ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 3, 1988 Механика

УДК 539.3

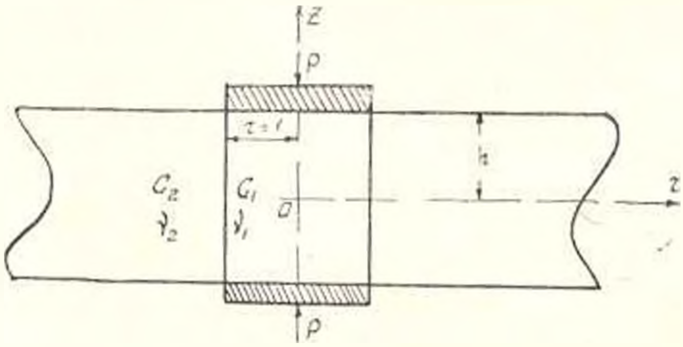
КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОГО СЛОЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ

МКРТЧЯН А. М., ПАПОЯН С. О.

Контактные задачи для цилиндра и слоя рассмотрены в многих работах. Контактная задача для составного слоя, когда плоский жесткий гладкий штамп перекрывает граничную линию цилиндрической поверхности контакта между слоем с отверстием и цилиндра, вложенного в это отверстие, рассмотрена в работе [1].

Из решения, приведенного в [1], трудно получить решение задачи в случае, когда штамп имеет радиус вложенного цилиндра.

Рассмотрим задачу для составного упругого слоя, состоящего из однородного слоя со сквозным цилиндрическим отверстием и вложенного в это отверстие цилиндра, имеющего размеры отверстия, и находящегося в условиях осесимметричной деформации (фиг. 1).



Фиг. 1.

На граничной поверхности слоя с цилиндрическим отверстием заданы нормальные нагрузки, а к торцам цилиндра приложены гладкие жесткие, симметрично расположенные штампы. Между составными частями слоя имеет место полное сцепление. Принято, что на всей плоскости $z=h$ касательные напряжения отсутствуют. Материал цилиндра характеризуется упругими постоянными G_1 и ν_1, а материал слоя—G_2, ν_2. В силу симметрии рассмотрим часть слоя, занимающую область $(0<z<h;\ r>0)$.

Для этой области граничные условия запишутся в следующем виде:

$$\tau_{rz}^{(1)}(1,z)=\tau_{rz}^{(2)}(1,z);\quad \sigma_r^{(1)}(1,z)=\sigma_r^{(2)}(1,z),\quad (0<z<h)$$

$$U_z^{(1)}(1,z)=U_z^{(2)}(1,z);\quad U_r^{(1)}(1,z)=U_r^{(2)}(1,z) \tag{1.1}$$

$$\tau_{rz}^{(2)}(r,h)=0;\quad \sigma_z^{(2)}(r,h)=\sigma_2(r);\quad (1<r<\infty) \tag{1.2}$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(r,h)=0;\quad U_z^{(1)}(r,h)=c;\quad (0<r<1) \tag{1.3}$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(r,0)=0;\quad U_z^{(1)}(r,h)=0;\quad (0<r<1)$$

$$\tau_{rz}^{(2)}(r,0)=0;\quad U_z^{(2)}(r,0)=0;\quad (1<r<\infty) \tag{1.4}$$

2. Бигармонические функции напряжений Лява для цилиндра и слоя представляем, соответственно, в виде [1, 2].

$$\Phi_1(r,z)=z(E_0z^2+F_0r^2)+\sum_{k=1}^{\infty}[C_k^{(1)}I_0(\mu_kr)+D_k^{(1)}\mu_krI_1(\mu_kr)]\sin\mu_kz$$

$$(0\leqslant r\leqslant 1);\quad (0\leqslant z\leqslant h) \tag{2.1}$$

$$\Phi_2(r,z)=H_0z\ln r+\sum_{k=1}^{\infty}[C_k^{(2)}K_0(\mu_kr)+D_k^{(2)}\mu_krK_1(\mu_kr)]\sin\mu_kz+$$

$$+\int_0^{\infty}[A(\mu)\operatorname{sh}\mu z+B(\mu)\mu z\operatorname{ch}\mu z]W_0(\mu r)d\mu,\quad (1\leqslant r<\infty);\ (0\leqslant z\leqslant h) \tag{2.2}$$

где $\mu_k=\pi k/h$, $I_n(x)$ и $K_n(x)$ — функции Бесселя [3], а $W_n(\mu r)$ есть функции Вебера, которые определяются по формулам

$$W_n(\mu r)=I_n(\mu r)Y_1(\mu)-Y_n(\mu r)I_1(\mu) \tag{2.3}$$

Функции $A(\mu)$ и $B(\mu)$, а также коэффициенты $C_k^{(i)}$ и $D_k^{(i)}$ $(i=1;2)$, входящие в (2.1) и (2.2), подлежат определению из условий (1.1)—(1.4).

При помощи известных соотношений компоненты напряжений и перемещений выражаются при помощи бигармонических функций Лява [2].

Из (2.1) и (2.2) следует, что условия (1.4) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя условиям (1.1)—(1.3), получим

$$[3(1-2\nu_1)E_0+4(1-\nu_1)F_0]\frac{h}{G_1}=C,\quad 6\nu_1E_0-2(1-2\nu_1)F_0=H_0$$

$$[A(\mu)+2\nu_2B(\mu)]\operatorname{sh}\mu h+\mu hB(\mu)\operatorname{ch}\mu h=0;\quad 2F_0=GH_0$$

$$\tilde{C}_k^{(1)}=\tilde{D}_k^{(1)}\left[\frac{2(1-\nu_1)G}{1-G}-\mu_k\chi_{k1}\right]-\tilde{D}_k^{(2)}\frac{2(1-\nu_2)G}{1-G};\quad G=\frac{G_1}{G_2}$$

$$\tilde{C}_k^{(2)}=\tilde{D}_k^{(2)}\left[\frac{2(1-\nu_2)}{1-G}-\mu_k\chi_{k2}\right]-\tilde{D}_k^{(1)}\frac{2(1-\nu_1)}{1-G} \tag{2.4}$$

$$B^*(\mu)T(\mu)=\tilde{\varphi}_2(\mu)+\frac{W_0(\mu)}{\Delta(\mu)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k}{\mu^2+\mu_k^2}\times$$
$$\times\left\{\tilde{D}_k^{(2)}\left[\frac{2(1-\nu_2)G}{G-1}+\frac{2\mu^2}{\mu^2+\mu_k^2}\right]-\frac{2(1-\nu_1)}{G-1}\tilde{D}_k^{(1)}\right\}$$

$$\tilde{D}_k^{(1)}S_1(\mu_k)-G\tilde{D}_k^{(2)}S_2(\mu_k)=\frac{8G}{\pi h}\int_0^{\infty}\frac{\mu B^*(\mu)}{\mu^2+\mu_k^2}\left[\frac{\mu_k^2}{\mu^2+\mu_k^2}-(1-\nu_2)\right]d\mu \tag{2.5}$$

$$\tilde{D}_k^{(1)}S_3(\mu_k)-\tilde{D}_k^{(2)}S_4(\mu_k)=\frac{8\mu_k^2}{\pi h}\int_0^{\infty}\frac{\mu B^*(\mu)}{(\mu^2+\mu_k^2)^2}d\mu$$

В (2.4) и (2.5) введены следующие обозначения:

$$\tilde{C}_k^{(1)}=(-1)^k\mu_k^3C_k^{(1)}I_1(\mu_k);\quad \tilde{D}_k^{(1)}=(-1)^k\mu_k^3D_k^{(1)}I_1(\mu_k)$$
$$\tilde{C}_k^{(2)}=(-1)^k\mu_k^3C_k^{(2)}K_1(\mu_k);\quad \tilde{D}_k^{(2)}=(-1)^k\mu_k^3D_k^{(2)}K_1(\mu_k) \tag{2.6}$$

$$S_1(\mu_k)=\Lambda_k^{(2)}+\frac{2(1-\nu_1)G}{1-G}Q_k;\quad S_2(\mu_k)=V_k^{(2)}+\frac{2(1-\nu_2)}{1-G}Q_k$$

$$S_3(\mu_k)=N_k+\frac{2(1-\nu_1)}{1-G}Q_k;\quad S_4(\mu_k)=L_k+\frac{2(1-\nu_2)G}{1-G}Q_k$$

$$\chi_{k1}=\frac{I_0(\mu_k)}{I_1(\mu_k)};\quad \chi_{k2}=\frac{K_0(\mu_k)}{K_1(\mu_k)};\quad Q_k=\chi_{k1}+\chi_{k2}$$

$$N_k=\mu_k[1-\chi_{k1}^2]+\frac{2(1-\nu_1)}{\mu_k};\quad L_k=\mu_k[1-\chi_{k2}^2]+\frac{2(1-\nu_2)}{\mu_k}$$

$$\Lambda_k^{(2)}=\mu_k[1-\chi_{k1}^2]+4(1-\nu_1)\chi_{k1};\quad V_k^{(2)}=\mu_k[1-\chi_{k2}^2]-4(1-\nu_2)\chi_{k2} \tag{2.7}$$

$$B^*(\mu)=\mu^2B(\mu)\,\mathrm{sh}\,\mu h;\quad \tilde{\varphi}_2(\mu)=\frac{1}{\Delta(\mu)}\int_1^{\infty}r\varphi_2(r)W_0(\mu r)dr;\quad G=\frac{G_1}{G_2}$$

Установим асимптотическое поведение неизвестных систем (2.5) для больших значений μ и μ_k. Для этого предположим [4], что имеют место следующие порядки убывания:

$$B^*(\mu)\sim\frac{B_0}{\mu^{\gamma}};\quad \tilde{D}_k^{(1)}\sim\frac{D_0^{(1)}}{\mu_k^{\alpha}};\quad \tilde{D}_k^{(2)}\sim\frac{D_0^{(2)}}{\mu_k^{\beta}} \tag{2.8}$$

При больших значениях μ и μ_k с учетом асимптотических поведений функций Бесселя и Вебера [5], а также (2.8) уравнения (2.5) можно записать в виде

$$\frac{D_0^{(1)}}{\mu_k^{\alpha}}\delta_1+\frac{D_0^{(2)}}{\mu_k^{\beta}}G\delta_2=\frac{8GB_0}{\pi h}\int_0^{\infty}\frac{\mu^{1-\gamma}}{\mu_k^2+\mu^2}\left[(1-\nu_2)-\frac{\mu_k^2}{\mu_k^2+\mu^2}\right]d\mu$$

$$\frac{D_0^{(1)}}{\mu_k^\alpha}\delta_1+\frac{D_0^{(2)}}{\mu_k^\beta}\delta_2=-\frac{8\mu_k^2 B_0}{\pi h}\int_0^\infty\frac{\mu^{1-\gamma}}{(\mu_k^2+\mu^2)^2}d\mu \tag{2.9}$$

$$\frac{B_0}{\mu^\gamma}=\frac{2(1-\nu_1)}{G-1}D_0^{(1)}\sum_{k=1}^\infty\frac{\mu_k^{1-\alpha}}{\mu_k^2+\mu^2}-D_0^{(2)}\sum_{k=1}^\infty\frac{\mu_k^{1-\beta}}{\mu_k^2+\mu^2}\left[\frac{2(1-\nu_2)}{G-1}G+\frac{2\mu^2}{\mu_k^2+\mu^2}\right]$$

где

$$\delta_1=1+\frac{4(1-\nu_1)}{G-1};\quad \delta_2=1-\frac{4(1-\nu_2)G}{G-1} \tag{2.10}$$

Используя оценку [6]

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{k}f\left(\frac{n}{k}\right)=\int_0^\infty f(x)dx \tag{2.11}$$

с учетом значений интегралов

$$\int_0^\infty\frac{\mu^{1-\gamma}d\mu}{\mu^2+\mu_k^2}=\frac{\pi}{2\mu_k^\gamma\sin\frac{\pi\gamma}{2}};\quad \int_0^\infty\frac{\mu^{1-\gamma}}{(\mu^2+\mu_k^2)^2}d\mu=\frac{\pi\gamma}{4\mu_k^{2+\gamma}\sin\frac{\pi\gamma}{2}} \tag{2.12}$$

и асимптотических значений сумм для больших

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{\mu_k^{1-\alpha}}{\mu_k^2+\mu^2}\sim\frac{h}{2\mu^\alpha\sin\frac{\pi\alpha}{2}};\quad \sum_{k=1}^\infty\frac{\mu_k^{1-\alpha}}{(\mu_k^2+\mu^2)^2}\sim\frac{\alpha h}{4\mu^{2+\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}} \tag{2.13}$$

получим, что $\alpha=\beta=\gamma$ и

$$N[D_0^{(1)}\delta_1+D_0^{(2)}G\delta_2]=4GB_0^{(1)}[(1-\nu_2)-\theta];\quad N[D_0^{(1)}\delta_1+D_0^{(2)}\delta_2]=-4B_0^{(1)}\theta \tag{2.14}$$

$$NB_0^{(1)}=\frac{1-\nu_1}{G-1}D_0^{(1)}-D_0^{(2)}\left[\theta+\frac{(1-\nu_2)G}{G-1}\right]$$

где

$$N=\sin\frac{\pi\alpha}{2}=\sin\pi\theta;\quad \theta=\frac{\alpha}{2};\quad B_0^{(1)}=\frac{B_0}{h} \tag{2.15}$$

Система (2.14) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Это приводит к следующему трансцендентному уравнению для определения α.

$$4\delta_1\delta_2\sin^2\frac{\pi\alpha}{2}+(1-\delta_2)(\delta_1-\delta_2)-4\alpha^2\delta_1=0 \tag{2.16}$$

Для выяснения поведения напряжений на концах поверхности контакта подставим (2.8) в выражения контактных напряжений $\sigma_r(r,z)$ и $\tau_{rz}(r,z)$. Выделяя главные части при $r\to1$ и $z\to h$ с учетом асимптотических значений интегралов и рядов [4–6]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \mu_k z}{\mu_k^{\alpha}} \sim \frac{h}{4\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \frac{1}{(h-z)^{1-\alpha}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \mu_k z}{\mu_k^{\alpha}} \sim -\frac{h}{4\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}} \frac{1}{(h-z)^{1-\alpha}} \tag{2,17}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\mu W(\mu r)}{\mu^{\alpha}} d\mu \sim -\frac{2}{\pi\sqrt{r}} \frac{\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}{(r-1)^{1-\alpha}}$$

получим

$$\tau_{rz}^{(1)}(r,z)\underset{\substack{r\to 1\\ z\to h}}{\sim} \frac{\tau_0}{(h-z)^{1-\alpha}}; \quad \tau_{rz}^{(2)}(r,z)\underset{\substack{r\to 1\\ z\to h}}{\sim} \frac{\tau_0}{(h-z)^{1-\alpha}}$$

$$\sigma_r^{(1)}(r,z)\underset{\substack{r\to 1\\ z\to h}}{\sim} \frac{\sigma_0^{(1)}}{(h-z)^{1-\alpha}}; \quad \sigma_z^{(2)}(r,z)\underset{\substack{r\to 1\\ z\to h}}{\sim} \frac{\sigma_0^{(2)}}{(h-z)^{1-\alpha}} + \frac{\sigma_1^{(2)}}{(r-1)^{1-\alpha}} \tag{2.18}$$

где

$$\sigma_0^{(1)} = \frac{h}{4\pi}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}[D_0^{(1)}(\delta_1+1)+D_0^{(2)}(\delta_2-1)]$$

$$\sigma_0^{(2)} = -\frac{h}{4\pi}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}[D_0^{(1)}(\delta_1-1)+D_0^{(2)}(\delta_2+1)]$$

$$\tau_0 = \frac{h}{4\pi}\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}[D_0^{(1)}(\delta_1-1)+D_0^{(2)}(\delta_2-1)] \tag{2.19}$$

$$\sigma_1^{(2)} = -\frac{2hB_0^{(1)}}{\pi}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$$

Из (2.14) и (2.18) следует, что мы должны ограничиться корнями (2.16), расположенными в интервале $(0<\alpha<1)$, которые зависят только от двух комбинаций δ_1 и δ_2 четырех упругих постоянных ν_1; ν_2; G_1; G_2. Решая (2.16) для одного случая δ_1; δ_2, будем иметь решение для нескольких значений ν_1; ν_2; G_1/G_2.

Легко видеть, что $\alpha=0$ не является корнем уравнения (2.16). Следовательно, при $k\to\infty$; $\mu\to\infty$; $B^*(\mu)$; $\tilde{D}_k^{(1)}$; $\tilde{D}_k^{(2)}$ (2.8) убывают со скоростью $k^{-\alpha}$ и $\mu^{-\alpha}$. В частном случае, когда материалы составляющих частей одинаковы $G_1=G_2$; $\nu_1=\nu_2$, получаем уравнение $\sin^2\pi\theta=1/2$, корень которого $(0<\alpha<1)$ определяется непосредственно $\theta=1/4$; $\alpha=1/2$.

Из (2.18) следует, что особенность у конца штампа, действующего на однородный слой, имеет известный порядок $\alpha=1/2$. В общем случае трансцендентное уравнение совпадает с уравнением, полученным в [7] для плоской задачи, когда трещина, находящаяся в одном теле, упирается в полуплоскость из другого материала под прямым углом.

В таблице приведены значения корней $0<\alpha<1$ уравнения (2.16) при различных соотношениях ν_1; ν_2; $G=G_1/G_2$ и соответствующие им порядки особенностей $\gamma=1-\alpha$.

Таблица

$G=\dfrac{G_2}{G_1}$	$\nu_1=\nu_2=0.3$		$\nu_1=0.3,\ \nu_2=0.35$	
	α	γ	α	γ
100	0.7061	0.2939	0.6754	0.3246
10	0.6672	0.3328	0.6417	0.3583
1.02	0.5020	0.4980	0.2906	0.5094
1.0	0.5000	0.5000	0.4886	0.5114
0.1	0.2464	0.7536	0.2392	0.7608
0.01	0.0852	0.9148	0.0822	0.9178
0.001	0.0272	0.9728	0.0262	0.9738

При получении уравнений (2.5) контактное условие равенства нормальных перемещений использовано в дифференцированном виде. Если использовать это условие в первоначальном виде, то второе уравнение (2.5) будет иметь вид

$$\bar{D}_k^{(1)}S_1(\mu_k)-G\bar{D}_k^{(2)}S_2(\mu_k)=4[3(1-2\nu_1)E_0+4(1-\nu_1)F_0]+$$

$$+\frac{8G\mu_k^2}{\pi h}\int_0^\infty\frac{B^*(\mu)\operatorname{sh}\mu h}{\mu(\mu^2-\mu_k^2)^2}\left[(1-\nu_2)(\mu^2+\mu_k^2)-\mu^2\right]d\mu \tag{2.20}$$

и

$$\frac{2(1-\nu_2)G}{\pi}\int_0^\infty\frac{B^*(\mu)}{\mu}d\mu=-h[3(1-2\nu_1)E_0+4(1-\nu_1)F_0]=$$

$$=\frac{CG_1[(1-G)-2(1-\nu_1)]}{G+(1-2\nu_1)} \tag{2.21}$$

Из (2.5), (2.20) и (2.21) следует, что все неизвестные $\bar{D}_k^{(1)}$; $\bar{D}_k^{(2)}$ и $B^*(\mu)$ прямо пропорциональны осадку штампа C.

Выражения нормального напряжения под штампом через $\bar{D}_k^{(1)}$; $\bar{D}_k^{(2)}$ и $B^*(\mu)$ записывается в виде

$$\sigma_z^{(1)}(r,h)=\frac{CG_1[2(1-\nu_2)+2(1+\nu_1)G]}{h[(1-2\nu_2)+G]}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\bar{D}_k^{(1)}\left[\left(\frac{2(1-\nu_1)}{1-G}+2-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\mu_k\chi_{k1}\right)I_0(\mu_k r)+\mu_k r I_1(\mu_k r)-\bar{D}_k^{(2)}\frac{2(1-\nu_2)G}{1-G}I_0(\mu_k r)\right]\right\}\frac{1}{I_1(\mu_k)}$$

Следовательно, интеграл напряжений, действующих под штампом, также будет прямо пропорционален осадку штампа.

CONTACT PROBLEM FOR A COMPOSITE LAYER WITH THE CYLINDRICAL SURFACE OF MATERIAL SEPARATION

A. M. MKRTCHIAN, S. O. PAPOIAN

ՆՅՈՒԹԵՐԻ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹ ՈՒՆԵՑՈՂ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Ս. Հ. ՊԱՊՈՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է բաղադրյալ շերտի կոնտակտային խնդիր, երբ հարթ կոշտ դրոշմը կիրառված է շերտի մեջ դրված գլանի ճակատներին։

Խնդիրը բերված է անվերջ գծային հանրահաշվական և երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի։

Պարզված է անհայտների ասիմպտոտիկ վարքը։ Որոշված է կոնտակտային լարումների եզակիությունների կարգը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Папоян С. О.* Осесимметричная контактная задача для составного упругого слоя.— В сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела, вып. 2.— Ереван: Изд. АН АрмССР, 1983, с. 120—125.
2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Некоторые осесимметричные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1969, т. 22, № 2, с. 3—13.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 2. М.: Наука, 1977, 295 с.
4. *Гринченко В. Т., Коваленко А. Д., Улитко А. Ф.* Анализ напряженного состояния жестко-защемленной пластинки на основе решения пространственной задачи теории упругости.— Тр. VII Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин.— М.: 1970, с. 205—211.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1108 с.
6. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. К.: Наукова думка, 1978, 264 с.
7. *Erdogan F. E., Gupta G. D., Cook T. S.* Numerical solution of singular integral eguations.—Noord—hoff Intern. Publ. Leyden, 1973, p. 368—425.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
5.VIII.198