

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ВАРДАНИЯН Л. В.

Вопросы колебаний двух параллельных бесконечных пластин во внешнем продольном магнитном поле и колебаний двух бесконечных параллельных пластин обсуждены в [1—2].

В настоящей работе рассматриваются магнитоупругие колебания двух параллельных упругих прямоугольных пластин в продольном магнитном поле с постоянным вектором напряженности.

1. Пусть две упругие прямоугольные тонкие электропроводящие пластинки, каждая постоянной толщины $2h$, ширины b и длины a , расположены параллельно друг другу. Пластинки находятся во внешнем продольном магнитном поле с постоянным вектором напряженности \vec{H}_0 .

Физико-механические свойства материалов пластин предполагаются одинаковыми и характеризуются электропроводимостью σ , плотностью ρ , модулем упругости E , коэффициента Пуассона ν .

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбирается так, что координатная плоскость (x, y) параллельна пластинкам и находится между ними на расстоянии l от средних плоскостей пластинок. Ось ox выбрана по направлению вектора напряженности заданного магнитного поля. Ось oz направлена в сторону первой пластинки.

В дальнейшем индексом (1) отмечаются все величины, относящиеся к пластинке, которая занимает область $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq a$, $|z-l| \leq h$, а индексом (2)—величины, относящиеся к пластинке, занимающей область $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq a$, $|z+l| \leq h$. Принимается, что пластинки находятся в среде, электромагнитные свойства которой отождествляются со свойствами вакуума.

Задача рассматривается в рамках линейной теории пластин и гипотезы магнитоупругости тонких тел [3], которая при указанных предположениях аналитически записывается следующим образом:

$$u_{zs} = -(z \mp l) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad u_{ys} = -(z \mp l) \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad u_{zs} = w_s(x, y, t) \quad (1.1)$$

$$e_{xs} = \tau_s(x, y, t), \quad e_{ys} = \gamma_s(x, y, t), \quad h_{zs} = f_s(x, y, t) \quad (s=1, 2)$$

Здесь и в дальнейшем при $s=1$ следует брать верхний знак, а при $s=2$ —нижний.

В (1.1) $u_{x_s}, u_{y_s}, u_{z_s}$ — компоненты вектора перемещения произвольных точек пластин, w_s — нормальные перемещения точек средних поверхностей пластин, e_{x_s}, e_{y_s} — тангенциальные компоненты вектора индуцированного электрического поля, h_{z_s} — нормальная компонента вектора напряженности индуцированного магнитного поля в областях, занимаемых пластинами.

В областях, занимаемых пластинами, имеем уравнения электродинамики, в которых ток смещения пренебрегается по сравнению с током проводимости. Во внешней области имеем уравнения электродинамики для вакуума.

Остальные компоненты индуцированного электромагнитного поля ($e_{x_s}, h_{x_s}, h_{y_s}$) выразятся через искомые функции $w_s, \varphi_s, \psi_s, f_s$ и значений компонент индуцированного магнитного поля h_{x_s} и h_{y_s} на поверхностях пластин [3].

Принятые предположения позволяют для поперечных колебаний пластин получить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_s}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial f_s}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\psi_s + \frac{H_0}{c} \frac{\partial w_s}{\partial t} \right) &= \frac{h_{x_s}^+ - h_{x_s}^-}{2h}, \quad \frac{\partial f_s}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi_s = \frac{h_{y_s}^+ - h_{y_s}^-}{2h} \quad (1.2) \\ \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 w_s + 2ch \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} + \frac{2zhH_0}{c} \left[\varphi_s + \frac{H_0}{c} \frac{\partial w_s}{\partial t} + \right. \\ &\left. + \frac{H^2 H_0}{3c} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^2 \partial t} + \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial y^2} \right) \right] \quad (s=1, 2) \end{aligned}$$

где $h_{x_s}^+, h_{y_s}^+, h_{x_s}^-, h_{y_s}^-$ — значения тангенциальных компонент магнитного поля на поверхностях $z = l+h, z = l-h, z = -l-h, z = -l+h$, соответственно.

В рассматриваемой задаче принимаются также дополнительные предположения относительно характера изменения возмущенного электромагнитного поля во внешних областях $z \geq l+h; z \leq -l-h$ [4].

В силу этих допущений получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \square h_{x_s}^{\pm} &= \pm \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \right), \quad \square h_{y_s}^{\pm} = \pm \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial f_s}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} \right) \quad (s=1, 2) \\ \square &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где λ — некоторый характерный для данной задачи размер (в дальнейшем за характерный размер λ принимается длина полуволны упругих колебаний пластин).

Система уравнений (1.2) — (1.3) не замкнута. Для замыкания системы уравнений (1.2) — (1.3) необходимо иметь решения уравнений электродинамики для внешней области $-l+h < z \leq -l-h$ с учетом ус-

ловий непрерывности соответствующих компонентов индуцированного электромагнитного поля на поверхностях пластин $z=l-h$, $z=-l+h$ и условий затухания на бесконечности.

В этой постановке решение задачи представляет значительные трудности. В дальнейшем рассмотрим случай близко расположенных пластин.

Тогда, для тангенциальных компонентов $h_x^{(2)}$, $h_y^{(2)}$ магнитного поля во внешней области между пластинами прием следующие допущения:

$$h_x^{(2)} = h_x^{(1)}(x, y, t), \quad h_y^{(2)} = h_y^{(1)}(x, y, t) \quad \text{при} \quad -l+h \leq z \leq l-h \quad (1.4)$$

Из уравнения электродинамики для внешней области между пластинами путем интегрирования по z в пределах от $-l-h$ до $l-h$ в силу (1.1) и (1.4) с учетом непрерывности тангенциальных компонентов индуцированного магнитного поля на поверхностях пластин $z=l-h$, $z=-l+h$ получим следующие уравнения:

$$\square h_{x1} = \square h_{x2} = \frac{1}{2(l-h)} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial t} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \right] \quad (1.5)$$

$$\square h_{y1} = \square h_{y2} = \frac{1}{2(l-h)} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial t} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right]$$

Система уравнений (1.2)–(1.3)–(1.5) является замкнутой.

2. Рассмотрим некую задачу, в случае, когда прямоугольные пластинки шарнирно оперты по всему контуру

$$w_s = 0, \quad \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad x=b \quad (2.1)$$

$$w_s = 0, \quad \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y=0, \quad y=a \quad (s=1,2)$$

Предполагаем, что на краях пластин можно принимать приближенную модель идеального проводника. Тогда граничные условия для компонент электромагнитного поля на краях пластин [5] имеют вид

$$h_{x1}^- = -h_{x1}^+ = hH_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}, \quad f_1 = H_0 \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad h_{y1}^- = -h_{y1}^+ = hH_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}$$

$$\varphi_s = -\frac{H_0 \partial w_s}{c \partial t}, \quad \varphi_s = 0 \quad (s=1,2) \quad (2.2)$$

Решение систем уравнений (1.2)–(1.3)–(1.5), удовлетворяющее граничным условиям (2.1) и (2.2), представим в виде

$$Q_x = Q_0 e^{-\lambda x} \sin \lambda_n x \sin \mu_n y, \quad Q_0 = \text{const}$$

$$q_x = q_0 e^{-\lambda x} \cos \lambda_n x \cos \mu_n y, \quad q_0 = \text{const}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{a} \quad (s=1,2) \quad (2.3)$$

где под Q_x подразумевается любая из искомым функций $h_{\pm 1}$, $h_{\pm 2}$, ψ_{\pm} , ω_{\pm} , а под q_x —любая из $h_{\pm 1}$, $h_{\pm 2}$, φ_{\pm} .

Подставляя (2.3) в (1.2)–(1.3)–(1.5), после некоторых преобразований получим следующую систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд принбов w_{01} и w_{02} :

$$\left\{ DK_{mn}^2 + 2gh\omega^2 + \frac{2zhAH_0}{c(x^2-1)} \left[\left(1 - \frac{h^2\nu_n^2}{3}\right) \left(\frac{\beta\gamma_1}{N} + \frac{H_0\omega(x^2-1)}{cA}\right) - \frac{M\gamma}{N} \right] \right\} w_{01} + \frac{2zhAH_0}{cN(x^2-1)} \left[M\gamma_1 - \left(1 - \frac{h^2\nu_n^2}{3}\right) \beta\gamma \right] w_{02} = 0$$

$$\frac{2zhAH_0}{cN(x^2-1)} \left[M\gamma_1 - \left(1 - \frac{h^2\nu_n^2}{3}\right) \beta\gamma \right] w_{01} + \left\{ DK_{mn}^2 + 2gh\omega^2 + \frac{2zhAH_0}{c(x^2-1)} \left[\left(1 - \frac{h^2\nu_n^2}{3}\right) \left(\frac{\beta\gamma_1}{N} + \frac{H_0\omega(x^2-1)}{cA}\right) - \frac{M\gamma}{N} \right] \right\} w_{02} = 0 \quad (2.4)$$

В (2.4)

$$K_{mn}^2 = \nu_m^2 + \nu_n^2, \quad \nu_n^2 = \nu_n^2 + \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \nu_{mn}^2 = K_{mn}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}, \quad D = \frac{2Eh^2}{3(1-\nu^2)}$$

$$\alpha = 4h(l-h)\nu_{mn}^2 + \frac{2(l-h)}{1}, \quad \beta = 4h(l-h)(4\pi z - \omega)\nu_{mn}^2 \frac{\pi}{c^2}$$

$$\gamma = \alpha\beta^2 + (x^2-1) \left[-\frac{2\omega^2\nu_{mn}^2}{c^2} + \beta \left(\nu_{mn}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right]$$

$$\gamma_1 = \beta^2 - \frac{(x^2-1)\omega^2\nu_{mn}^2}{c^2}, \quad A = \frac{16\pi z\omega^2 h(l-h)\nu_{mn}^2 H_0}{c^2}$$

$$M = \frac{h^2\nu_n^2\nu_n^2(x^2-1)}{3} + \left(1 - \frac{h^2\nu_n^2}{3}\right) [(x^2-1)\nu_n^2 + x\beta]$$

$$N = \left\{ \beta^2 + (x+1) \left[\frac{(x+1)\omega^2\nu_{mn}^2}{c^2} + \beta \left(\nu_{mn}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \beta^2 + (x-1) \left[\frac{(x-1)\omega^2\nu_{mn}^2}{c^2} + \beta \left(\nu_{mn}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right] \right\}$$

Так как коэффициенты при w_{01} в первом и w_{02} во втором уравнении системы (2.4) и наоборот, одинаковы, то приравняв детерминант системы (2.4) нулю, получаем раздельные характеристические уравнения относительно общей частоты магнитоупругих колебаний двух пластин.

3. Примем, что расстояние между пластинами намного меньше длины волны, то есть

$$2l \sqrt{\nu_n^2 + \nu_n^2} (l-h) \ll 1 \quad (3.1)$$

Принимаются также следующие допущения:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \ll \nu_n^2, \quad 1 - \frac{h^2\nu_n^2}{3} \approx 1, \quad |x| \ll 4\pi z$$

Тогда характеристическое уравнение системы (2.4), в силу (3.1), приводится к следующим двум отдельным уравнениям (в безразмерной форме):

$$\Omega^3 + a_1 \Omega^2 + (1 + a_2) \Omega + a_3 = 0 \quad (3.2)$$

где

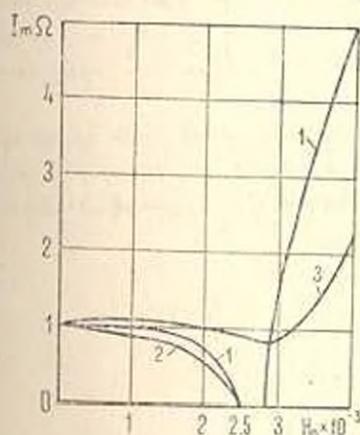
$$a_1 = \frac{c^2(K_{mn}^2 + 1/2hi)}{4\pi\sigma\Omega_0}, \quad a_2 = \frac{\gamma_m^2(K_{mn}^2 + 1/2hi)}{4\pi\gamma_0\Omega_0^2 K_{mn}^2}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\Omega_0}$$

$$\Omega^3 + (b_1 + b_2)\Omega^2 + \left(1 + \frac{b_1 b_2 \gamma_m^2}{K_{mn}^2}\right)\Omega + b_1 = 0 \quad (3.3)$$

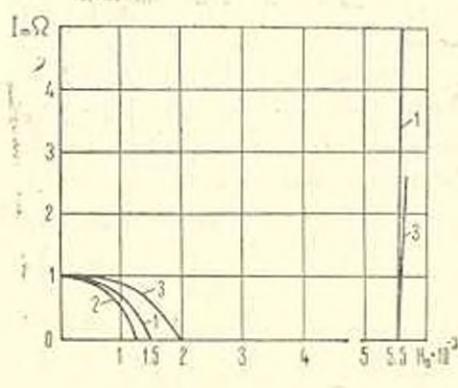
$$b_1 = \frac{8\pi\sigma h(1-h)K_{mn}^2}{\Omega_0}, \quad b_2 = \frac{\sigma H_0^2}{c^2 \rho \Omega_0}, \quad \Omega_0^2 = \frac{Eh^2 K_{mn}^2}{3\rho(1-\nu^2)}$$

Приведем численный анализ минимальной частоты согласно характеристическим уравнениям (3.2) и (3.3) для пластин шириной $b=10$ см, изготовленных из меди. Приведенные на фиг. 1 и 2 кривые 3 построены на основе численных результатов работы [6] относительно минимальной частоты колебаний ($m=1$) медной пластинки, а кривые 1 и 2 построены на основе численных результатов, исходя из уравнений (3.2) и (3.3) в случае, когда колебания не зависят от координаты y ($\mu_n=0$). Следует отметить, что в случае двух взаимодействующих пластин одной и той же длины волны соответствуют две частоты колебаний.

На фиг. 1 кривые 1 и 2 характеризуют частоты колебаний двух близко расположенных пластин с общей толщиной 0,04 см, а кривая 3—частота колебаний одной пластинки толщиной $2h=0,04$ см.



Фиг. 1



Фиг. 2

Кривая 3 показывает, что если в случае одной пластинки частота колебаний возрастает, то кривая 1 показывает, что в силу взаимодействия между близко расположенными пластинами частота колебаний достигает нулевого значения при $H_0 \approx 2,5 \cdot 10^3$ э, которое сохраняется

в определенном диапазоне изменения напряженности магнитного поля. В дальнейшем, при увеличении напряженности магнитного поля H_0 скорость возрастания частоты колебаний пластин намного больше по сравнению с частотой колебаний одной пластинки. Кривая 2 показывает, что с увеличением напряженности магнитного поля H_0 частота колебаний пластин уменьшается и достигает нулевого значения при $H_0 = 2,5 \cdot 10^3$ э.

Сравнение кривых 1 и 3 на фиг. 2 показывает, что если в случае одной пластинки с толщиной $2h = 0,01$ см частота колебаний достигает нулевого значения при $H_0 = 2 \cdot 10^3$ э (кривая 3), то для двух близко расположенных пластин частота колебаний принимает нулевое значение при $H_0 = 1,5 \cdot 10^3$ э (кривая 1). В дальнейшем, при увеличении напряженности магнитного поля H_0 частота колебаний пластин возрастает более интенсивно по сравнению с частотой колебаний одной пластинки.

VIBRATION OF TWO ELECTROCONDUCTIVE PLATES IN THE LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

L. V. VARDANIAN

ԵՐԿՈՒ ԶՈՒԳԱՆՈՒ ԷԼԵԿՏՐՈՎԱԿՈՆԴՈՐԳԻՉ ՈՒՎՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱՆԻՐԻ
ՏԱՏԱՆՈՒԹՅՆԵՐԸ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ԻՍԳԵՒՈՍԱԿԱՆ ԳԱՇՏՈՒՄ

Լ. Վ. ՎԱՐԴԱՆԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ա Մ

Դիտարկվում են երկու դուգաձև էլեկտրաճաղարկի առաձգական ուղղանկյուն սալերի հարմոնիկ տատանումները, երբ սալերը զտնվում են իրենց միջին մակերևույթների դուգաձև լարվածության վեկտոր ունեցող հատատուն մագնիսական դաշտում:

Բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության տեսության շրջանակներում ստացված են միմյանց մոտ գտնվող և եզրերում հոգակապերով ամրացված դուգաձև ուղղանկյուն սալերի տատանումների հաճախականությունների որոշման բնութագրիչ նախաարտումները:

Բերված են թվային արդյունքներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Варданян Л. В. Магнитоупругие колебания двух параллельных электропроводящих бесконечных пластин в продольном магнитном поле. — Тезисы докладов I Всесоюзного симпозиума «Теоретические вопросы магнитоупругости», Ереван (Цахкадзор): 1984.
2. Варданян Л. В. Магнитоупругие колебания двух параллельных токонесущих пластин. — Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 2, с. 33—42.
3. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Бечуокян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977, 272 с.

4. Белубекян М. В. К задаче колебаний токонесущих пластин.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 2, с. 22—30.
5. Белубекян М. В. Приведение пространственной задачи колебаний проводящей пластинки к двумерной при наличии продольного магнитного поля.—Тезисы докладов XI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Харьков: 1978. 23 с.
6. Амбарцумян С. А. Некоторые особенности колебаний пластинок в магнитном поле.—Изв. АН СССР, МТТ, 1983, № 4, с. 194—200.

Ереванский педагогический институт
им. Х. Абовяна.

Поступила в редакцию
22.V. 1987