ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 3, 1988 Механика

УДК 624.012.012

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЖЕСТКОГО ШТАМПА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Л. Г. ПЕТРОСЯН

В [1] предложена универсальная регулярная модель упругого основания, позволяющая рассматривать грунты с различной связностью или неоднородностью по глубине. Параметры модели могут быть установлены на основе штамповых испытаний грунтов. Особенностью модели наряду с ее универсальностью является ограниченность перемещений и напряжений в основании при сосредоточенных нагрузках и скачках перемещений, характерная для дискретных моделей винклеровского типа, конечные перемещения в случае плоской задачи и, вместе с тем, обеспечение связности при одновременном учете неоднородности.

В настоящей статье приводится численное решение контактной задачи (осесимметричной и плоской) для жесткого штампа с плоской подошвой, вдавливаемого без трения в упругое основание, описываемое обобщенной моделью. Ядро основания принимается в виде [1]

$$K(r)=\theta K_0(r)=\frac{\theta}{2\pi (R^2+\varepsilon^2)^{1+\nu}} \tag{1}$$

где θ—физическая константа, характеризующая обобщенную жесткость основания, по физическому смыслу близкая к коэффициенту постели, ε—регуляризующий параметр, ограничивающий перемещения и напряжения в особых точках; ν—параметр однородности, регулирующий совместно с ε связность основания. Значения параметров θ, ε, ν могут быть установлены посредством аппроксимации экспериментальной лунки от штампа малого диаметра с помощью выражения (1).

Контактная задача для плоского жесткого штампа в случае осевой симметрии может быть сформулирована в виде парных интегральных уравнений

$$\int_0^\infty h(\xi)\bar{p}(\xi)J_0(\xi r)d\xi=\frac{w_0}{\theta} \qquad (0<r<r_0)$$

$$\int_0^\infty \bar{p}(\xi)J_0(\xi r)d\xi=0 \qquad (r_0<r<\infty) \tag{2}$$

где $\bar{p}(\xi)$ — преобразование Ханкеля контактного напряжения $p(r)$; w_0 — перемещение центральной точки штампа; r_0 — радиус штампа; $h(\xi)$ — плотность ядра упругого основания, вычисляемая по формуле

$$h(\xi)=2\pi\xi\int_0^\infty rK_0(r)J_0(\xi r)dr$$

Для ядра (1)

$$h(\xi)=\frac{\xi^{\alpha+\nu}\varepsilon^{\alpha}K_\alpha(\varepsilon\xi)}{2^{\nu-\alpha}\pi\Gamma(\alpha+\nu)}, \quad \alpha=\frac{1-\nu}{2} \tag{3}$$

где $K_\nu(\varepsilon\xi)$ — функция Макдональда. Для решения уравнений (2) могут быть использованы различные известные методы, однако большинство из них требуют определенного поведения $h(\xi)$ на бесконечности: в частности, при $\xi\to\infty$ должно быть

$$h(\xi)=B\xi^{1-2\mu}[1+O(1)], \quad \frac{1}{2}\geqslant\mu>0, \quad B=\mathrm{const} \tag{4}$$

Используя асимптотику функции Макдональда для плотности ядра рассматриваемой модели, получаем следующее представление при $\xi\to\infty$:

$$h(\xi)=B\xi^{\alpha+\nu-1/2}[1+O(1)] \tag{5}$$

При $0{,}5<\alpha+\nu>3{,}5$ условие (5) удовлетворяется, и система (2) может быть сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Однако, при других значениях параметров ε, ν условие (5) не выполняется. Поэтому для получения универсального решения воспользуемся методом, предложенным Ю. Г. Плотниковым [2].

Применительно к осесимметричной задаче этот метод приводит к системе алгебраических уравнений

$$rA+Rw_0=0, \quad R^TA+Q=0 \tag{6}$$

где $r=\|r_{ml}\|$; $R=\|R_m\|$; $Q=P/2\pi$; P — сила, действующая на штамп; $A=\|A_l\|$; A_l — коэффициенты разложения контактного давления в ряд по координатным функциям

$$p(r)=\sum_{l=1}^{N}A_lp_l(r) \tag{7}$$

Коэффициенты r_{ml} определяются по формуле

$$r_{ml}=\frac{\theta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^{-1}h(\xi)\bar{p}_m(\xi)\bar{p}_l(\xi)d\xi$$

где $\bar{p}(\xi)$ — трансформанта Фурье функций $p_m(x)$.

Аппроксимация контактного давления принята в виде

$$p(r)=\sum_{i=1}^{N} A_i\left\{\frac{1}{2\pi r_i\Delta_i}\left[H\left(r-r_i+\frac{\Delta_i}{2}\right)-H\left(r-r_i-\frac{\Delta_i}{2}\right)\right]\right\} \qquad (8)$$

Здесь $H(r)$ — единичная ступенчатая функция Хевисайда. Коэффициенты разложения A_i по физическому смыслу являются равнодействующими контактного давления на площадке Δ_i. Величины R_m есть полное контактное давление, соответствующее m члену разложения

$$R_m=\int_0^{\infty} p_m(r)r\,dr$$

Аналогично решается плоская задача. В этом случае в отличие от осесимметричной задачи принимается $Q=P$ и

$$r_{mi}=\frac{\xi}{2\pi}\int_0^{\infty}\xi^{-1}h(\xi)\,P_m(\xi)\overline{p_i(\xi)}\,d\xi$$

где

$$p_m(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}p_m(x)e^{i\xi x}\,dx,\quad \overline{p_i(\xi)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}p_i(x)e^{-i\xi x}dx$$

При этом

$$R_m=\int_0^{\infty}P_m(x)dx$$

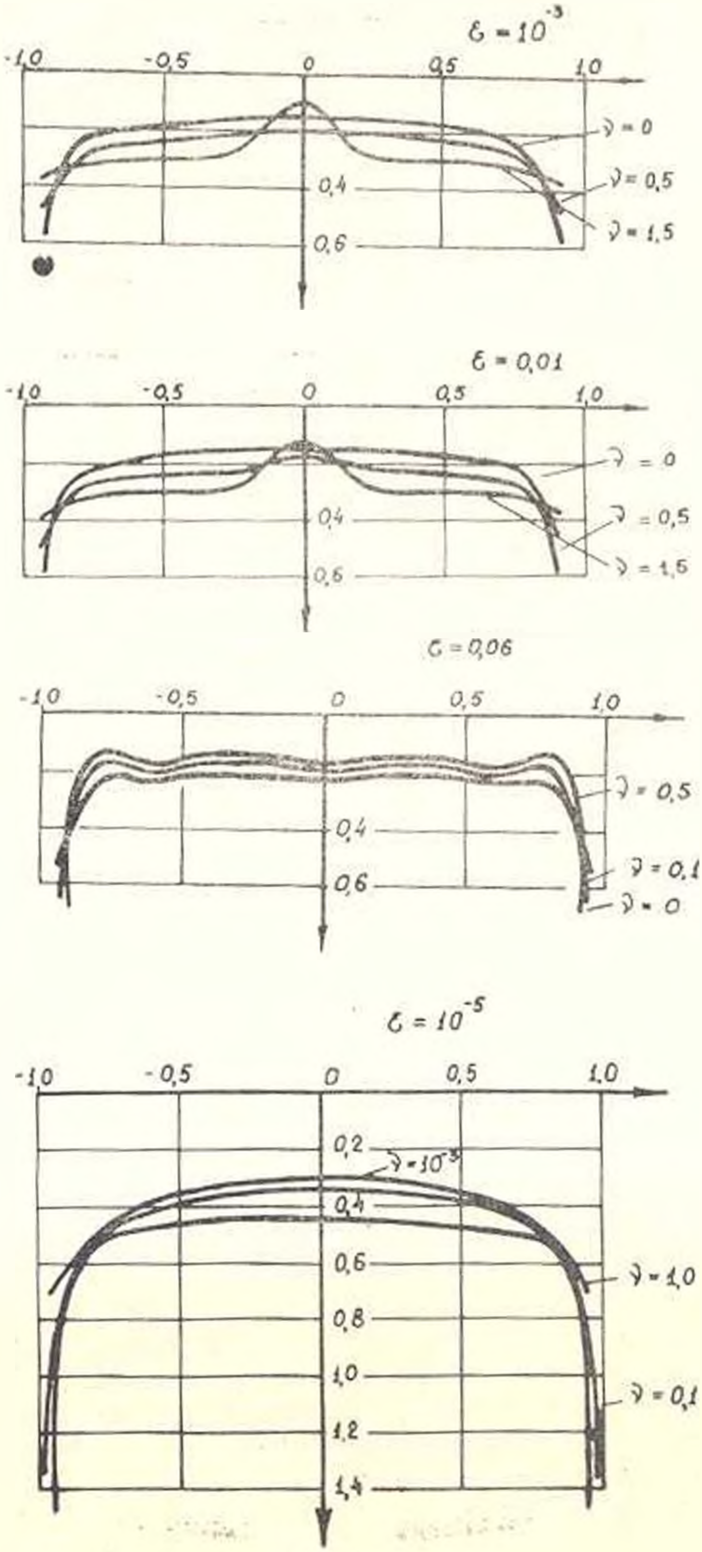
Аппроксимация контактного давления в отличие от (8) принимается в виде

$$p(x)=\sum_{i=1}^{N}A_i\left\{\frac{1}{\Delta_i}\left[H\left(x-x_i+\frac{\Delta_i}{2}\right)-H\left(x-x_i-\frac{\Delta_i}{2}\right)\right]\right\} \qquad (9)$$

Результаты вычисления контактных напряжений, определяемых с точностью до постоянного множителя $(2\pi)^{-1-\nu}$, приведены на фиг. 1. По существу, вычисления проводились для ядра $K_0(r)=\dfrac{1}{(r^2+\varepsilon^2)^{\frac{1+\nu}{2}}}$ в осесимметричной, и для ядра $K(x)=\dfrac{\varepsilon^{\nu/2}}{(x^2+\varepsilon^2)^{\nu/2}}$ — в плоской задачах.

Для оценки точности численного решения осесимметричной и плоской задач одновременно вычислялось среднее контактное давление под штампом, что обеспечивало проверку условия равновесия. С этой же целью при предельных значениях параметров проводились вычисления для упругого полупространства и упругой полуплоскости.

Анализ результатов вычислений показывает, что при различных параметрах ν и ε, предлагаемая модель позволяет получить эпюры давления, являющиеся промежуточными между эпюрами, характерными для винклеровского основания и упругого полупространства. В пре-



ε = 10⁻³
-1,0
-0,5
0
0,5
1,0
0,4
0,6
ϑ = 0
ϑ = 0,5
ϑ = 1,5
ε = 0,01
ϑ = 0
ϑ = 0,5
ϑ = 1,5
ε = 0,06
ϑ = 0,5
ϑ = 0,1
ϑ = 0
ε = 10⁻⁵
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
ϑ = 10⁻⁵
ϑ = 1,0
ϑ = 0,1

фиг. 1

дельных случаях получаются эпюры для этих двух моделей. Таким образом, рассматриваемая модель позволяет описать практически любые грунтовые основания, рассматриваемые в рамках линейной теории, и обладающие различной связностью.

CONTACT PROBLEM FOR RIGID PUNCH ON ELASTIC FOUNDATION

L. G. PETROSIAN

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎՈՂ ԿՈՇՏ ԴՐՈՇՄԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Բերված է գծային դեֆորմացվող հիմքին սեղմվող կոշտ դրոշմի համար կոնտակտային խնդրի թվային լուծումը։

Որպես հիմք մոդել է ընդունված ընդհանրացված մոդելը, որը բնութագրվում է երեք պարամետրանի կորիզ ունեցող Գրինի ֆունկցիայով։ Պարամետրերի սահմանային արժեքների դեպքում կորիզը կարող է ներկայացնել առաձգական համասեռ ու ոչ համասեռ և վինկլերյան մոդելների կորիզները։

Բերված են կոնտակտային լարումների հաշվման արդյունքները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цейтлин А. И., Петросян Л. Г.* Методы граничных элементов в строительной механике. Ереван: Луйс, 1987. 200 с.
2. *Плотников Ю. Г.* Стационарные колебания плоских и осесимметричных штампов на вязкоупругом основании. Дисс... канд. техн. наук. —М.: 1979. 203с.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
14.I.1988