^{k+j+1}}{(k+2)!} \int_0^{\pi} k^k e^{-ik\varphi} A_j(\varphi) d\varphi, \quad (j=2, 3)$$

Условия на поверхности шара (2.3) приводят к равенствам

$$a_k^{(m)} = \sum_{r=1}^3 B_k^{(r)} \omega_{kr}^{(m)}, \quad (m=1, 2, 3; k \geq 1), \quad \omega_{kr}^{(m)} = R^{2k+1} \omega_{kr}^{(r)}, \quad a_0^{(1)} = a_0^{(3)} \quad (3.2)$$

Формулы для величин $\omega_{kr}^{(m)}$ выписывать не будем из-за их громоздкости. Отметим лишь, что они являются рациональными функциями переменной k .

Если в (3.2) подставить величины $B_k^{(m)}$, определенные равенствами (3.1), то с учетом (2.10) найдем

$$a_k^{(m)} = \int_0^{\pi} \{ h(x) H_{k1}^{(m)}(x) + S(x) H_{k2}^{(m)}(x) + R(x) H_{k3}^{(m)}(x) \} dx + \delta_k^{(m)}, \quad (m=1, 2, 3; k \geq 1) \quad (3.3)$$

где обозначено $R=r+q$, $h=r-q$

$$H_{k1}^{(m)}(x) = \frac{R^k}{(k+2)!} \int_0^{\pi} (M_{k1}^{(m)} + \lambda^2 M_{k2}^{(m)}) k^k e^{-ik \cos x} dx,$$

$$H_{k2}^{(m)}(x) = \frac{R^k}{(k+2)!} \int_0^{\pi} (N_{k1}^{(m)} - \lambda^2 M_{k2}^{(m)}) k^k e^{-ik \sin x} dx,$$

$$H_{k3}^{(m)}(x) = \frac{R^k}{(k+2)!} T_k^{(m)} \int_0^x e^{-\lambda h} \lambda^k \cos \lambda x d\lambda$$

$M_k^{(m)}, \dots, T_k^{(m)}$ —двучленные линейные комбинации величин $\omega_{kp}^{(m)}$. Внеинтегральный член $\mathcal{G}_k^{(m)}$ зависит от $a_k^{(m)}$ и имеет вид

$$\mathcal{G}_k^{(m)} = \sum_{p=1}^n \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} \Omega_{kn}^{(m,p)}$$

Выражений для $\Omega_{kn}^{(m,p)}$ не приводим из-за их громоздкости. Отметим лишь, что имеют место оценки

$$|\Omega_{kn}^{(m,1)}| \leq C_1 \frac{\varepsilon^{n+k+2} (n+k+2)!}{(n-1)!(k+2)!}, \quad |\Omega_{kn}^{(m,2)}| \leq C_1 \frac{\varepsilon^{k+n+1} (n+k+4)!}{n! (k+2)!}$$

$$|\Omega_{kn}^{(m,3)}| \leq C_2 \frac{\varepsilon^{k+k} (n+k)!}{(n-1)!(k+2)!}, \quad \varepsilon = \frac{R}{2h}$$

Константы C_p ($p=1, 2, 3$) не зависят от n и k .

4. Система уравнений (2.11), (2.12) и (3.3) вместе с уравнением (2.13) является разрешающей системой исходной задачи. К решению этой системы применим метод ортогональных многочленов [4]. Незвестные функции $R(x)$ и $\omega(x)$ представим рядами

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k P_k\left(\frac{x}{a}\right), \quad \omega(x) = \gamma_1(x) \sum_{k=0}^{\infty} Y_k P_k^{(-1,1)}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (4.1)$$

$$x = i\mu, \quad \mu = \frac{1}{2\pi} \ln(3-4\sigma), \quad \gamma_1(x) = (a-x)^{-1} (a+x)^{-1}$$

$P_k^{(-1,1)}(t)$ и $P_k(t)$ —полиномы Якоби и Лежандра, соответственно.

Стандартная процедура метода ортогональных многочленов приводит к совокупности пяти бесконечных систем линейных уравнений для коэффициентов разложений (4.1) и (2.4), которую запишем в виде одного матричного уравнения

$$Y = AY + B \quad (4.2)$$

где Y и B —матрицы столбцы неизвестных коэффициентов и свободных членов, A —матрица системы.

Учитывая оценки для $\Omega_{kn}^{(m,p)}$, можно показать, что при $R < h$ оператор уравнения (4.2) действует вполне непрерывно из l_2^* в l_2^* , где l_2^* —гильбертово комплексное пространство числовых последовательностей. Элементы матрицы B также принадлежат этому пространству. Решение такой системы, принадлежащее l_2^* , можно найти методом редукции [9].

Отметим, что при $h \rightarrow \infty$ имеем точное решение задачи для сплошного полупространства [1, 2]. Как и в случае сплошного полупространства, напряжения под штампом имеют корневую особенность, умно-

женную ия осциллирующие множители $\cos \mu \ln(a-r)$, $\sin \mu \ln(a-r)$. При решении бесконечных систем следует учесть равенства $\operatorname{Re} Y_{2k} \parallel = \ln Y_{2k+1} = 0$, которые вытекают из (4.1), свойств полиномов Якоби и четности функций $S(x)$ и $h(x)$. Аналогично может быть решена контактная задача для упругого слоя с шаровой полостью или с упругим (жестким) шаровым ядром.

ROUND PLANE STAMP WITH ADHESION ON ELASTIC HALFSPACE WITH SPHERICAL CAVITY

V. S. PROTZENKO

ԳՆԴԱՅԻՆ ԽՈՌՈՋՈՎ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱՇՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ
ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ՀԱՐԹ ԿՈՐ ԿՐՈՇՄՐ

Վ. Ս. ՊՐՈՇԵՆԿՈ

И. д. ф. и. ф. н. и. д.

Հարթ զրոշմի համար ոչ առանցքառիմետրիկ կոնտակտային խնդիրը բերված է հինգ դժարին հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգի համախմբության, որոնց համար կիրառելի է ուղղակի մեթոդը: Այստեղ էական դեր են խաղում կամերի հավասարումների վեկտորական լուծումների գլանային կոորդինատական համակարգից դնդալների վերափոխումության բանաձևերը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Московский В. И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела краевых условий.—ПММ, 1954, т. 18, в. 2.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования и задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402 с.
3. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблин А. А. О симметричном давлении круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления.—ПММ, 1966, т. 30, в. 1.
4. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
5. Абрамян Б. Л., Макарян В. С. Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями из различных материалов с учетом трения между слоями.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1976, т. 29, №5, с. 3—14.
6. Проценко В. С., Николаев А. Г. Первая осевая осесимметричная задача теории упругости для слоя со сферической полостью. Математические методы анализа динамических систем, Харьков, 1983, в. 7.
7. Грештейн И. С., Рыжик Н. М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
8. Вейсман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т. 2. М.: Наука, 1966. 296 с.
9. Канторонич Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Харьковский авиационный институт
им. Н. Е. Жуковского

Поступила в редакцию
3.IV.1986