ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 5, 1988 Механика

УДК 539.377

ДВУХСЛОЙНОЕ ОРТОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО, НАГРЕВАЕМОЕ ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

ИВАНИК Е. Г.

В практике применения кристаллов в различных технических и научных целях часто необходимо знание температурных напряжений в кристаллических телах. Это существенно, например, при выборе режима работы и отжиге кристаллов, при оценке термостойкости кристаллических тел и т. п. В связи с этим актуальной является проблема определения температурных напряжений в ортотропных кусочно-однородных телах, обусловленных нестационарными температурными полями.

Рассмотрим двухслойное ортотропное полупространство, состоящее из покрытия, занимающего область $0 \leq z < z_1$ и сопряженной с ним области $z_1 \leq z < \infty$. Пусть температура поверхности $z=0$ данного кусочно-однородного тела изменяется по закону

$$t|_{z=0} = t_c \cos\omega_1 x \exp(i\omega_2\tau) \tag{1}$$

где $t_c=\mathrm{const}$, $\omega_1=\mathrm{const}$, $\omega_2=\mathrm{const}$.

Физико-механические характеристики такой системы представляются в виде

$$p_{ij}(z) = p_{ij}^{(1)} + (p_{ij}^{(2)} - p_{ij}^{(1)})S_-(z-z_1) \tag{2}$$

где индексами 1, 2, соответственно, обозначены физико-механические характеристики покрытия и сопряженной с ним области,

$S_-(z-z_1) = \begin{cases} 1, & z > z_1, \\ 0, & z < z_1, \end{cases}$ — асимметричная единичная функция [1].

Уравнения термоупругости в данном случае запишутся таким образом [2]:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + [k_x^{(1)} + (k_x^{(2)} - k_x^{(1)})S_-(z-z_1)]\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \left[\frac{1}{a_z^{(1)}} + \left(\frac{1}{a_z^{(2)}} - \frac{1}{a_z^{(1)}}\right)S_-(z-z_1)\right]\dot{t} +$$

$$+ (1 - K_z^{(2)})\frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left\{[\varepsilon_{11}^{(1)} + (\varepsilon_{11}^{(2)} - \varepsilon_{11}^{(1)})S_-(z-z_1)]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [\varepsilon_{13}^{(1)} + (\varepsilon_{13}^{(2)} - \varepsilon_{13}^{(1)})S_-(z-z_1)]\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right\} =$$

$$=\left[\frac{1}{c_{2a}^{(1)2}}+\left(\frac{1}{c_{2a}^{(2)2}}-\frac{1}{c_{2a}^{(1)2}}\right)S_-(z-z_1)\right]\ddot{u}+\left[\beta_{11}^{*(1)}+(\beta_{11}^{*(2)}-\beta_{11}^{*(1)})S_-(z-z_1)\right]\frac{\partial t}{\partial x}+$$

$$+\left(1-\frac{c_{55}^{(2)}}{c_{55}^{(1)}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\left\{\left[\varepsilon_{55}^{(1)}+(\varepsilon_{55}^{(2)}-\varepsilon_{55}^{(1)})S_-(z-z_1)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left[\varepsilon_{13}^{*(1)}+(\varepsilon_{13}^{*(2)}-\varepsilon_{13}^{*(1)})S_-(z-z_1)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right\}=$$

$$=\left[\frac{1}{c_{1a}^{(1)2}}+\left(\frac{1}{c_{1a}^{(2)2}}-\frac{1}{c_{1a}^{(1)2}}\right)S_-(z-z_1)\right]\ddot{w}+\left[\beta_{33}^{*(1)}+(\beta_{33}^{*(2)}-\beta_{33}^{*(1)})S_-(z-z_1)\right]\frac{\partial t}{\partial z}+$$

$$+\left[\frac{\beta_{33}^{(2)}-\beta_{33}^{(1)}}{c_{33}^{(1)}}t+\frac{c_{13}^{(1)}-c_{13}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}\frac{\partial u}{\partial x}+\left(1-\frac{c_{33}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}\right)\frac{\partial w}{\partial z}\right]\Big|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1) \tag{4}$$

В уравнениях (3), (4) введены обозначения

$$K_i^{(i)}=\frac{\lambda_z^{(2)}}{\lambda_z^{(1)}},\quad k_i^{(j)}=\frac{\lambda_x^{(j)}}{\lambda_z^{(j)}},\quad \varepsilon_{11}^{(j)}=\frac{c_{11}^{(j)}}{c_{55}^{(j)}},\quad \varepsilon_{13}^{(j)}=\frac{c_{13}^{(j)}+c_{55}^{(j)}}{c_{55}^{(j)}},\quad \varepsilon_{13}^{*(j)}=\frac{c_{13}^{(j)}+c_{55}^{(j)}}{c_{33}^{(j)}}$$

$$\varepsilon_{55}^{(j)}=\frac{c_{55}^{(j)}}{c_{33}^{(j)}},\quad \beta_{11}^{*(j)}=\frac{\beta_{11}^{(j)}}{c_{55}^{(j)}},\quad \beta_{33}^{*(j)}=\frac{\beta_{33}^{(j)}}{c_{33}^{(j)}},\quad c_{1a}^{(j)2}=\frac{c_{33}^{(j)}}{\rho^{(j)}},\quad c_{2a}^{(j)2}=\frac{c_{55}^{(j)}}{\rho^{(j)}}\Bigg|_{j=1,2}$$

$\lambda_x^{(j)}$, $\lambda_z^{(j)}$, $a_i^{(j)}$ — коэффициенты тепло- и температуропроводности, $\rho^{(j)}$ — плотность, $\delta_-(\xi)=S_-'(\xi)$.

Динамические температурные напряжения определим по формулам [2], которые в данном случае примут вид

$$\sigma_{xx}=\left[c_{11}^{(1)}+(c_{11}^{(2)}-c_{11}^{(1)})S_-(z-z_1)\right]\frac{\partial u}{\partial x}+\left[c_{13}^{(1)}+(c_{13}^{(2)}-c_{13}^{(1)})S_-(z-z_1)\right]\frac{\partial w}{\partial z}-$$

$$-\left[\beta_{11}^{(1)}+(\beta_{11}^{(2)}-\beta_{11}^{(1)})S_-(z-z_1)\right]t$$

$$\sigma_{zz}=\left[c_{13}^{(1)}+(c_{13}^{(2)}-c_{13}^{(1)})S_-(z-z_1)\right]\frac{\partial u}{\partial x}+\left[c_{33}^{(1)}+(c_{33}^{(2)}-c_{33}^{(1)})S_-(z-z_1)\right]\frac{\partial w}{\partial z}-$$

$$-\left[\beta_{33}^{(1)}+(\beta_{33}^{(2)}-\beta_{33}^{(1)})S_-(z-z_1)\right]t \tag{5}$$

$$\sigma_{xz}=\left[c_{55}^{(1)}+(c_{55}^{(2)}-c_{55}^{(1)})S_-(z-z_1)\right]\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Решение уравнений (3), (4) ищем в виде

$$t(x,z,\tau)=\theta(z)\cos\omega_x x\exp(i\omega_\tau\tau) \tag{6}$$

$$u(x,z,\tau)=u_*(z)\sin\omega_x x\exp(i\omega_\tau\tau),\quad w(x,z,\tau)=w_*(z)\cos\omega_x x\exp(i\omega_\tau\tau) \tag{7}$$

Подставляя (6) в (3), а (7) в (4), получим

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}-\left[k_1^2+(k_2^2-k_1^2)S_-(z-z_1)\right]\theta=(1-K_i^{(i)})\frac{d\theta}{dz}\Big|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1) \tag{8}$$

$$\square_1^u(z)u_*+\square_1^w(z)w_*=0_1,\quad \square_2^u(z)u_*+\square_2^w(z)w_*=0_2 \tag{9}$$

где $k_j^2 = \omega_x^2 k_x^{(j)} + \frac{i\omega_*}{a_z^{(j)}}$, $\Box_1^u(z) = \frac{d^2}{dz^2} + \gamma_{11}^u + (\gamma_{12}^u - \gamma_{11}^u) S_-(z-z_1)$

$$\Box_1^w(z) = [\gamma_{11}^w + (\gamma_{12}^w - \gamma_{11}^w) S_-(z-z_1)]\frac{d}{dz}, \quad \Box_2^u(z) = [\gamma_{21}^u + (\gamma_{22}^u - \gamma_{21}^u) S_-(z-z_1)]\frac{d}{dz}$$

$$\Box_2^w(z) = \frac{d^2}{dz^2} + \gamma_{21}^w + (\gamma_{22}^w - \gamma_{21}^w) S_-(z-z_1), \quad \gamma_{1n}^u = \frac{\omega^2}{c_{55}^{(n)2}} - \omega_x^2 \varepsilon_{11}^{(n)}, \quad \gamma_{1n}^w = -\omega_x \varepsilon_{13}^{(n)}$$

$$\gamma_{2n}^u = \omega_x \varepsilon_{13}^{*(n)}, \quad \gamma_{2n}^w = \frac{\omega^2}{c_{33}^{(n)2}} - \omega_x^2 \varepsilon_{55}^{(n)} \quad [n=1,2],$$

$$\theta_1 = \left(1 - \frac{c_{55}^{(2)}}{c_{55}^{(1)}}\right)\left(\frac{du_\infty}{dz} - \omega_x w_\infty\right)\bigg|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1) - \omega_x [\beta_{11}^{*(1)} + (\beta_{11}^{*(2)} - \beta_{11}^{(1)}) S_-(z-z_1)]\theta(z)$$

$$\theta_2 = \left[\frac{\beta_{33}^{(2)} - \beta_{33}^{(1)}}{c_{33}^{(1)}}\theta + \omega_x \frac{c_{13}^{(1)} - c_{13}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}} u_\infty + \left(1 - \frac{c_{33}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}\right)\frac{dw_\infty}{dz}\right]\bigg|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1) +$$

$$+ [\beta_{33}^{*(1)} + (\beta_{33}^{*(2)} - \beta_{33}^{*(1)}) S_-(z-z_1)]\theta'(z)$$

Решение уравнения (8) имеет вид [3, 4]

$$\theta(z) = t_c \left[\frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(0)} S_+(z_1 - z) + \theta_2(z) S_-(z-z_1)\right] \tag{10}$$

где $\Delta_1(z) = k_1 \operatorname{ch} k_1(z-z_1) - K_1^{(2)} k_2 \operatorname{sh} k_1(z-z_1)$, $\theta_2(z) = \frac{k_1}{\Delta_1^{(0)}} \exp[-k_2(z-z_1)]$

Умножая (9) на $S_-(z-z_1)$ и производя замены

$$u_\infty S_-(z-z_1) = u_1, \quad w_\infty S_-(z-z_1) = w_1 \tag{11}$$

перепишем (9) в виде

$$\Box_{12}^u u_1 + \Box_{12}^w w_1 = \theta_1^*, \quad \Box_{22}^u u_1 + \Box_{22}^w w_1 = \theta_2^* \tag{12}$$

где $\theta_1^* = -D_1^{(j)} \exp(-k_2(z-z_1)) S_-(z-z_1) + u_\infty|_{z=z_1} \delta'_-(z-z_1) +$

$$+ \left(\frac{du_\infty}{dz} + \gamma_{12}^w w_\infty\right)\bigg|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1)$$

$$\theta_2^* = -D_2^{(j)} \exp(-k_2(z-z_1)) S_-(z-z_1) + w_\infty|_{z=z_1} \delta'_-(z-z_1) +$$

$$+ \left(\frac{dw_\infty}{dz} + \gamma_{22}^u u_\infty\right)\bigg|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1)$$

$$D_1^{(j)} = \frac{\beta_{11}^{*(j)} k_1 \omega_x t_c}{\Delta_1(0)}, \quad D_2^{(j)} = \frac{\beta_{33}^{*(j)} k_1 k_2 t_c}{\Delta_1(0)}, \quad \Box_{1n}^u = \frac{d^2}{dz^2} + \gamma_{1n}^u, \quad \Box_{1n}^w = \gamma_{1n}^w \frac{d}{dz}$$

$$\Box_{2n}^u = \gamma_{2n}^u \frac{d}{dz}, \quad \Box_{2n}^w = \frac{d^2}{dz^2} + \gamma_{2n}^w [n=1,2] .$$

Решение двух взаимосвязанных уравнений (12) представим в виде [5]

$$u_1 = \Box_{22}^w \varphi_1 - \Box_{12}^w \psi_1, \quad w_1 = \Box_{11}^u \psi_1 - \Box_{12}^u \varphi_1 \tag{13}$$

где φ_1, ψ_1 удовлетворяют уравнениям

$$\square^{(l)}\varphi_1=\theta_1^*, \quad \square^{(l)}\psi_1=\theta_2^* \qquad (14)$$

Здесь $\square^{(l)}=\square^u_{1l}\square^w_{2l}-\square^w_{1l}\square^u_{2l}$ $(l=1,2)$.

Решение уравнений (14) в зависимости от корней характеристического уравнения

$$s^4+a_l^{(n)}s^2+b_l^{(n)}=0 \qquad (15)$$

где $a_l^{(n)}=\gamma^u_{11n}+\gamma^w_{12n}-\gamma^w_{11n}\gamma^u_{12n}$, $b_l^{(n)}=\gamma^u_{11n}\gamma^w_{12n}$ $(n=1,2)$ имеет вид:

1) корни уравнения (15) вещественные и неравные

$$\varphi_1=C_1^*\exp(s_1^{(l)}z)+C_2^*\exp(-s_1^{(l)}z)+C_3^*\exp(s_2^{(l)}z)+C_4^*\exp(-s_2^{(l)}z)+\varphi_1^*$$

$$\psi_1=C_1^*\exp(s_1^{(l)}z)+C_2^*\exp(-s_1^{(l)}z)+C_3^*\exp(s_2^{(l)}z)+C_4^*\exp(-s_2^{(l)}z)+\psi_1^* \qquad (16)$$

2) корни вещественные и попарно равные

$$\varphi_1=(C_1^*+zC_2^*)\exp(s_2^{(l)}z)+(C_3^*+zC_4^*)\exp(-s_2^{(l)}z)+\varphi_1^*$$

$$\psi_1=(C_1^*+zC_2^*)\exp(s_2^{(l)}z)+(C_3^*+zC_4^*)\exp(-s_2^{(l)}z)+\psi_1^* \qquad (17)$$

3) корни комплексные. В этом случае следует положить $s_1^{(l)}=\mu^{(l)}+r^{(l)}i$, $s_2^{(l)}=\mu^{(l)}-r^{(l)}i$, $\mu^{(l)}$, $r^{(l)}>0$.

В (16), (17) φ_1^*, ψ_1^* — частные решения неоднородных уравнений (14). Используя для их нахождения метод вариации произвольных постоянных и учитывая, что согласно (11) $(u_1, w_1)|_{z<z_1}=0$ получим u_1 и w_1. Подставляя их в систему (9) с учетом (11), получим следующую систему уравнений для определения u_*, w_*:

$$\square^u_{11}u_*+\square^w_{11}w_*=\theta_1^{**}, \quad \square^u_{21}u_*+\square^w_{21}w_*=\theta_2^{**} \qquad (18)$$

где
$$\theta_1^{**}=-\omega_r\beta_{11}^{*(1)}l_r\frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(0)}S_+(z_1-z)-D_1^{(2)}\exp(-k_2(z-z_1))S_-(z-z_1)-$$
$$-(\gamma^u_{112}-\gamma^u_{111})u_1-(\gamma^w_{112}-\gamma^w_{111})\frac{dw_1}{dz}-(\gamma^w_{112}-\gamma^w_{111})w_*|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)+$$
$$+\left(1-\frac{c_{33}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}\right)\left(\frac{du_*}{dz}-\omega_r w_*\right)\Bigg|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)$$

$$\theta_2^{**}=\beta_{31}^{*(1)}l_r\frac{\Delta_1'(z)}{\Delta_1(0)}S_+(z_1-z)-D_2^{(2)}\exp(-k_2(z-z_1))S_-(z-z_1)-(\gamma^u_{122}-\gamma^u_{121})\frac{du_1}{dz}-$$
$$-(\gamma^w_{122}-\gamma^w_{121})w_1+(\gamma^u_{122}-\gamma^u_{121})u_*|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)+\left[\frac{\beta_{33}^{(2)}-\beta_{33}^{(1)}}{c_{33}^{(1)}}\theta+\right.$$
$$\left.+\omega_r\frac{c_{13}^{(1)}-c_{13}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}u_*+\left(1-\frac{c_{33}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}\right)\frac{du_*}{dz}\right]\Bigg|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)$$

Решение системы (18) имеет вид:

$$u_*(z)=u_*^+(z)S_+(z_1-z)+u_*^-(z)S_-(z-z_1)$$

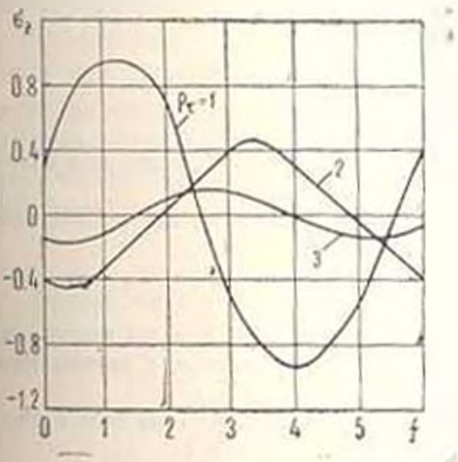
$$w_*(z)=w_*^+(z)S_+(z_1-z)+w_*^-(z)S_-(z-z_1)$$

Подставив (19), (20), в (7) и с учетом (5) получим выражения компонент тензора температурных напряжений. Неизвестные постоянные интегрирования определяются из граничных условий

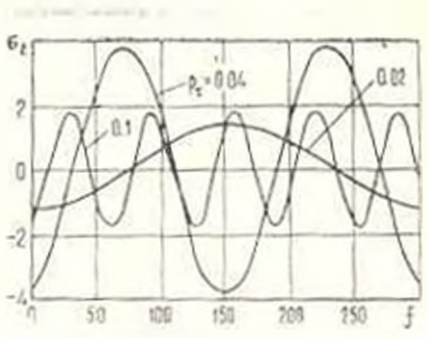
$$\sigma_{zz}=\sigma_{xz}=0 \quad \text{при} \quad z=0, \quad z\to\infty \tag{21}$$

Многие материалы обладают существенной анизотропией температурных коэффициентов линейного расширения. Предположим, что рассматриваемое составное полупространство состоит из двух состыкованных тел, обладающих ортотропией только в отношении температурных коэффициентов линейного расширения: $\alpha_x^{(1)}=\alpha_y^{(1)}=\alpha_{t(1)}$, $\alpha_z^{(1)}=\alpha_{t(2)}$, $\alpha_z^{(2)}=\alpha_{t(1)}$, $\alpha_x^{(2)}=\alpha_y^{(2)}=\alpha_{t(2)}$. Остальные физико-механические характеристики предполагаются изотропными. Исследуем распределение динамических температурных напряжений в предположении, что температура поверхности $z=0$ изменяется по закону

$$\theta_{z=0}=t_0\cos\omega_1 x\cos\omega t$$



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1, 2 представлены графики изменения динамических температурных напряжений на стыке $(z=z_1)$ покрытия и полупространства в зависимости от безразмерного времени $f=\frac{c_1^2 t}{a_1}$, различных значениях частотных параметров $p_x=\frac{\omega_1 a}{c_1}$, $p_t=\frac{\omega a}{c_1^2}$ и параметра K_*^{12}, характеризующего отношение температурных коэффициентов линейного расширения в направлении осей Ox и Oz. При этом принято $K_*^{12}=0.1$, $p_x=10$ (фиг. 1), $p_x=0.2$ (фиг. 2). Численные исследования, проведенные на ЭВМ ЕС—1060, показали, что при $p_x>1$, $p_t>1$ амплитуда напряжений с увеличением p_t уменьшается, тогда как при $p_t<1$, в диапазоне $0.04\leqslant p_t\leqslant 0.1$ существует максимум амплитуды напряжений σ_z.

TWO-LAYER ORTHOTROPIC HALF-SPACE HEATED BY THE OUTER MEDIUM

E. G. IVANIK

ԵՐԿՇԵՐՏ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՎ ՏԱՔԱՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ե. Գ. ԻՎԱՆԻԿ

Ամփոփում

Երկշերտ օրթոտրոպ կիսատարածության ջերմաառաձգական լարումնե որոշելու համար առաջարկված է ընդհանրացված ֆունկցիաների ապարա կիրառության վրա հիմնված եղանակ։ Կիսատարածությունը ենթարկվում ըստ կոորդինատի պարբերական և ըստ ժամանակի հարմոնիկ ջերմային ա զդեցության։ Խնդիրը բերված է ինտեգրալային տիպի գործակիցներով հավ ասարումների համակարգի լուծման կառուցմանը՝ տեղափոխությունների վե կտորի բաղադրիչները որոշելու համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров.—М.: Наука, 1975. 831 с.
2. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры.—М.: Наука, 1984. 368 с.
3. *Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем.—М.: Машиностроение, 1973. 659 с.
4. *Иваник Е. Г.* Одномерная динамическая задача термоупругости для кусочно-однородного полупространства.—В кн.: Математические методы в термомеханике. Киев: Наук. думка, 1978, с. 137—144.
5. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.—Киев: Наук. думка, 1972. 308 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редак
14.VI.1