

УДК 539.3:632.59

О ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ ГИБКИХ ПЛАСТИН И  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Как известно, дисперсионное уравнение для линейной среды одинаково как для бегущих, так и для стоячих волн. В случае нелинейных волн в зависимости от подхода задачи получают различные зависимости. В настоящей заметке приводятся нелинейные уравнения для пластины и оболочки при больших перемещениях. Оказывается, сохранение или пренебрежение продольного инерционного члена в системе уравнений движения существенно меняет картину поведения волн модуляции при анализе на устойчивость. Для простоты это показано на примере одномерных задач.

1. Уравнения движения пластинки имеют вид [1]

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( T_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \epsilon_1, \quad M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \kappa, \quad \epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Как принято в теории нелинейных изгибных колебаний, обычно инерционным членом первого уравнения (1.1) пренебрегают [1] и для основной частоты шарнирно закрепленной ( $u = w = M = 0$ ) пластинки получено выражение

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{9}{4} \frac{a^2}{h^2} \right), \quad \omega_0^2 = \frac{E\pi^4}{12\rho(1-\nu^2)} \frac{h^3}{l^4} \tag{1.2}$$

Этот же результат можно получить отличным от [1] путем, если представить решение (1.1) в виде  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \right)$

$$u = \varphi(t) \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad w = f(t) \sin \frac{\pi x}{l} \tag{1.3}$$

Для бегущих волн (бесконечная среда) решение (1.1) также можно брать в форме (1.3), то есть

$$u = b \sin 2\tau, \quad w = a \sin \tau, \quad \tau = kx - \omega t \tag{1.4}$$

где  $a, b, k$  — постоянные.

Тогда получится следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{3a^2}{h^2} \right), \quad \omega_0^2 = \frac{Eh^2 k^4}{12(1-\nu^2)}$$

при этом  $T_1 = \frac{Eh}{4(1-\nu^2)} a^2 k^2$ .

Систему (1.1) можно решать методом медленно меняющихся амплитуд [2] без дополнительного предположения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ .

Если искать решение в виде

$$u = u_0 + u_2 e^{2i\tau} + \bar{u}_2 e^{-2i\tau}, \quad w = w_1 e^{i\tau} + \bar{w}_1 e^{-i\tau}$$

где амплитуды — медленно меняющиеся функции от  $x$  и  $t$ , и приравняв члены при одинаковых гармониках, получим

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} \approx -k^2 \bar{w}_1 \bar{w}_1 \left( 1 + \frac{1}{3} k^2 h^2 \right), \quad u_2 = -\frac{i k}{4} \bar{w}_1^2 \left( 1 + \frac{1}{12} k^2 h^2 \right)$$

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} k^4 a^2 \left( -\frac{1}{3} w_1 \bar{w}_1 + \frac{1}{24} w_1^2 e^{2i\tau} \right)$$

При получении (1.7) учитывалось, что, так как основной является изгибающая волна, для которой отгибающая имеет скорость  $c = \frac{\partial \omega}{\partial k}$  (групповая скорость), то в уравнении для  $u_2$  можно полагать  $\frac{\partial}{\partial t} \approx c \frac{\partial}{\partial x}$  и, кроме того, принималось, что гам, где  $\omega = 0$ , равно нулю и  $\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$ .

Теперь дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{9}{2} a^2 k^2 \right), \quad a^2 = w_1 \bar{w}_1$$

Следует отметить, что если в (1.6) добавить члены  $w_0$  и  $\bar{w}_0$  (и соответствующие сопряженные), то в порядке  $a^2$  дисперсионное соотношение (1.8) не меняется.

Сравнивая (1.5) и (1.8), можно заметить отличие не только в знаке, но и знака нелинейного члена. Как известно [2, 3], при выполнении (1.8) волновые пакеты неустойчивы  $\left( \frac{d^2 \omega_0}{dk^2} \frac{\partial w_0}{\partial a^2} < 0 \right)$  и распадаются на солитоны, в то время, как при выполнении (1.5) они устойчивы.

Такое отличие связано с удержанием в (1.1) инерционного члена  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . При решении (1.4) на линиях  $\tau = \text{const}$  равны нулю  $w_0$  и  $\bar{w}_0$ , а при (1.6) на этих линиях вместо  $u=0$ , по-видимому, выполняется  $T_1 \approx 0$  (оно, вообще, малое). И это приводит к тому, что для

ных волн в (1.8) нелинейное и линейное дисперсионные соотношения совпадают.

2. Этот же метод [2] можно применить при изучении одномерных осесимметричных волн в цилиндрической оболочке при геометрической нелинейности. Тогда в левой части второго уравнения необходимо добавить член  $T_1/R$ , где уже

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \varepsilon_1), \quad \varepsilon_1 = -\frac{w}{R} \quad (2.1)$$

Решение системы (2.1) ищется в виде

$$u = u_0 + \sum_{m=1}^{\infty} u_m e^{im\theta} + \text{к. с.}, \quad w = w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} w_m e^{im\theta} + \text{к. с.} \quad (2.2)$$

и для дисперсионного уравнения имеем

$$\omega = \omega_0(1 - Aa^2), \quad \omega_0^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} X, \quad X = \frac{h^2 k^4}{12} + \frac{1-\nu^2}{R^2} \quad (2.3)$$

$$A = \frac{E k^2}{2\rho(1-\nu^2)\omega_0^2} - \frac{18X^2 + k^2 h^4}{18X}$$

Приведенная в [3] формула (2.10) для  $a = \omega a^2$  не верна и часть, касающаяся геометрической нелинейности, должна быть заменена на (2.3).

## ON DISPERSION EQUATIONS FOR FLEXIBLE PLATE AND CYLINDRICAL SHELL.

A. G. BAGDOEV, L. A. KOVSISIAN

### ՀԱՌԻՆ ՍԱՐԻ ԵՎ ԳՎԱՆԱՅԻՆ ԹԱՎԱՆԹԻ ԳԻՍՊԵՐՍԻՈՆ ԶԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԻՍՍՈՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՎ, Լ. Ա. ԿՈՎՍԻՍԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Ճ

Սարի և գլանային թաղանթի Նամար ստացված են միաշափ գիսպերսիոն Նախասարուժները՝ մեծ հզվածրնների դեպքում: Տեսլը է տրված, որ էրկայնական անդափոխությունից առաջացած իներցիոն անդամի արձամարումը բերում է ալիքային փաթեթի կայունության, իսկ այն Նաչիի առնելը՝ անկայունության:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Волмир И. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. Уилем Д. М. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
3. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Квазипрограммические волны изгиба в нелинейно-упругих пластинках. Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 169-176.
4. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Некоторые задачи по устойчивости распространения нелинейных волн. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1984, т. 37, № 2, с. 3-11.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
23.VI 1987