ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 4, 1988 Механика

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ТОКОНЕСУЩЕГО ЦИЛИНДРА

КАЗАРЯН К. Б., КАЗАРЯН Р. А.

Вопросы, относящиеся к определению электродинамических напряжений в токонесущих соленоидах и в проводах электрического тока, обсуждены в работах [1, 2].

В этих работах при расчете механических напряжений предполагалось равномерное распределение тока по толщине проводника.

Здесь на примере токонесущего бесконечного упругого полого цилиндра определены окружные и радиальные напряжения в случае сверхпроводящего тока, подчиняющегося известным уравнениям Лондонов [3,4].

Проведено сравнение полученных результатов со случаями постоянного однородного электрического тока. В предельном случае, когда радиус внутренней окружности цилиндра стремится к нулю, получены результаты для сплошного цилиндра.

1. По своим магнитным свойствам сверхпроводник отличается от обычного проводника тем, что магнитное поле не проникает в толщу сверхпроводника (эффект Мейссиера и Оксенфельда). При этом обычно принимается, что ток в сверхпроводнике является поверхностным и вследствие этого пондеромоторная сила Ампера, действующая на сверхпроводник, является поверхностной силой. В дальнейшем было экспериментально показано, что ток в сверхпроводнике фактически протекает в очень тонком поверхностном слое толщиной порядка $\lambda \sim 10^{-4}$ см. Распределение объемного тока и магнитного поля в сверхпроводнике определяется на основе уравнений Лондонов [3—4].

Рассмотрим бесконечный полый цилиндр с радиусами внешней окружности R и внутренней окружности r, по которому протекает сверхпроводящий электрический ток силы J_0.

Уравнения Максвелла для стационарного поля имеют вид

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\bar{j}; \quad \mathrm{div}\,\bar{B} = 0 \tag{1.1}$$

Связь между магнитным полем и плотностью сверхтока задается следующими уравнениями Лондонов, пришедшими на смену закону Ома для обычного проводника:

$$\frac{4\pi\lambda^2}{c}\,\mathrm{rot}\,\bar{j} + \bar{B} = 0 \tag{1.2}$$

В (1.1), (1.2) B есть вектор индукции магнитного поля, $\vec{\gamma}$ есть вектор плотности сверхтока, c—электродинамическая постоянная, λ—лондоновская глубина проникновения.

Уравнения (1.1) и (1.2) обычно решаются совместно с условием заданности полного тока

$$\oint \vec{\gamma} d\vec{s} = J_0 \tag{1.3}$$

В цилиндрической системе координат ρ, φ, z ($r \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty \leqslant z \leqslant \infty$) с учетом симметрии задачи, исходными уравнениями, определяющими распределение тока и магнитного поля, являются

$$\frac{d^2 A_z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dA_z}{d\rho} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < \rho < r \quad \text{и} \quad \rho > R$$

$$\frac{d^2 A_z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dA_z}{d\rho} - \frac{1}{\lambda^2}A_z = 0 \quad \text{при} \quad r < \rho < R$$

$$B_{0\varphi} = -\frac{dA_z}{d\rho}, \quad \gamma_z = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}A_z \tag{1.4}$$

$$A_\varphi = A_\rho = 0, \quad B_\rho = B_z = 0, \quad \gamma_\varphi = \gamma_\rho = 0$$

Условие (1.3) имеет вид

$$2\pi \int_r^R \gamma_z(\rho)\rho d\rho = J_0 \tag{1.5}$$

Решения уравнений (1.4) с учетом (1.5) в области $r \leqslant \rho \leqslant R$ имеют вид

$$A_z(\rho) = -\frac{2J_0\lambda}{Rc}\frac{M(\rho)}{B(R)}; \quad \gamma_z(\rho) = \frac{J_0}{2\pi R\lambda}\frac{M(\rho)}{B(R)}; \quad B_{0\varphi}(\rho) = \frac{2J_0}{Rc}\frac{B(\rho)}{B(R)} \tag{1.6}$$

где $M(\rho) = K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)I_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) + I_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)K_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)$; $B(\rho) = K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right) \times$

$$\times I_1\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) - I_1\left(\frac{r}{\lambda}\right) \cdot K_1\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)$$

В (1.6) I_0, I_1 есть модифицированные функции Бесселя, а K_0, K_1—функции Макдональда.

На основе асимптотического анализа модифицированных функций Бесселя и Макдональда из (1.6) следует, что при $R-r \gg \lambda$

$$\gamma_z \approx \frac{J_0}{2\pi\lambda\sqrt{R\rho}}\exp\left(-\frac{R-\rho}{\lambda}\right); \quad B_{0\varphi} \approx \frac{2J_0}{c\sqrt{R\rho}}\exp\left(-\frac{R-\rho}{\lambda}\right) \tag{1.7}$$

Это означает, что магнитное поле и электрический ток распределены в слое толщины λ при внешней поверхности цилиндра.

При $\lambda \gg R$, что формально соответствует случаю обычного проводника с постоянным током, из (1.6) имеем

$$\gamma_z(\rho) \approx \frac{J_0}{\pi(R^2-r^2)}; \quad B_{0\varphi}(\rho) \approx \frac{\rho^2-r^2}{R^2-r^2}\frac{2J_0}{c\rho} \tag{1.8}$$

В случае сплошного цилиндра ($r=0$, $0<\rho<R$) решения уравнения (1.4) с учетом (1.5) имеют вид

$$A_z=-\frac{2J_0\lambda}{Rc}\frac{I_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)}{I_1\left(\frac{R}{\lambda}\right)}; \; \gamma_z=\frac{J_0}{2\pi R\lambda}\frac{I_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)}{I_1\left(\frac{R}{\lambda}\right)}; \; B_{0\varphi}=\frac{2J_0}{cR}\frac{I_1\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)}{I_1\left(\frac{R}{\lambda}\right)} \tag{1.9}$$

На основе асимптотического анализа модифицированных функций Бесселя из (1.9) следует, что магнитное поле и электрический ток распределены в слое толщины λ, если $R \gg \lambda$.
При $\lambda \gg R$ имеем

$$\gamma_z \approx \frac{J_0}{\pi R^2}; \quad B_{0\varphi} \approx \frac{2J_0\rho}{cR^2}.$$

Эти результаты можно получить из (1.6)–(1.8) в пределе, когда $r \to 0$.

2. Вследствие взаимодействия сверхтока с собственным магнитным полем на упругий цилиндр действует сила Ампера

$$\vec{F}=\frac{1}{c}\left(\vec{\gamma}\times\vec{B}\right); \quad F_z=F_\varphi=0; \quad F_\rho=-\frac{1}{8\pi\lambda^2}\frac{dA_z^2}{d\rho} \tag{2.1}$$

Напряжения σ_ρ и σ_φ, обусловленные силой $\vec{F}$, определяются из следующих уравнений [5]:

$$\frac{d^2f}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho}-\frac{f}{\rho^2}=-kF-\rho\frac{dF}{d\rho}; \quad \sigma_\rho=\frac{f}{\rho}; \quad \sigma_\varphi=\rho\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}+\sigma_\rho+\rho F \tag{2.2}$$

В (2.2) принято обозначение:

$$k=\begin{cases} 2+\nu; & \text{плоское напряженное состояние} \\ \dfrac{2-\nu}{1-\nu} & \text{плоское деформированное состояние} \end{cases} \tag{2.3}$$

где ν — коэффициент Пауссона.

При отсутствии механических поверхностных нагрузок $\sigma_\rho(R)=0$, $\sigma_\rho(r)=0$ получим следующие решения для напряжений σ_ρ и σ_φ

$$\sigma_\rho=-\frac{1}{2}\left\{(k-1)\left[\int_r^\rho F(s)ds-\frac{\rho^2-r^2}{R^2-r^2}\frac{R^2}{\rho^2}\int_r^R F(s)ds\right]+(3-k)\left[\frac{1}{\rho^2}\int_r^\rho s^2F(s)ds-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\rho^2-r^2}{R^2-r^2}\frac{1}{\rho^2}\int_r^R s^2F(s)ds\right]\right\}$$

$$\sigma_\varphi=-\frac{1}{2}\left\{(k-1)\left[\int\limits_r^\rho F(s)ds-\frac{\rho^2+r^2}{R^2-r^2}\frac{R^2}{\rho^2}\int\limits_r^R F(s)ds\right]-(3-k)\left[\frac{1}{\rho^2}\int\limits_r^\rho s^2F(s)ds+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\rho^2+r^2}{R^2-r^2}\frac{1}{\rho^2}\int\limits_r^R s^2F(s)ds\right]\right\} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.1) в (2.4), получим

$$\sigma_\rho=-\frac{J_0^2}{4\pi c^2R^2B^2(R)}\left\{\frac{R^2}{R^2-r^2}\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2}\left[(k-1)(M^2(R)-M^2(r))+(3-k)B^2(R)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[(k-1)(M^2(\rho)-M^2(r))+(3-k)B^2(\rho)\right]\right\}$$

$$\sigma_\varphi=-\frac{J_0^2}{4\pi c^2R^2B^2(R)}\left\{\frac{R^2}{R^2-r^2}\frac{\rho^2+r^2}{\rho^2}\left[(k-1)(M^2(R)-M^2(r))+(3-k)B^2(R)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[(k-1)(M^2(\rho)-M^2(r))-(3-k)B^2(\rho)\right]\right\} \tag{2.5}$$

При $\lambda\gg R$ из асимптотического разложения функций Бесселя и Макдональда получим следующие выражения для функций σ_ρ и σ_φ, соответствующие случаю обычного проводника.

$$\bar{\sigma}_\rho=-\frac{J_0^2}{4\pi c^2\rho^2(R^2-r^2)^2}\left[(R^2-\rho^2)(\rho^2-r^2)(k+1)-\frac{4(\rho^2-r^2)r^2R^2\ln\frac{R}{r}}{R^2-r^2}\times\right.$$

$$\left.\times(k-1)+4\rho^2r^2\ln\frac{\rho}{r}(k-1)\right]$$

$$\bar{\sigma}_\varphi=-\frac{J_0^2}{4\pi c^2\rho^2(R^2-r^2)^2}\left[(k+1)R^2(\rho^2+r^2)-(3k-5)\rho^4+(k-11)\rho^2r^2-\right.$$

$$\left.-\frac{4R^2r^2(\rho^2+r^2)}{R^2-r^2}\ln\frac{R}{r}(k-1)+4\rho^2r^2\ln\frac{\rho}{r}(k-1)\right] \tag{2.6}$$

Из (2.5) получаем для σ_φ следующие значения при $\rho=r$ и $\rho=R$:

$$\sigma_\varphi(r)=-\frac{J_0^2}{2\pi c^2B^2(R)(R^2-r^2)}\left[(k-1)(M^2(R)-M^2(r))+(3-k)B^2(R)\right]$$

$$\sigma_\varphi(R)=-\frac{J_0^2}{2\pi c^2R^2B^2(R)(R^2-r^2)}\left[(k-1)r^2(M^2(R)-M^2(r))+(3-k)R^2B^2(R)\right]$$

При этом можно показать, что

$$|\sigma_\varphi(r)|>|\sigma_\varphi(R)|$$

В случае, когда $R-r\gg\lambda$, для напряжений σ_ρ и σ_φ получаем следующие выражения:

$$\sigma_\rho^* = -\frac{J_0^2}{2\pi c^2 R\rho}\left(\frac{\rho^2-r^2}{R^2-r^2}\frac{R}{\rho} - \exp\left(-\frac{2(R-\rho)}{\lambda}\right)\right)$$

$$\sigma_\varphi^* = -\frac{J_0^2}{2\pi c^2 R\rho}\left(\frac{\rho^2+r^2}{R^2-r^2}\frac{R}{\rho} - (k-2)\exp\left(-\frac{2(R-\rho)}{\lambda}\right)\right)$$

$$\sigma^*_{\varphi\max} = \sigma^*_\varphi(r) = -\frac{J_0^2}{\pi c^2(R^2-r^2)}$$

Здесь и в дальнейшем индексами $(*)$, $(\sim)$ обозначены соответствующие значения для сверхтока и обычного тока, соответственно.

При $h/R \ll 1$ имеем следующие асимптотические выражения для функции σ_φ, где $2h$ есть толщина полого цилиндра

$$\tilde\sigma_\varphi \approx -\frac{J_0^2(5-k)}{16\pi c^2 Rh} \quad \text{при} \quad \lambda \gg R,$$

$$\sigma^*_\varphi \approx -\frac{J_0^2}{4\pi c^2 Rh} \quad \text{при} \quad \lambda \ll R-r$$

Рассмотрим случай сплошного цилиндра $(r=0)$. Сила Ампера, действующая на цилиндр, равна

$$\vec F = \frac{1}{c}(\vec j\times\vec B),\quad F_z = F_\varphi = 0,\quad F_\rho = -\frac{J_0^2}{\pi\lambda R^2 c^2}\,\frac{I_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)\cdot I_1\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)}{I_1^2\left(\frac{R}{\lambda}\right)} \tag{2.7}$$

Напряжения σ_{ρ_0} и σ_{φ_0}, обусловленные силой F, определяются из уравнений (2.2). При отсутствии механической поверхностной нагрузки $\sigma_\rho(R)=0$ получим следующие решения для напряжений σ_{ρ_0} и σ_{φ_0}:

$$\sigma_{\rho_0} = \frac{1}{2}\left\{(k-1)\left[\int_0^R F(s)ds - \int_0^\rho F(s)ds\right] + (3-k)\left[\frac{1}{R^2}\int_0^R s^2F(s)ds - \frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho s^2F(s)ds\right]\right\}$$

$$\sigma_{\varphi_0} = \frac{1}{2}\left\{(k-1)\left[\int_0^R F(s)ds - \int_0^\rho F(s)ds\right] + (3-k)\left[\frac{1}{R^2}\int_0^R s^2F(s)ds + \frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho s^2F(s)ds\right]\right\} \tag{2.8}$$

Подставляя (2.7) в (2.8), получим

$$\sigma_{\rho_0} = -\frac{J_0^2}{4\pi R^2c^2 I_1^2(R)}\left\{(k-1)\left[I_0^2\left(\frac{R}{\lambda}\right) - I_0^2\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)\right] + (3-k)\left[I_1^2\left(\frac{R}{\lambda}\right) - I_1^2\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)\right]\right\}$$

$$\sigma_{\varphi_0} = -\frac{J_0^2}{4\pi R^2c^2 I_1^2\left(\frac{R}{\lambda}\right)}\left\{(k-1)\left[I_0^2\left(\frac{R}{\lambda}\right) - I_0^2\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)\right] + (3-k)\left[I_1^2\left(\frac{R}{\lambda}\right) + I_1^2\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)\right]\right\} \tag{2.9}$$

При $\lambda \gg R$ из асимптотического разложения функций Бесселя получим следующие выражения для функций σ_{ρ_0} и σ_{φ_0}, которые совпадают с результатами работы [2], полученными для случая обычного проводника с постоянным током.

$$\sigma_{\rho_0} = -\frac{J_0^2(k+1)}{4\pi c^2 R^2}\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right); \quad \sigma_{\varphi_0} = -\frac{J_0^2(k+1)}{4\pi c^2 R^2}\left(1-\frac{3k-5}{k+1}\frac{\rho^2}{R^2}\right)$$

Из (2.9) следует, что максимальные напряжения достигаются на оси цилиндра при $\rho=0$, а также, что напряжения σ_{ρ} и σ_{φ} являются напряжениями сжатия.

Из (2.9) имеем следующие выражения для максимальных значений σ_{ρ_0} и σ_{φ_0}

$$\sigma_{\rho_0}=\sigma_{\varphi_0} = -\frac{J_0^2}{4\pi c^2 R^2 I_1^2\left(\frac{R}{\lambda}\right)}\left\{(k-1)\left[I_0^2\left(\frac{R}{\lambda}\right)-1\right]+(3-k)I_1^2\left(\frac{R}{\lambda}\right)\right\}$$

При $\rho = R$ имеем

$$\sigma_{\rho_0} = 0, \quad \sigma_{\varphi_0} = -\frac{J_0^2(3-k)}{2\pi c^2 R^2}$$

Асимптотические разложения максимальных напряжений при $R \gg \lambda$ имеют вид

$$\sigma^*_{\rho_0} = \sigma^*_{\varphi_0} = -\frac{J_0^2}{2\pi c^2 R^2}$$

Сравнение результатов относительно безразмерного напряжения $\sigma = \frac{\max(\sigma^*_{\varphi})}{\max(\sigma_{\varphi})} = \frac{4}{5-k}$ для тонкого полого цилиндра показывает, что в тонкой оболочке при одинаковой силе тока механические напряжения от сверхпроводящего тока превышают напряжения постоянного тока.

В заключение приведем численные результаты для полого цилиндра относительно предельной силы сверхтока J_{0*}, соответствующей максимальному окружному напряжению $|\sigma^*_{\varphi}|$, равному пределу текучести материала. Значение $|\sigma^*|$ принято равным $6{,}85 \cdot 10^7$ Па. Рассмотрено плоско-напряженное состояние ($\nu=0{,}358$). Радиус срединной поверхности при расчетах был принят за $R_0=0{,}01$ м. При $h/R_0=0{,}75$ $h/R_0=0{,}25$, $h/R_0=0{,}1$ имеем, соответственно, $J_{0*}=805$ кА, $J_{0*}=465$ кА $J_{0*}=294$ кА.

Превышение силы тока $J>J_{0*}$ приводит к разрушению проводника.

STRESS STATE OF ELASTIC SUPERCONDUCTING CURRENT-CARRYING CYLINDER

K. B. KAZARIAN, R. A. KAZARIAN

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉ ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ԳԼԱՆԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿ

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ռ. Ա. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Այս աշխատանքում հոսանքատար առաձգական անվերջ գլանի համար որոշված են շրջանային և շառավղային մեխանիկական լարումները, որոնք պայմանավորված են հոսանքի և սեփական մագնիսական դաշտի փոխազդեցությամբ։ Հոսանքի և մագնիսական դաշտի բաշխումը տրված են Լոնդոնների հավասարումների հիման վրա։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кадовский Е. Я., Карцев В. П., Шахтарин В. Н.* Сверхпроводящие магнитные системы. М.: Наука, 1967. 323 с.
2. *Кузнецов А. А.* Механические напряжения в неподвижном и вращающемся цилиндре, нагруженном однородным электрическим током.—ЖТФ, 1960, т. 30, в. 5, с. 589—592.
3. *Шмидт В. В.* Введение в физику сверхпроводников. М.: Наука, 1982. 238 с.
4. *Гуров Е. А.* Материальные уравнения электродинамики. М.: Наука, 1983. 157 с.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.

Институт механики АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
14.I.1988