

УДК 539.3

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТРЕХ СООСНЫХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ, ИМЕЮЩИХ КОНЕЧНЫЕ ДЛИНЫ И РАЗНЫЕ ДИАМЕТРЫ

ЗАРГАРЯН С. С., МАРТИРОСЯН З. А.

Рассматривается осесимметричная контактная задача теории упругости для трех соосных цилиндров, имеющих конечные длины и разные диаметры. Цилиндры контактируют между собой торцами. Контакт между цилиндрами предполагается гладким, то есть без сцепления, а зоны контакта считаются неизвестными. Для простоты принимается, что на боковых поверхностях цилиндров нормальные и касательные напряжения равны нулю. На свободных торцах цилиндров приложены симметрично расположенные сжимающие нагрузки таким способом, что обе контактные области образуются в виде круга.

Решение рассматриваемой задачи представляется в виде суммы рядов Фурье и Фурье-Дини с неизвестными коэффициентами, для определения которых получены три бесконечные системы со свободными членами, стремящимися к нулю и две системы парных рядов уравнений, содержащих функции Бесселя, решение которых сводится к решению квазивполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. Окончательные выражения для контактных напряжений получены с выделенной особенностью.

Подробная библиография по этому вопросу приводится в [1].

Для решения описанной задачи величины, относящиеся к верхнему, среднему и нижнему цилиндрам, будем отмечать соответственно индексами 1, 2 и 3 (фиг. 1).

Граничные условия и условия контакта рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(i)}(r, l_i) &= F_i(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} J_0(\beta_{ki} r) & (i=1, 3) \\ \tau_{rz}^{(i)}(r, 0) &= \tau_{rz}^{(i)}(r, l_i) = 0 & (i=1, 2, 3) \\ \tau_{rz}^{(i)}(R_i, z) &= \sigma_r^{(i)}(R_i, z) = 0 & (i=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_z^{(1)}(r, 0) = -u_z^{(2)}(r, 0) & 0 \leq r \leq c_1 \\ \sigma_z^{(1)}(r, 0) = 0 & c_1 < r < R_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) & 0 \leq r < c_1 \\ \sigma_r^{(1)}(r, 0) = 0 & c_1 < r < R_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_z^{(2)}(r, l_2) = u_z^{(3)}(r, 0) & 0 \leq r \leq c_2 \\ \sigma_z^{(2)}(r, l_2) = 0 & c_2 < r < R_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_z^{(2)}(r, l_2) = \sigma_z^{(3)}(r, 0) & 0 \leq r < c_2 \\ \sigma_r^{(2)}(r, 0) = 0 & c_2 < r < R_2 \end{cases}$$

где l_i ($i=1, 2, 3$)—длины, R_i —радиусы цилиндров, $J_n(x)$ —функция Бесселя действительного аргумента первого рода, β_{ki} —положительные корни уравнения $J_n(\beta_{ki}R_i)=0$, а c_i ($i=1, 3$)—размеры области контакта двух цилиндров.

Функции напряжения Лява ищем в виде

$$\Phi^{(i)}(r, z) = z(A_i r^2 + B_i z^2 + C_i z) + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k^{(i)} I_0(\lambda_{ki} r) + G_k^{(i)} \lambda_{ki} r I_1(\lambda_{ki} r)] \sin \lambda_{ki} z + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(i)} \operatorname{sh} \beta_{ki} z + B_k^{(i)} \operatorname{ch} \beta_{ki} z + C_k^{(i)} \beta_{ki} z \operatorname{sh} \beta_{ki} z + D_k^{(i)} \beta_{ki} z \operatorname{ch} \beta_{ki} z) J_0(\beta_{ki} r) \quad (2)$$

где $I_n(x)$ —функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента, $\lambda_{ki} = k\pi/l_i$ ($i=1, 2, 3$), $c_2=0$.

Пользуясь обычными формулами [2] и вычисляя при помощи (2) напряжения и перемещения, удовлетворим далее условиям (1), получим следующие соотношения:

$$A_i = \frac{\nu_i}{2(1+\nu_i)} a_0^{(i)}, \quad B_i = \frac{1-2\nu_i}{6(1+\nu_i)} a_0^{(i)} \quad (i=1, 3), \quad -2(1-2\nu_2)A_2 + 6\nu_2 B_2 = 0 \quad (3)$$

$$E_k^{(i)} I_1(\lambda_{ki} R_i) + G_k^{(i)} [2(1-\nu_i) I_1(\lambda_{ki} R_i) + \lambda_{ki} R_i I_0(\lambda_{ki} R_i)] = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

$$B_k^{(i)} + 2\nu_i C_k^{(i)} = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

$$A_k^{(i)} \operatorname{sh} \mu_{ki} + C_k^{(i)} \mu_{ki} \operatorname{sh} \mu_{ki} + D_k^{(i)} (\mu_{ki} \operatorname{ch} \mu_{ki} + 2\nu_i \operatorname{sh} \mu_{ki}) = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

$$-A_k^{(i)} \operatorname{ch} \mu_{ki} - C_k^{(i)} (\mu_{ki} \operatorname{ch} \mu_{ki} - \operatorname{sh} \mu_{ki}) - D_k^{(i)} [\mu_{ki} \operatorname{sh} \mu_{ki} - (1-2\nu_i) \operatorname{ch} \mu_{ki}] = \frac{\alpha_k^{(i)} + P_{ki}}{\mu_{ki}} \quad (i=1, 3)$$

$$(1-2\nu_1)C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [\beta_{k1}^2 (1-\nu_1) C_k^{(1)} J_0(\beta_{k1} r) + \beta_{k2}^2 (1-\nu_2) C_k^{(2)} J_0(\beta_{k2} r)] = 0 \quad 0 \leq r \leq c_1$$

$$a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k1}^2 [-A_k^{(1)} + (1-2\nu_1) D_k^{(1)}] J_0(\beta_{k1} r) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k1} J_0(\beta_{k1} r) \quad c_1 < r < R_1 \quad (5)$$

$$4(1-\nu_2)A_2 + 3(1-2\nu_2)B_2 - G^* (1-2\nu_2)C_3 + \sum_{k=1}^{\infty} [\beta_{k2}^2 (1-\nu_2) (C_k^{(2)} \operatorname{ch} \mu_{k2} + \\ + D_k^{(2)} \operatorname{sh} \mu_{k2}) J_2(\beta_{k2} r) - \beta_{k3}^2 (1-\nu_3) G^* C_k^{(3)} J_0(\beta_{k3} r)] = 0 \quad 0 \leq r \leq c_3$$

$$4(2-\nu_2)A_2 + 6(1-\nu_2)B_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k2}^2 [-A_k^{(2)} \operatorname{ch} \mu_{k2} - C_k^{(2)} (\mu_{k2} \operatorname{ch} \mu_{k2} - \operatorname{sh} \mu_{k2}) - \quad (6)$$

$$-D_k^{(2)} [\mu_{k2} \operatorname{sh} \mu_{k2} - (1-2\nu_2) \operatorname{ch} \mu_{k2}]] J_0(\beta_{k2} r) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k2} J_0(\beta_{k2} r) \quad c_3 < r < R_2$$

$$a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} [\beta_{k1}^2 [-A_k^{(1)} + (1-2\nu_1) D_k^{(1)}] - P_{k1}] J_0(\beta_{k1} r) - 4(2-\nu_2)A_2 + 6(1-\nu_2)B_2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \{ \beta_{k2}^3 [-A_k^{(2)} + (1-2\nu_2)D_k^{(2)}] - P_{k2} \} J_0(\beta_{k2}r) \quad 0 \leq r < c_1 \quad (7)$$

$$4(2-\nu_2)A_2 + 6(1-\nu_2)B_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \beta_{k2}^3 [-A_k^{(2)} + (1-2\nu_2)D_k^{(2)}] - P_{k2} \} J_0(\beta_{k2}r) = 0 \quad c_1 < r < R_2$$

$$4(2-\nu_2)A_2 + 6(1-\nu_2)B_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \beta_{k2}^3 [-C_k^{(2)} (\mu_{k2} \operatorname{ch} \mu_{k2} - \operatorname{sh} \mu_{k2}) - D_k^{(2)} \mu_{k2} \operatorname{sh} \mu_{k2} - (1-2\nu_2) \operatorname{ch} \mu_{k2}] - A_k^{(2)} \operatorname{ch} \mu_{k2} \} J_0(\beta_{k2}r) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k2}^* J_0(\beta_{k2}r) + a_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \beta_{k3}^3 [-A_k^{(3)} + (1-2\nu_3)D_k^{(3)}] - P_{k3} \} J_0(\beta_{k3}r) \quad 0 \leq r < c_3 \quad (8)$$

$$a_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \beta_{k3}^3 [-A_k^{(3)} + (1-2\nu_3)D_k^{(3)}] - P_{k3} \} J_0(\beta_{k3}r) = 0 \quad c_3 < r < R_3$$

$$Y_k^{(i)} = \frac{4i^2_{kl}}{l_i \varphi_{kl}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_{pl}^4 J_0(\beta_{pl} R_l) [(-1)^k (C_{pl}^{(i)} \operatorname{ch} \mu_{pl} + D_{pl}^{(i)} \operatorname{sh} \mu_{pl}) - C_{pl}^{(i)}]}{(i^2_{kl} + \beta_{pl}^2)^2} \quad (i=1,2,3) \quad (9)$$

где введены обозначения

$$\mu_{kl} = \beta_{kl} l_l \quad (l=1, 2, 3), \quad G = \frac{G_1}{G_2}, \quad G^* = \frac{G_2}{G_3}$$

$$i^3_{kl} J_1(i_{kl} R_l) G_i^{(i)} = Y_k^{(i)} \quad \varphi_{kl} = i_{kl} R_l \left[1 - \frac{I_0^2(i_{kl} R_l)}{I_1^2(i_{kl} R_l)} \right] + \frac{2(1-\nu_i)}{i_{kl} R_l} \quad (i=1, 2, 3)$$

$$P_{kl} = -\frac{4i^2_{kl}}{R_l J_0(\beta_{kl} R_l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_{nl} Y_n^{(i)}}{(\lambda_{nl}^2 + \beta_{kl}^2)^2} \quad P_{kl}^* = -\frac{4i^2_{kl}}{R_l J_0(\beta_{kl} R_l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n i_{nl} Y_n^{(i)}}{(i^2_{nl} + \beta_{kl}^2)^2}$$

G_i ($i=1, 2, 3$) — модули сдвига, а ν_i ($i=1, 2, 3$) — коэффициент Пуассона. Введем обозначения

$$-A_k^{(i)} + (1-2\nu_i)D_k^{(i)} = \frac{X_k^{(i)}}{\beta_{kl}^2} \quad (i=1, 2, 3) \quad (10)$$

$$-A_k^{(2)} \operatorname{ch} \mu_{k2} - C_k^{(2)} (\mu_{k2} \operatorname{ch} \mu_{k2} - \operatorname{sh} \mu_{k2}) - D_k^{(2)} \mu_{k2} \operatorname{sh} \mu_{k2} - (1-2\nu_2) \operatorname{ch} \mu_{k2} = \frac{Z_k^{(2)}}{\beta_{k2}^2}$$

Тогда из соотношений (4) — (8) получим

$$\Delta_k^{(i)} C_k^{(i)} = -H_k^{(i)} \frac{X_k^{(i)}}{\beta_{kl}^2} + F_k^{(i)} \frac{a_k^{(i)} + P_{kl}^*}{\beta_{kl}^2} \quad (i=1, 3)$$

$$\Delta_k^{(i)} D_k^{(i)} = \operatorname{sh}^2 \mu_{kl} \frac{X_k^{(i)}}{\beta_{kl}^2} - \mu_{kl} \operatorname{sh} \mu_{kl} \frac{a_k^{(i)} + P_{kl}^*}{\beta_{kl}^2} \quad (11)$$

$$\Delta_k^{(2)} C_k^{(2)} = -H_k^{(2)} \frac{X_k^{(2)}}{\beta_{k2}^3} + F_k^{(2)} \frac{Z_k^{(2)}}{\beta_{k2}^3}, \quad \Delta_k^{(2)} D_k^{(2)} = \text{sh}^2 \mu_{k2} \frac{X_k^{(2)}}{\beta_{k2}^3} - \mu_{k2} \text{sh} \mu_{k2} \frac{Z_k^{(2)}}{\beta_{k2}^3}$$

где

$$\Delta_k^{(i)} = \text{sh}^2 \mu_{ki} - \mu_{ki}^2, \quad H_k^{(i)} = \text{sh} \mu_{ki} \text{ch} \mu_{ki} + \mu_{ki}, \quad F_k^{(i)} = \text{sh} \mu_{ki} + \mu_{ki} \text{ch} \mu_{ki} \quad (i=1, 2, 3)$$

Подставляя значения $C_k^{(i)}, D_k^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$) в (5)–(8) и учитывая (10), получим следующие системы парных рядов уравнений:

$$\begin{aligned} q_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha(1 + M_k^{(1)}) \frac{X_k^{(1)}}{\beta_{k1}} J_0(\beta_{k1}r) + (1-\alpha)(1 + M_k^{(2)}) \frac{X_k^{(2)}}{\beta_{k2}} J_0(\beta_{k2}r) \right\} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \frac{F_k^{(1)}}{\Delta_k^{(1)}} \frac{a_k^{(1)} + P_k^*}{\beta_{k1}} J_0(\beta_{k1}r) + \sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha) \frac{F_k^{(2)}}{\Delta_k^{(2)}} \frac{Z_k^{(2)}}{\beta_{k2}} J_0(\beta_{k2}r) \quad 0 \leq r \leq c_1 \end{aligned} \quad (12)$$

$$a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(1)} J_0(\beta_{k1}r) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k1} J_0(\beta_{k1}r) \quad c_1 < r < R_1$$

$$\begin{aligned} q_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha^*(1 + M_k^{(2)}) \frac{Z_k^{(2)}}{\beta_{k2}} J_0(\beta_{k2}r) + (1-\alpha^*)(1 + M_k^{(3)}) \frac{X_k^{(3)}}{\beta_{k3}} J_0(\beta_{k3}r) \right\} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^* \frac{F_k^{(2)}}{\Delta_k^{(2)}} \frac{X_k^{(2)}}{\beta_{k2}} J_0(\beta_{k2}r) + \sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha^*) \frac{F_k^{(3)}}{\Delta_k^{(3)}} \frac{a_k^{(3)} + P_k^*}{\beta_{k3}} J_0(\beta_{k3}r) \quad 0 \leq r < c_3 \end{aligned} \quad (13)$$

$$4(2-\nu_2)A_2 + 6(1-\nu_2)B_2 + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k^{(2)} J_0(\beta_{k2}r) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k2}^* J_0(\beta_{k2}r) \quad c_3 < r < R_2$$

$$a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^{(1)} - P_{k1}) J_0(\beta_{k1}r) = 4(2-\nu_2)A_2 + 6(1-\nu_2)B_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^{(2)} - P_{k2}) J_0(\beta_{k2}r) = 0 \quad 0 \leq r < c_1 \quad (14)$$

$$4(2-\nu_2)A_2 + 6(1-\nu_2)B_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^{(2)} - P_{k2}) J_0(\beta_{k2}r) = 0 \quad c_1 < r < R_2$$

$$4(2-\nu_2)A_2 + 6(1-\nu_2)B_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k^{(2)} - P_{k2}^*) J_0(\beta_{k2}r) = a_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^{(3)} - P_{k3}) J_0(\beta_{k3}r) \quad 0 \leq r < c_3 \quad (15)$$

$$a_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^{(3)} - P_{k3}) J_0(\beta_{k3}r) = 0 \quad c_3 < r < R_3$$

где

$$q_0^{(1)} = \frac{(1-2\nu_1)C_1}{1-\nu_1 + G(1-\nu_2)}, \quad q_0^{(2)} = \frac{4(1-\nu_2)A_2 + 3(1-2\nu_2)B_2 - G^*(1-2\nu_3)C_3}{1-\nu_2 + G^*(1-\nu_3)} \quad (16)$$

$$\alpha = \frac{1-\nu_1}{1-\nu_1 + G(1-\nu_2)}, \quad \alpha^* = \frac{1-\nu_2}{1-\nu_2 + G^*(1-\nu_3)}$$

$$\Delta_k^{(i)} M_k^{(i)} = \text{sh} \mu_{ki} (\text{ch} \mu_{ki} - \text{sh} \mu_{ki}) + \mu_{ki} (1 + \mu_{ki}) \quad (i=1, 2, 3)$$

Представим $X_k^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$) и $Z_k^{(2)}$ в виде

$$X_k^{(n)} = \frac{1}{(\beta_k c_1)^{1/2} J_0'(\beta_k R_1)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(n)} J_{2n+1/2}(\beta_k c_1) + P_{k1} \quad c_2 = c_1$$

$$Z_k^{(n)} = \frac{1}{(\beta_k c_2)^{1/2} J_0'(\beta_k R_2)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(n)} J_{2n+1/2}(\beta_k c_2) + P_{k2} \quad (17)$$

Подставляя (17) во вторые уравнения (12)–(15), получим

$$b_k^{(n)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_k^{(n)} \quad (i=1, 3), \quad b_0^{(n)} = b_2^{(n)} = [4(2-\nu_2)A_2 + 6(1-\nu_2)B_2] \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (18)$$

Подставляя $X_k^{(n)}$ ($i=1, 2$) в первое уравнение (14), затем умножая полученное соотношение на $r(c_1^2 - r^2)^{1/2} F(-s, s+3/2, 1, r^2/c_1^2)$, далее интегрируя по r в пределах от 0 до c_1 и пользуясь значением интеграла [3, 4]

$$\int_0^{c_1} r^{\nu+1} (c_1^2 - r^2)^{p/2} F\left(-s, s+1+\frac{p}{2}, \nu+1, \frac{r^2}{c_1^2}\right) J_0(\beta_k r) dr =$$

$$= \left(\frac{2}{\beta_k}\right)^{1+p/2} c_1^{1+\nu+p/2} \frac{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+p/2+s)}{2\Gamma(1+\nu+s)} J_{\nu-2s+1+p/2}(\beta_k c_1)$$

получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1/2}(\beta_k c_1) J_{2n+3/2}(\beta_k c_1)}{\beta_k^2 J_0'(\beta_k R_1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1/2}(\beta_{k2} c_1) J_{2n+3/2}(\beta_{k2} c_1)}{\beta_{k2}^2 J_0'(\beta_{k2} R_2)} \quad (19)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ — гипергеометрический ряд.

Пользуясь значением ряда [3, 4]

$$\frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1/2}(\beta_k R) J_{2n+3/2}(\beta_k R)}{\beta_k^2 J_0'(\beta_k R)} = \int_0^{\pi} J_{2n+1/2}\left(\frac{cR}{R}\right) J_{2n+3/2}\left(\frac{cR}{R}\right) x^{-1} dx$$

из (19) получим

$$b_n^{(2)} = \frac{R_1^2}{R_2^2} a_n^{(1)} \quad (20)$$

Аналогичным образом из (15) получим

$$b_n^{(3)} = \frac{R_1^2}{R_2^2} b_n^{(2)} \quad (21)$$

При помощи (3), (18), (20), (21) получим

$$A_2 = \frac{\nu_2}{2(1+\nu_2)} \frac{R_1^2}{R_2^2} a_0^{(1)} \quad B_2 = \frac{1-2\nu_2}{6(1+\nu_2)} \frac{R_1^2}{R_2^2} a_0^{(1)} \quad (i=1, 3)$$

Подставляя (17) в первые уравнения (12)–(13), имея в виду (20)–(21) и применяя известные методы решения парных рядов уравнений [1, 3, 4], решение уравнений (12)–(13) сводится к решению следующих бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$b_s^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{sn}^{(1)} y_n^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{sn}^{(3)} b_n^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{sn}^{(1)} Y_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{sn}^{(2)} Y_n^{(2)} + d_s^{(1)} \quad (s=1, 2, \dots) \quad (22)$$

$$b_s^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{sn}^{(3)} b_n^{(3)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{sn}^{(1)} b_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{sn}^{(3)} Y_n^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} d_{sn}^{(2)} Y_n^{(2)} + d_s^{(3)}$$

где

$$a_{sn}^{(1)} = -2(4s+1) \left\{ \frac{(-1)^{n+s}}{\pi} \left[\alpha \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2n+1/2} \left(\frac{c_1 y}{R_1} \right) I_{2s+1/2} \left(\frac{c_1 y}{R_1} \right) dy + \right. \right. \\ \left. \left. + (1-\alpha) \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2n+1/2} \left(\frac{c_1 y}{R_2} \right) I_{2s+1/2} \left(\frac{c_1 y}{R_2} \right) dy \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{\alpha}{R_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^{(1)} J_{2n+1/2}(\beta_{k1} c_1) J_{2s+1/2}(\beta_{k1} c_1)}{\beta_{k1}^2 J_0^2(\beta_{k1} R_1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1-\alpha}{R_2^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^{(2)} J_{2n+1/2}(\beta_{k2} c_1) J_{2s+1/2}(\beta_{k2} c_1)}{\beta_{k2}^2 J_0^2(\beta_{k2} R_2)} \right] \right\}$$

$$b_{sn}^{(3)} = \frac{2(4s+1)\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_3}} (1-\alpha) \frac{R_3}{R_1^2 R_2^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^{(2)}}{\Delta_k^{(2)}} \frac{J_{2n+1/2}(\beta_{k2} c_3) J_{2s+1/2}(\beta_{k2} c_1)}{\beta_{k2}^2 J_0^2(\beta_{k2} R_2)}$$

$$c_{sn}^{(1)} = \frac{8(4s+1)\sqrt{c_1}}{R_1^3} \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{k1}^{1/2} [H_k^{(1)} - (-1)^n F_k^{(1)}] \lambda_{n1}}{\Delta_k^{(1)} J_0(\beta_{k1} R_1) (\lambda_{n1}^2 + \beta_{k1}^2)^2} J_{2s+1/2}(\beta_{k1} c_1)$$

$$c_{sn}^{(2)} = \frac{8(4s+1)\sqrt{c_1}}{R_1^2 R_2^2} (1-\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{k2}^{1/2} [H_k^{(2)} - (-1)^n F_k^{(2)}] \lambda_{n2}}{\Delta_k^{(2)} J_0(\beta_{k2} R_2) (\lambda_{n2}^2 + \beta_{k2}^2)^2} J_{2s+1/2}(\beta_{k2} c_1)$$

$$a_{sn}^{(3)} = -2(4s+1) \left\{ \frac{(-1)^{n+s}}{\pi} \left[\alpha^* \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2n+1/2} \left(\frac{c_3 y}{R_2} \right) I_{2s+1/2} \left(\frac{c_3 y}{R_2} \right) dy + \right. \right. \\ \left. \left. + (1-\alpha^*) \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2n+1/2} \left(\frac{c_3 y}{R_3} \right) I_{2s+1/2} \left(\frac{c_3 y}{R_3} \right) dy \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{\alpha^*}{R_2^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^{(2)} J_{2n+1/2}(\beta_{k2} c_3) J_{2s+1/2}(\beta_{k2} c_3)}{\beta_{k2}^2 J_0^2(\beta_{k2} R_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1-\alpha^*}{R_3^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^{(3)} J_{2n+1/2}(\beta_{k3} c_3) J_{2s+1/2}(\beta_{k3} c_3)}{\beta_{k3}^2 J_0^2(\beta_{k3} R_3)} \right] \right\}$$

$$b_{sn}^{(1)} = \frac{2(4s+1)\sqrt{c_3}}{\sqrt{c_1}} \alpha^* \frac{R_1^2}{R_2^2 R_3^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^{(2)}}{\Delta_k^{(2)}} \frac{J_{2n+1/2}(\beta_{k2} c_1) J_{2s+1/2}(\beta_{k2} c_3)}{\beta_{k2}^2 J_0^2(\beta_{k2} R_2)}$$

$$c_{sn}^{(3)} = \frac{8(4s+1)\sqrt{c_3}}{R_3^3} (1-\alpha^*) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{k3}^{1/2} [H_k^{(3)} - F_k^{(3)} (-1)^n] \lambda_{n3}}{\Delta_k^{(3)} J_0(\beta_{k3} R_3) (\lambda_{n3}^2 + \beta_{k3}^2)^2} J_{2s+1/2}(\beta_{k3} c_3)$$

$$d_{sn}^{(2)} = \frac{8(4s+1)\sqrt{c_3}}{R_2 R_3^2} \alpha^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{k2}^{1/2} [(-1)^n H_k^{(2)} - F_k^{(2)}] \lambda_{n2}}{\Delta_k^{(2)} J_0(\beta_{k2} R_2) (\lambda_{n2}^2 + \beta_{k2}^2)^2} J_{2s+1/2}(\beta_{k2} c_3)$$

$$d_k^{(1)} = \frac{2(4s+1)\sqrt{c_1}}{R_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^{(1)} a_k^{(1)}}{\Delta_k^{(1)} \tilde{\gamma}_{k1}^2} J_{2s-1/2}(\beta_{k1} c_1)$$

$$d_k^{(3)} = \frac{2(4s+1)\sqrt{c_3}}{R_3^2} (1-s^2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^{(3)} a_k^{(3)}}{\Delta_k^{(3)} \tilde{\gamma}_{k3}^2} J_{2s-1/2}(\beta_{k3} c_3)$$

$K_n(x)$ — функция Бесселя второго рода мнимого аргумента.

Подставляя значения $C_k^{(i)}$ и $D_k^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$) в (9) и учитывая (16), получим

$$Y_k^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(i)} b_n^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn}^{(i)} Y_{kn}^{(i)} + d_k^{(i)} \quad (i=1, 3) \quad (23)$$

$$Y_k^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(2)} b_n^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn}^{(2)} b_n^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn}^{(2)} Y_{kn}^{(2)}$$

где

$$a_{kn}^{(i)} = \frac{4i_{ki}^2}{l_i \tilde{\gamma}_{ki} c_i^{1/2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_{pi}^{1/2} [H_p^{(i)} - (-1)^k F_p^{(i)}] J_{2n-1/2}(\beta_{pi} c_i)}{\Delta_p^{(i)} J_0(\beta_{pi} R_i) (\lambda_{ki}^2 + \tilde{\gamma}_{pi}^2)^3} \quad (i=1, 3)$$

$$c_{kn}^{(i)} = \frac{16i_{ki}^2}{l_i R_i \tilde{\gamma}_{ki}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_{pi}^3 [(-1)^k (-1)^n H_p^{(i)} + (-1)^k F_p^{(i)} - (-1)^n F_p^{(i)} - H_p^{(i)}]}{\Delta_p^{(i)} (\lambda_{ki}^2 + \tilde{\gamma}_{pi}^2)^3 (\lambda_{kn}^2 + \tilde{\gamma}_{pi}^2)^3} l_{kn}$$

$$d_k^{(i)} = \frac{4i_{ki}^2}{l_i \tilde{\gamma}_{ki} p=1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_{pi} J_0(\beta_{pi} R_i) [(-1)^k H_p^{(i)} - F_p^{(i)}] a_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)} (\lambda_{ki}^2 + \tilde{\gamma}_{pi}^2)^2}$$

$$a_{kn}^{(2)} = \frac{4i_{k2}^2 R_1^2}{l_2 \tilde{\gamma}_{k2} c_1^{1/2} R_2^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_{p2}^{1/2} [H_p^{(2)} - (-1)^k F_p^{(2)}]}{\Delta_p^{(2)} J_0(\beta_{p2} R_2) (\lambda_{k2}^2 + \tilde{\gamma}_{p2}^2)^3} J_{2n-1/2}(\beta_{p2} c_1)$$

$$b_{kn}^{(2)} = \frac{4i_{k2}^2 R_3^2}{l_2 \tilde{\gamma}_{k2} c_3^{1/2} R_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_{p2}^{1/2} [(-1)^k H_p^{(2)} - F_p^{(2)}]}{\Delta_p^{(2)} J_0(\beta_{p2} R_2) (\lambda_{k2}^2 + \tilde{\gamma}_{p2}^2)^3} J_{2n-1/2}(\beta_{p2} c_3)$$

$$c_{kn}^{(2)} = \frac{16i_{k2}^2}{l_2 R_2 \tilde{\gamma}_{k2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_{p2}^3 [(-1)^k F_p^{(2)} - (-1)^n (-1)^k F_p^{(2)} - H_p^{(2)} + (-1)^n F_p^{(2)}]}{\Delta_p^{(2)} (\lambda_{k2}^2 + \tilde{\gamma}_{p2}^2)^3 (\lambda_{kn}^2 + \tilde{\gamma}_{p2}^2)^3} l_{kn}$$

Квазиполная регулярность бесконечных систем алгебраических уравнений (21) и (22) доказывается аналогично [1, 5].

После решения бесконечных систем (22) и (23) из первых уравнений (12) и (13) при фиксированном r определяются $q^{(i)}$ ($i=1, 2$), а из уравнений (16) находятся c_i ($i=1, 3$).

Подставляя значение $X_k^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$) и $Z_k^{(i)}$ по формуле (17) во вторых рядах (12) и (13), для контактных напряжений получим следующие выражения [1]:

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) = \frac{R_1^2 (c_1^2 - r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2} c_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} \frac{n! F(-n, n+1/2, 1, r^2/c_1^2)}{\Gamma(n+1/2)} \quad 0 \leq r < c_1$$

$$\sigma_z^{(2)}(r, l_2) = \sigma_z^{(3)}(r, 0) = \frac{R_3^2 (c_3^2 - r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2} c_3} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(3)} \frac{n! F(-n, n+1/2, 1, r^2/c_3^2)}{\Gamma(n+1/2)} \quad 0 \leq r < c_3 \quad (24)$$

Коэффициент при особенности $(c_i^2 - r^2)^{-1/2}$ ($i=1, 3$) в формуле (24) в окрестности $r=c_i$ имеет вид [1]

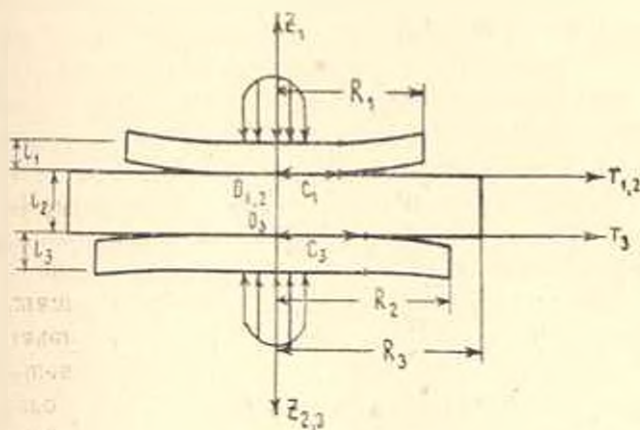
$$\frac{R_i^2}{c_i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(i)} \quad (i=1, 3)$$

Неизвестные величины c_i ($i=1, 3$) можно определить из условия равенства нулю контактного напряжения на границе области контакта, что равносильно условию [1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(i)} = 0 \quad (i=1, 3) \quad (25)$$

В частном случае, если $R_1=R_2=R_3$, решение задачи совпадает с решением [5].

Численные примеры. В частности, рассмотрим три цилиндра одинаковых диаметров, изготовленных из различных материалов, которые контактированы между собой торцами. На свободных торцах цилиндров приложены симметрично расположенные сжимающие нагрузки (фиг. 1).



Фиг. 1

$$\sigma_r^{(i)}(r, l_i) = \begin{cases} -P & \text{при } 0 \leq r < a \\ 0 & \text{при } a < r < R \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_0(\beta_k r) \quad (i=1, 3)$$

где

$$a_k = -\frac{a^2}{R^2} P, \quad a_k = -\frac{2a J_1(\beta_k a)}{R^2 \beta_k J_0(\beta_k R)} P, \quad R=R_1=R_2=R_3, \quad \beta_k=\beta_{k1}=\beta_{k2}=\beta_{k3}$$

Вычисления проведены для значений $a=0.70 R$, $\nu_1=0.1$, $\nu_2=0.3$, $\nu_3=0.2$, $G_1=G_2=G_3$, $l_1=l_2=0.5l_3=0.2R$.

Для этого частного случая получается $c_1=0.80 R$, $c_3=0.807 R$.

При решении системы уравнений (22) и (23) сначала были подобраны значения c_1 и c_3 (примерные их значения известны из [6]), по ним решались бесконечные системы алгебраических уравнений и полученные значения неизвестных были подставлены в (25). Этот

процесс многократно повторялся до тех пор, пока в левой части (25) не получались числа с разными знаками, близкие к нулю.

ON CONTACT INTERACTION OF THREE COAXIAL ELASTIC CYLINDERS WITH FINITE LENGTHS AND DIFFERENT DIAMETERS

S. S. ZARGARIAN, [Z. A. MARTIROSIAN]

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՏԱՐԲԵՐ ՏՐԱՄԱԿԱՆԵՐ ՈՂՆԵՑՈՂ
ԱՌԱՋԿԱՎԱՆ, ՀԱՄԱՌԱՆՑՔ ԵՐԵՎ ՔՎԱՆԱԿԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ
ՓՈՆԱԶԿԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ս. Ս. ՉԱՐԿԱՐՅԱՆ, [Զ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ]

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է ճակատներով հպված, տարբեր առաձգական հատիկա-
թյուններ, տարբեր տրամագծեր և վերջավոր երկարություններ ունեցող երեք
չըջանալին գլանների առաձգականության առանցքասիմետրիկ խնդիր: Դիա-
նալին մակերևույթների վրա նորմալ և շոշափող լարումները բացակայում են:
Դիանների կոնտակտների տիրույթներն անհայտ են: Խնդրի լուծումը ներկա-
յացվում է Ֆուրիեի և Ֆուրիե-Դինիի շարքերի միջոցով: Այդ շարքերի գործա-
կիցների որոշման համար ստացվում են զծային հավասարումների անվերջ
համակարգեր և Բեսելի ֆունկցիաներ պարունակող զույգ շարք հավասարում-
ներ, որոնց լուծումները հանգում են քվադրիտիկ ռեկուրսար հանրահաշվա-
կան հավասարումների անվերջ համակարգերի լուծմանը:

Բերված են թվային օրինակներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартirosян З. А. Осесимметричная контактная задача для двух цилиндров.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 2, с. 14—25.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
3. Cooke J. C., Tranter C. J. Dual Fourier-Bessels series.— Quart.—J. Mech. and Appl. Math., 1959, v. 12, Pt 3, p. 379—385.
4. Баболян А. А., Мелконян А. П. О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1969, т. 22, № 5, с. 3—15.
5. Мартirosян З. А. Осесимметричная контактная задача для трех цилиндров.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1986, т. 39, № 4, с. 25—34.
6. Мартirosян З. А., Токоян В. С. О контактном взаимодействии трех соосных упругих цилиндров конечных длин.— МТИ, 1981, № 6, с. 94—102.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
13.IV. 1987