ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 4, 1988 Механика

УДК 539.3 534.2

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В КЕРАМИКЕ

АВЕТИСЯН А. С., БЕЛУБЕКЯН М. В.

В последние годы существенно расширилась область исследования, учитывающая взаимосвязь механических и электромагнитных полей. Естественно, пользоваться линейной теорией для описания взаимодействия этих полей в реальных средах можно не во всех случаях.

Важное место в нелинейной электроупругости занимают вопросы распространения волн в твердых нелинейных средах. Основы нелинейной теории электроупругости изложены в работах [1—3]. Нелинейные эффекты в твердых телах более многообразны, поскольку в них могут существовать несколько типов волн. Качественно новые нелинейные эффекты можно наблюдать, если от изотропных диэлектриков перейти к случаю анизотропных кристаллов, обладающих пьезоэффектом или электрострикцией.

Нелинейные поверхностные волны в упругих средах мало изучены. Распространение нелинейных волн Рэлея в изотропной среде изучено в [4, 5]. Для анизотропных сред аналогичное исследование проведено в [5, 6].

1. В настоящей работе ограничимся изучением влияния на поверхностные волны конечной амплитуды, распространяющиеся в поляризованной керамике, электрострикционного эффекта (квадратичная нелинейность). Керамика обладает более высокой симметрией по сравнению с симметрией отдельных кристаллов в силу неупорядоченного распределения кристаллических осей в пространстве. В связи с этим, керамика уже не имеет пьезоэлектрического эффекта и все типы колебаний в ней связаны с электрострикционным эффектом.

Следуя [7], из выражения свободной энергии получены материальные соотношения для механических напряжений σ_{ij} и электрической индукции D_i в зависимости от деформации u_{ij} и напряженности электрического поля E_k:

$$\sigma_{11}=c_{11}u_{11}+c_{12}(u_{22}+u_{33})-l_{11}E_1^2-l_{12}(E_2^2+E_3^2),\quad \sigma_{22}=c_{12}(u_{11}+u_{33})+$$
$$+c_{11}u_{22}-l_{11}E_2^2-l_{12}(E_1^2+E_3^2),\quad \sigma_{33}=c_{12}(u_{11}+u_{22})+c_{11}u_{33}-l_{11}E_3^2-l_{12}(E_1^2+E_2^2)$$
$$\sigma_{23}=2c_{44}u_{23}-(l_{11}-l_{12})E_2E_3 \tag{1.1}$$
$$\sigma_{31}=2c_{44}u_{31}-(l_{11}-l_{12})E_1E_3,\quad \sigma_{12}=2c_{44}u_{12}-(l_{11}-l_{12})E_1E_2$$

$$D_1=\varepsilon_{11}E_1+0{,}5r_{11}E_1^2+2\{f_{11}(E_1u_{11}+E_2u_{12}+E_3u_{13})+$$
$$+f_{12}[E_1(u_{22}+u_{33})-(E_2u_{12}+E_3u_{13})]\}$$
$$D_2=\varepsilon_{11}E_2+0{,}5r_{11}E_2^2+2\{f_{11}(E_2u_{22}+E_1u_{21}+E_3u_{23})+$$
$$+f_{12}[E_2(u_{11}+u_{33})-(E_1u_{21}+E_3u_{23})]\} \qquad (1.2)$$
$$D_3=\varepsilon_{11}E_3+0{,}5r_{11}E_3^2+2\{f_{11}(E_1u_{13}+E_2u_{32}+E_3u_{33})+$$
$$+f_{12}[E_3(u_{11}+u_{22})-(E_1u_{31}+E_2u_{23})]\}$$

где c_{ik}—модули упругости второго порядка, f_{ij}—коэффициенты электрострикции, ε_{11} и r_{11}—линейная и нелинейная диэлектрические проницаемости. Компоненты деформации u_{ik} в тензорной форме определяются обычным соотношением

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \qquad (1.3)$$

При поляризации керамики по направлению ox_3 напряженность электрического поля E_3 будет суммой из E_0, связанной с остаточной поляризацией, и переменной части E_3. Тогда

$$E_j=\delta_{3j}E_0+E_j \qquad (1.4)$$

что приводит к приобретению керамикой пьезоэлектрического эффекта с модулями

$$e_{15}=(f_{11}-f_{12})E_0, \quad e_{31}=2f_{12}E_0, \quad e_{33}=2f_{11}E_0 \qquad (1.5)$$

Материальные соотношения (1.1), (1.2) преобразуются к

$$\sigma_{11}=c_{11}u_{11}+c_{12}(u_{22}+u_{33})-e_{31}E_3-N_1(E_j), \quad \sigma_{22}=c_{12}(u_{11}+u_{33})+c_{11}u_{22}-$$
$$-e_{31}E_3-N_2(E_j), \quad \sigma_{33}=c_{12}(u_{11}+u_{22})+c_{11}u_{33}+e_{33}E_3-N_3(E_j)$$
$$\sigma_{32}=2c_{44}u_{23}-e_{15}E_2-N_4(E_j) \qquad (1.6)$$
$$\sigma_{31}=2c_{44}u_{31}-e_{15}E_1-N_5(E_j), \quad \sigma_{12}=2c_{44}u_{12}-N_6(E_j)$$
$$D_1=\varepsilon_{11}E_1+2e_{15}u_{31}+N_7(u_{ij}, E_j), \quad D_2=\varepsilon_{11}E_2+2e_{15}u_{32}+N_8(u_{ij}, E_j)$$
$$D_3=\varepsilon_{11}^*E_3+e_{31}(u_{11}+u_{22})+e_{33}u_{33}+N_9(u_{ij}, E_j), \qquad (1.7)$$

где $\varepsilon_{11}^*=\varepsilon_{11}+r_{11}E_0$, $N_k(\cdot)$ — соответствующие нелинейные слагаемые в соотношениях (1.1) и (1.2).

2. Рассмотрим распространение поверхностных электроупругих волн на границе полупространства $\{-\infty<x_1<\infty,\ 0\leqslant x_2<\infty,\ -\infty<x_3<\infty\}$ из поляризованной керамики. Ось поляризации совпадает с координатной осью ox_3. При изучении влияния электрострикционного эффекта на распространение поверхностных волн будем исходить из линейных уравнений электроупругости

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial D_i}{\partial x_i}=0, \qquad \varepsilon_{ijk}\frac{\partial E_j}{\partial x_k}=0 \qquad (2.1)$$

граничных условий на свободной от механических нагрузок, металлизированной границы $x_2=0$

$$\sigma_{2j}=0, \quad j=1;2;3, \quad \Phi=0 \tag{2.2}$$

здесь Ф—электрический потенциал, введение которого позволяет последнее уравнение из (2.1) записать следующим образом:

$$E_j=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \tag{2.3}$$

Напряжениями электродинамического происхождения

$$T_{2j}=\frac{1}{2}\left[E_2D_j+E_jD_2-\delta_{2j}(E_iD_i)\right]$$

в граничных условиях мы пренебрегаем.

В двумерной электроупругой задаче $\partial/\partial x_3=0$, имеем $E_3=0$, $u_{33}=0$. При этом уравнения электроупругости (2.1) и граничные условия (2.2) с учетом материальных соотношений (1.6) и (1.7) принимают вид:

$$\begin{gathered}
L_1(u, v)=c_{11}u_{xx}+(c_{12}+c_{44})v_{xy}+c_{44}u_{yy}-\rho u_{tt}=F_1(\Phi)\\
L_2(u, v)=c_{44}v_{xx}+(c_{12}+c_{44})u_{xy}+c_{11}v_{yy}-\rho v_{tt}=F_2(\Phi)
\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}
L_3(w, \Phi)=c_{44}(w_{xx}+w_{yy})+e_{15}(\Phi_{xx}+\Phi_{yy})-\rho w_{tt}=0\\
L_4(w, \Phi)=e_{15}(w_{xx}+w_{yy})-\varepsilon_{11}(\Phi_{xx}+\Phi_{yy})=F_3(\Phi, u, v)
\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$c_{44}(u_y+v_x)=(f_{11}-f_{12})\Phi_x\Phi_y, \quad c_{12}u_x+c_{11}v_y=f_{11}\Phi_y^2+f_{12}\Phi_x^2 \tag{2.6}$$

$$c_{44}w_y+e_{15}\Phi_y=0, \quad \Phi=0 \tag{2.7}$$

Здесь и в дальнейшем для удобства, у искомых величин будем употреблять нижние индексы x и y, обозначающие производные по x_1 и x_2 соответственно, а также вместо компонент перемещений u_1, u_2, u_3 будем пользоваться обозначениями u, v, w.

В уравнениях (2.4) и (2.5) введены обозначения

$$\begin{gathered}
F_1(\Phi)=(f_{11}\Phi_x^2+f_{12}\Phi_y^2)_x+(f_{11}-f_{12})(\Phi_x\Phi_y)_y\\
F_2(\Phi)=(f_{11}-f_{12})(\Phi_x\Phi_y)_x+(f_{11}\Phi_x^2+f_{12}\Phi_y^2)_y
\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}
F_3(\Phi)=\{2[f_{11}(\Phi_x u_x+\Phi_y(u_y+v_x))+f_{12}(\Phi_x v_y-\Phi_y(u_y+v_x))]-\\
-0{,}5r_{11}\Phi_x^2\}_x+\{2[f_{11}(\Phi_y v_y+\Phi_x(u_y+v_x))+\\
+f_{12}(\Phi_y u_x+\Phi_y u_y-\Phi_x(u_y+v_x))]-0{,}5r_{11}\Phi_y^2\}_y
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Наличие в уравнениях (2.4) и (2.5) нелинейных величин $F_{1,2}(\Phi)$, $F_3(u, v, \Phi)$ обусловлено учетом электрострикционного эффекта и нелинейной диэлектрической проницаемости.

Полученные уравнения (2.4), (2.5) с граничными условиями (2.6), (2.7) и условиями излучения в бесконечности $\lim\limits_{y\to\infty} f_i(x, y, t)=0$ описывают распространение поверхностных электроупругих волн.

3. Если среда является слабо нелинейной, то амплитуды волн будут изменяться на малую величину при прохождении волной расстояния порядка длины волны, то есть амплитуды волн будут медленно изменяющимися функциями координат и времени. Так как волна распространяется по направлению оси ox, то амплитуды будут функциями величин $\xi=\varepsilon x$ и $\tau=\varepsilon t$. Здесь ε — малый физический параметр, которым может быть мера изменения (понижения) первичного сигнала.

Упругие перемещения u, v, w и электрический потенциал Φ представим в виде рядов по малому параметру

$$f(x, y, t, \xi, \tau)=\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m f_m(x, y, t, \xi, \tau) \tag{3.1}$$

Подставляя эти представления в уравнения (2.4), (2.5) и в граничные условия (2.6), (2.7), и приравняя коэффициенты при одинаковых степенях ε, находим:

а) для ε^0:

$$L_k(u_0, v_0)=0, \quad k=1; 2 \tag{3.2}$$

$$L_j(w_0, \Phi_0)=0, \quad j=1; 2 \tag{3.3}$$

$$u_{0,y}+v_{0,x}=0, \quad c_{12}u_{0,x}+c_{11}v_{0,y}=0 \tag{3.4}$$

$$c_{44}w_{0,y}+e_{15}\Phi_{0,y}=0 \quad \Phi_0=0 \tag{3.5}$$

Очевидно, что соотношения (3.2) и (3.4) определяют волны Рэлея, а соотношения (3.3) и (3.5) — волны Гуляева-Блюстейна при металлизированной границе полупространства. Исходя из нелинейности решаемой задачи (амплитуды — медленно меняющиеся функции от ξ и τ), решения первого приближения представим в виде

$$w_0(x, y, t, \xi, \tau)=\sum_{m=1}^{\infty} g_{1m}(y) W_{0m}(\xi, \tau)\cdot \exp(im\varphi)+\text{к. с.}$$

$$\Phi_0(x, y, t, \xi, \tau)=\sum_{m=1}^{\infty} g_{2m}(y)\cdot W_{0m}(\xi, \tau)\cdot \exp(im\varphi)+\text{к. с.} \tag{3.6}$$

$$u_0(x, y, t, \xi, \tau)=\sum_{m=1}^{\infty} g_{3m}(y)U_{0m}(\xi, \tau)\cdot \exp(im\varphi)+\text{к. с.}$$

$$v_0(x, y, t, \xi, \tau)=\sum_{m=1}^{\infty} g_{4m}(y)\cdot U_{0m}(\xi, \tau)\cdot \exp(im\varphi)+\text{к. с.} \tag{3.7}$$

где

$$g_{1m}(y)=\exp(-m\eta k y); \quad g_{2m}(y)=(e_{15}/\varepsilon_{11})\{\exp(-m\eta k y)-$$

$$-\exp(-mky)\}, \quad g_{3m}(y)=\exp(-m\nu_1 y)-(\nu_1\nu_2)^{1/2}\exp(-m\nu_2 y)$$

$$g_{4m}(y)=-i\{\nu_1\exp(-m\nu_1 y)-(\nu_1\nu_2)^{1/2}\exp(-m\nu_2 y)\}$$

$$\eta=\sqrt{1-V_R^2/C_t^2}, \quad \nu_1=\sqrt{1-V_R^2/C_l^2}, \quad \nu_2=\sqrt{1-V_R^2/C_{t0}^2}$$

$$C_t^2=C_{t0}^2(1+\varkappa^2), \quad C_{t0}^2=c_{44}/\rho, \quad C_l^2=c_{11}/\rho, \quad \varkappa^2=e_{15}^2/(c_{44}\varepsilon_{11})$$

$\xi = kx - \omega t$, V_R и V_B — скорости волн Рэлея и Гуляева-Блюстейна, соответственно, $W_{0m}(\xi, \tau)$ и $U_{0m}(\xi, \tau)$ — комплексные амплитуды, соответствующие генерационным гармоникам.

Для следующих приближений получаются системы рекуррентных дифференциальных неоднородных уравнений относительно искомых функций $f_m(x, y, t, \xi, \tau)$. В правые части этих уравнений входят функции $f_{m-1}(x, y, t, \xi, \tau)$, определяемые из предыдущих приближений

$$L_1(u_m, v_m) = F_1(\Phi_{m-1}) - 2c_{11}u_{m-1,x\xi} - (c_{12} + c_{44})v_{m-1,y\xi} + 2\rho u_{m-1,t\tau} \tag{3.8}$$

$$L_2(u_m, v_m) = F_2(\Phi_{m-1}) - 2c_{44}v_{m-1,x\xi} - (c_{12} + c_{44})u_{m-1,y\xi} + 2\rho v_{m-1,t\tau}$$

$$L_3(w_m, \Phi_m) = -2c_{44}w_{m-1,x\xi} - 2e_{15}\Phi_{m-1,x\xi} + 2\rho w_{m-1,t\tau} \tag{3.9}$$

$$L_4(w_m, \Phi_m) = F_4(\Phi_{m-1}; U_{m-1}; V_{m-1}) - 2e_{15}w_{m-1,x\xi} + 2\varepsilon_{11}\Phi_{m-1,x\xi}$$

с неоднородными граничными условиями на поверхности

$$c_{44}(u_{m,y} + v_{m,x}) = (f_{11} - f_{12})\Phi_{m-1,x}\Phi_{m-1,y} - c_{44}v_{m-1,\xi}; \quad c_{12}u_{m,x} + c_{11}v_{m,y} =$$

$$= f_{11}\Phi^2_{m-1,y} + f_{12}\Phi^2_{m-1,x} - c_{12}u_{m-1,\xi} \tag{3.10}$$

$$c_{44}w_{m,y} + e_{15}\Phi_{m,y} = 0, \quad \Phi_m = 0. \tag{3.11}$$

Полученные соотношения дают возможность исследовать генерацию высших гармоник продольной и поперечной электроупругой волны, обусловленной эффектом электрострикции. Генерация высших гармоник будет зависеть от существования в первом приближении плоского деформированного или антиплоского (электроупругого) деформированного состояния.

Если в первом приближении имеется только плоское поле деформации ($u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$, $w_0 = 0$, $\Phi_0 = 0$), то из (3.8) — (3.11) очевидно, что генерация антиплоского поля деформации невозможна. В этом случае будут генерироваться только высшие гармоники рэлеевской (неэлектроактивной) волны.

Пусть в первом приближении имеется только горизонтально поляризованная (SH) электроупругая волна: $u_0 = v_0 = 0$, $w_0 \neq 0$, $\Phi_0 \neq 0$. Такая волна в полупространстве может существовать только благодаря предварительной поляризации (благодаря вызванному пьезоэффекту) керамики.

Тогда $F_k(u_0, v_0, \Phi_0)$ намного упрощается

$$F_k(0, 0, \Phi_0) = F_k(\Phi_0) = -0.5r_{11}\{(\Phi^2_{0,x})_x + (\Phi^2_{0,y})_y\} \tag{3.12}$$

Упрощаются также уравнения и граничные условия (3.8) — (3.11) для второго приближения

$$L_k(u_1; v_1) = F_k(\Phi_0), \quad k = 1; 2 \tag{3.13}$$

$$L_3(w_1; \Phi_1) = -2c_{44}w_{0,x\xi} - 2e_{15}\Phi_{0,x\xi} + 2\rho w_{0,t\tau} \tag{3.14}$$

$$L_4(w_1; \Phi_1) = F_3(\Phi_0) - 2e_{15}w_{0,x\xi} + 2\varepsilon_{11}\Phi_{0,x\xi}$$

$$c_{44}(u_{1,y} + v_{1,x}) = (f_{11} - f_{12})\Phi_{0,x}\Phi_{0,y}; \quad c_{12}u_{1,x} + c_{11}v_{1,y} = f_{11}\Phi^2_{0,y} + f_{12}\Phi^2_{0,x}$$

(3.15а)

$$e_{14}w_{1,y}+e_{15}\Phi_{1,y}=0;\quad \Phi_1=0. \qquad (3.15б)$$

Уравнения (3.13), (3.14) и граничные условия (3.15) относительно искомых функций u_1; v_1; w_1; Φ_1 — линейные, неоднородные. Входящие в правые части нелинейные слагаемые $F_s(\Phi_0)$, $s=1$; 2; 3 из (2.8) и (3.12) с учетом (3.6) представляются в виде

$$F_s(\Phi_0)=\sum_{n=1}^{\infty} G^{(s)}_{0n}(y)|W_{0n}|^2+\sum_{n=1}^{\infty} G^{(s)}_{1n}(y)W^*_{0n}W_{0n+1}\exp(i\varphi)+$$

$$+\sum_{m=2}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} G^{(s)}_{mn}(y)W^*_{0n}W_{0n+m}+\sum_{n=1}^{m-1} H^{(s)}_{mn}(y)W_{0n}W_{0m-n}\right\}\exp(im\varphi) \qquad (3.16)$$

где

$$G^{(1)}_{0n}(y)=0;\quad G^{(2)}_{0n}(y)=4k^2n^2f_{11}g_{2n}(y)g_{2n}(y)+4f_{11}g'_{2n}(y)g'_{2n}(y)$$

$$G^{(3)}_{0n}(y)=-2r_{11}g'_{2n}(y)g'_{2n}(y);\quad G^{(1)}_{mn}(y)=ik\{2k^2mn(n+m)f_{11}g_{2n}(y)g_{2n+m}(y)+$$

$$+2mf_{12}g'_{2n}(y)g'_{2n+m}(y)+(f_{11}-f_{12})[(n+m)g'_{2n}(y)g_{2n+m}(y)-ng_{2n}(y)g'_{2n+m}(y)]'\}$$

$$G^{(2)}_{mn}(y)=2k^2n(m+n)[g_{2n}(y)g_{2m+n}(y)]'+2f_{12}[g'_{2n}(y)g'_{2n+m}(y)]'-$$

$$-mk^2(f_{11}-f_{12})[(n+m)g'_{2n}(y)g_{2n+m}(y)-ng_{2n}(y)g'_{2n+m}(y)]$$

$$G^{(3)}_{mn}(y)=-\frac{r_{11}}{2}\{2ik^2nm(n+m)g_{2n}(y)g_{2n+m}(y)+2[g'_{2n}(y)g_{2n+m}(y)]'\}$$

$$H^{(1)}_{mn}(y)=-ik\{k^2f_{11}mn(m-n)g_{2n}(y)g_{2m-n}(y)+mf_{12}g'_{2n}(y)g'_{2m-n}(y)+$$

$$+n(f_{11}-f_{12})[g_{2n}(y)g'_{2m-n}(y)]'\}$$

$$H^{(2)}_{mn}(y)=-k^2n(m-n)f_{11}[g_{2n}(y)g_{2m-n}(y)]'+f_{12}[g'_{2n}(y)g_{2m-n}(y)]'-$$

$$-k^2nm(f_{11}-f_{12})g_{2n}(y)g'_{2m-n}(y)$$

$$H^{(3)}_{mn}(y)=\frac{r_{11}}{2}\{ik^2mn(m-n)g_{2n}(y)g_{2m-n}(y)-[g'_{2n}(y)g_{2m-n}(y)]'\}$$

Соотношения (3.16) приводят к выводу, что в результате действия одной лишь квадратичной нелинейности, вызывающей последовательность двухфонных процессов, также вносится вклад в волну основной частоты и появляются волны с частотами 0, 2ω, 3ω, 4ω и т. д. Вклад в каждую гармонику характеризуется соответствующими коэффициентами при $\exp(im\varphi)$ в уравнениях и в граничных условиях.

Исходя из сказанного, представим решения уравнений (3.13) и (3.14) в виде

$$f_1(x,y,t,\xi,\tau)=\sum_{m=0}^{\infty} f_{1m}(y,\xi,\tau)\exp(im\varphi)+\text{к. с.} \qquad (3.17)$$

Подставляя соотношения (3.17) в уравнения (3.13), (3.14) и в граничные условия (3.15), приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках $\exp(im\varphi)$, получим системы парных, линейных, неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями относительно функции $f_{1m}(y, \xi, \tau)$. Изменение плоского поля деформации описываются уравнениями (3.13) и граничными условиями (3.15а). Для антиплоского электроупругого поля из (3.14) и (3.15б) будем иметь (для каждого $m \geqslant 1$)

$$\frac{d^2 W_{1m}}{dy^2} - m^2 k^2 \alpha^2 W_{1m} = A_0(\xi, \tau)\exp(-m\alpha k y) + \frac{e_{15}}{c_{44}\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(\xi, \tau)\exp(-a_{mn} y) \tag{3.18}$$

$$\frac{d^2 \Psi_{1m}}{dy^2} - m^2 k^2 \Psi_{1m} = B_0(\xi, \tau)\exp(-mky) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(\xi, \tau)\exp(-a_{mn} y)$$

с граничными условиями на поверхности $y=0$

$$\bar{c}_{44} \frac{dW_{1m}}{dy} - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{d\Psi_{1m}}{dy} = 0; \quad e_{15} W_{1m} - \Psi_{1m} = 0 \tag{3.19}$$

Здесь $\Psi_{1m} = e_{15} W_{1m} - \varepsilon_{11}\Phi_{1m}$; $A_0(\xi, \tau) = -2ikm\left(W'_{0m,\xi} + \frac{V_+}{C_t^2} W'_{0m,\tau}\right)$

$B_0(\xi, \tau) = -2imke_{15} W'_{0m,\xi}$; $A_{mn}(\xi, \tau)$—линейные комбинации произведений комплексных амплитуд $W^*_{0n} \cdot W_{0m+n}$ и $W_{0n} W_{0m-n}$, коэффициенты затухания a_{mn}—свертки величин nk, $n\alpha k$, $(n+m)\alpha k$, $(m-n)\alpha k$, $(n+m)k$ и $(m-n)k$.

Решая систему уравнений (3.18) и удовлетворяя граничным условиям (3.19), получим систему алгебраических уравнений, главным детерминантом которой будет дисперсионное уравнение линейных волн Гуляева-Блюстейна. Из условия существования нетривиальных решений получим укороченные уравнения первого приближения для комплексных амплитуд $W_{0m}(\xi, \tau)$

$$W_{0m,\xi} + \frac{V_+}{V_B^2} W_{0m,\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \{b_{mn} W^*_{0n} W_{0m+n} + d_{mn} W_{0n} W_{0m-n}\} \tag{3.20}$$

Здесь коэффициенты b_{mn} и d_{mn} ($d_{mn} \equiv 0$ при $n \geqslant m$)—комплексные, зависят от физических характеристик материала и от предварительной поляризации, $V_+ = \omega/k$—фазовая скорость гармоники.

В разложении (3.17) функции $f_{10}(y, \xi, \tau)$ вещественны и описывают акустическое детектирование. Из соотношений (3.13)—(3.15) находим

$$U_{10}(y, \xi, \tau) = 0; \quad V_{10}(y, \xi, \tau) \neq 0; \quad W_{10}(y, \xi, \tau) \neq 0; \quad \Phi_{10}(y, \xi, \tau) \neq 0$$

Полученная бесконечная система нелинейных дифференциальных уравнений (3.20) описывает характер взаимодействий гармоник при распространении поверхностной электроупругой волны. Представляя комплексные амплитуды в виде

$$W_{0m}(\xi, \tau) = \rho_m(\xi, \tau) \cdot \exp[i\Theta_m(\xi, \tau)]$$

и разделяя действительную и мнимую части, относительно модулей $\rho_m(\xi, \tau)$ и фаз $\Theta_m(\xi, \tau)$ амплитуд взаимодействующих гармоник, получим новую бесконечную систему нелинейных дифференциальных уравнений. В случае квази-монохроматических возбуждений все амплитуды $W_{0m}(\xi, \tau)$ за исключением $W_{01}(\xi, \tau)$ должны удовлетворять нулевым начальным условиям при $\xi=0$. Это значит, что

$$\rho_1(0, \tau)=\rho_0(\tau); \quad \rho_m(0, \tau)=0 \text{ при } m\geqslant 2 \tag{3.21а}$$

Фазы изменения комплексных амплитуд в начальной точке $\xi=0$ тоже равны нулю:

$$\Theta_m(\xi, \tau)=0 \quad \text{при} \quad m\geqslant 1 \tag{3.21б}$$

4. Рассматриваемые электроупругие поверхностные волны не обладают дисперсией. Исходя из этого, рассмотрим задачу о взаимодействии гармоник в N-волновом приближении (N — конечное). Такое приближение применимо на не слишком большом расстоянии от источника. При $N=2$ главная часть решения (3.6) и (3.7) запишется в виде

$$f_{01}(x, y, t, \xi, \tau)=\sum_{m=1}^{2} g_{m}(y)\, W_{0m}(\xi, \tau)\exp(im\varphi)+\text{к. с.} \tag{4.1}$$

Укороченные уравнения первого приближения относительно модулей $\rho_m(\xi, \tau)$ и фаз $\Theta_m(\xi, \tau)$ комплексных амплитуд $W_{01}(\xi, \tau)$ и $W_{02}(\xi, \tau)$ в этом случае принимают вид:

$$\rho_{1,\xi}+a_0\rho_{1,\tau}=-R_1\rho_1\rho_2\cos(\Theta_2-2\Theta_1+\varphi_1); \quad \rho_{2,\xi}+a_0\rho_{2,\tau}=R_2\rho_1^2\cos(\Theta_2-2\Theta_1+\varphi_2)$$

$$\rho_1(\Theta_{1,\xi}+a_0\Theta_{1,\tau})=-R_1\rho_1\rho_2\sin(\Theta_2-2\Theta_1+\varphi_1); \quad \rho_2(\Theta_{2,\xi}+a_0\Theta_{2,\tau})= -R_2\rho_1^2\sin(\Theta_2-2\Theta_1+\varphi_2) \tag{4.2}$$

где

$$a_0=V_\varphi/V_B^2; \quad R_1=|b_{11}|, \quad R_2=|d_{21}|, \quad \varphi_1=\arg(b_{11}), \quad \varphi_2=\arg(d_{21})$$

Система уравнений (4.2) описывает изменения амплитуд основной и второй гармоник. Наличие в аргументах тригонометрических функций величин φ_1 и φ_2 означает, что фазы изменения этих гармоник сдвинуты относительно друг друга. Этого сдвига не будет в случае $\varphi_1=\varphi_2=0$, но это равносильно требованию $E_1=0$, что означает отсутствие сигнальных антиплоских электроупругих поверхностных волн Гуляева-Блюстейна.

Если начальная поляризация такая, что $\varphi_1=\varphi_2$, то тогда заменой переменных

$$\gamma_2=\Theta_2, \quad \gamma_1=\Theta_1-\varphi_1/2$$

получим систему в следующем виде:

$$\rho_{1,\xi}+a_0\rho_{1,\tau}=-R_1\rho_1\rho_2\cos(\gamma_2-2\gamma_1); \quad \rho_{2,\xi}+a_0\rho_{2,\tau}=R_2\rho_1^2\cos(\gamma_2-2\gamma_1) \tag{4.3}$$

$$\rho_1(\gamma_{1,\xi}+a_0\gamma_{1,\tau})=-R_1\rho_1\rho_2\sin(\gamma_2-2\gamma_1); \quad \rho_2(\gamma_{2,\xi}+a_0\gamma_{2,\tau})=-R_2\rho_1^2\sin(\gamma_2-2\gamma_1)$$

Построим решение полученной системы нелинейных уравнений при сигнальных условиях.

$$\varphi_1(0,\tau)=\varphi_0(\tau),\quad \varphi_2(0,\tau)=0,\quad \gamma_1(0,\tau)=\gamma_2(0,\tau)=0 \tag{4.4}$$

где $\rho_0(\tau)$—гладкая функция и равна нулю при $\tau<0$. Используя метод характеристик [8], решения системы (4.3), соответствующие условиям (4.4), получим в виде

$$\varphi_1(\xi,\tau)=\varphi_0(\tau/a_0-\xi)\operatorname{sech}[(R_1R_2)^{1/2}\xi\varphi_0(\tau/a_0-\xi)]$$

$$\varphi_2(\xi,\tau)=(R_2/R_1)^{1/2}\varphi_0(\tau/a_0-\xi)\tanh[(R_1R_2)^{1/2}\xi\varphi_0(\tau/a_0-\xi)]$$

$$\gamma_1(\xi,\tau)=\gamma_2(\xi,\tau)=0$$

Очевидно, что в этом случае изменения фаз амплитуд первой и второй гармоник сдвиговой поверхностной волны протекают со сдвигом $\theta_1(\xi,\tau)-\theta_2(\xi,\tau)=\varphi_1/2$. Величина $\Delta=(R_2/R_1)^{1/2}$ характеризует меру перекачки энергии при генерации второй гармоники и зависит от коэффициента электромеханической связи $\varkappa^2=e_{15}^2/(\varepsilon_{11}c_{11})$. При изменении $\varkappa$ от 0,1 до 0,5; Δ монотонно убывает от 0,85 до 0,55.

Процесс генерации и взаимодействия гармоник электроупругих поверхностных волн качественно не отличается от аналогичного процесса в случае объемных волн [1,5]. Происходит перенос энергии вверх по спектру и затухание нелинейной волны. Количественный анализ в случае взаимодействия всех гармоник необходимо проводить с помощью вычислительной техники. Тогда он сведется к интегрированию уравнений (3.20).

NONLINEAR SURFACE ELECTROELASTIC WAVES IN A CERAMIC

A. S. AVETISIAN, M. V. BELYBEKIAN

ԷԼԵԿՏՐԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ԿԵՐԱՄԻԿԱՅՈՒՄ

Ա. Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում հետազոտվում է էլեկտրաստրիկցիայի ազդեցությունը բարիումի տիտանատի բևեռացված կերամիկայում տարածվող մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքի վրա Լուծման մեթոդը թույլ է տալիս ստանալ ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ՝ փոխադրող հարմոնիկների կոմպլեքս ամպլիտուդների նկատմամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красильников В. А., Крылов В. В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
2. *Maugin G. A.* Nonlinear electromechanical effects and applications. World Scientific Publ., Singapore: 1985. 168 p.
3. Лямов В. Е. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. М.. Изд. МГУ, 1983. 231 с.

4. *Kalyanasundaram N.* Nonlinear surface acoustic waves on an isotropic solid.— Int. Journal Eng. Sci., 1981, vol. 19, № 1, pp. 279—286.
5. *Реутов В. П.* Применение усредненного вариационного принципа для описания многоволновых взаимодействий упругих поверхностных волн.—Изв. ВУЗ, Радиофизика, 1973, т. *16*, вып. 11, с. 1690—1702.
6. *Lardner R. W.* Nonlinear surface waves on an elastic solid of general anisotropy.— Journal of Elasticity, 1986, vol. 16, № 1, pp. 63—75.
7. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике. М.: ИЛ, 1962. 447 с.
8. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики, т. II. М—Л: ОГИЗ, 1945. 620 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
24.II.1987