

УДК. 539.3.539.55

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ И ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛОК В НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

АРТЕМЯН Э. Г.

В данной работе решены задачи колебаний (и параметрических колебаний) упругой и вязкоупругой балок в неоднородном температурном поле, когда механические свойства материала зависят от температуры. Определены собственные частоты колебаний балок и области динамической неустойчивости упругой балки в зависимости от изменения температур. Температурное поле берется стационарным и неоднородным.

1. Рассмотрим колебания упругой балки в стационарном температурном поле. Уравнение колебания балки принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (1.1)$$

где $F(x, t)$ —внешняя возмущающая сила. Решение этого уравнения ищем в виде ряда синусов, удовлетворяющего граничным условиям шарнирного опирания

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin i_k x \quad (1.2)$$

где $i_k = k/l$.

В виде ряда представим также жесткость балки и возмущающую силу

$$EJ = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos i_k x \quad (1.3)$$

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin i_k x \quad (1.4)$$

Подставляя (1.2)—(1.4) в уравнение (1.1) и сделав ряд преобразований относительно неизвестных функций $w_k(t)$, получим следующую бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Преобразования с $w_k(t)$ аналогичны тем же, что и в [6]

$$\frac{d^2 w_k(t)}{dt^2} + p^2 \left[(2a_0 - a_{2k}) i_k^2 w_k + \sum_{p=1}^{k-1} (a_{k-p} - a_{k+p}) i_p^2 w_p + \right. \\ \left. + \sum_{p=k+1}^{\infty} (a_{p+k} - a_{p-k}) i_p^2 w_p \right] = 2f_k(t) p^2, \quad p = \frac{1}{\sqrt{\rho h}} \quad (1.5)$$

В конкретном случае можно предположить, что модуль Юнга зависит от температуры линейным образом

$$E = E_0(1 + \mu_0 T) \quad (1.6)$$

где α_0 — коэффициент линейного теплового расширения без учета зависимости от температуры, а μ — некоторый безразмерный коэффициент.

Предполагается, что температура изменяется по координате также линейным образом

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{l} \quad (1.7)$$

Коэффициенты разложения в ряд Фурье примут следующий вид:

$$a_0 = E_0 l / [2 - \mu_0(T_2 - T_1)] \quad (1.8)$$

$$a_k = -E_0 l \mu_0 (T_2 - T_1) \frac{\cos \pi k - 1}{\pi^2 k^2} \quad (1.9)$$

Если довольствоваться вторым приближением, то для определения собственной частоты колебания балки из (1.5) получим

$$\frac{d^2 w_k}{dt^2} + p^2 [(2a_0 - a_{2k}) \lambda_k^4] w_k + p^2 \lambda_k^2 \lambda_{k-1}^2 (a_{2k-1} - a_0) w_{k-1} = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{d^2 w_{k+1}}{dt^2} + p^2 [(2a_0 - a_{2k+1}) \lambda_{k+1}^4] w_{k+1} + p^2 \lambda_k^2 \lambda_{k+1}^2 (a_{2k} - a_0) w_k = 0$$

Из первого уравнения системы (1.10) имеем

$$w_{k-1} = \frac{-\frac{d^2 w_k}{dt^2} - p^2 [(2a_0 - a_{2k}) \lambda_k^4] w_k}{p^2 \lambda_k^2 \lambda_{k-1}^2 (a_{2k-1} - a_0)} \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) во второе уравнение системы (1.10) и сделав ряд преобразований, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4 w_k}{dt^4} + p^2 [(2a_0 - a_{2k}) \lambda_k^4 + (2a_0 - a_{2k+1}) \lambda_{k+1}^4] \frac{d^2 w_k}{dt^2} - p^2 \lambda_k^2 \lambda_{k+1}^4 [(a_{2k-1} - a_0)(a_{2k-1} - a_0) - (2a_0 - a_{2k+1})(2a_0 - a_{2k})] w_k = 0$$

Характеристическое уравнение будет

$$\lambda^4 + A\lambda^2 + B = 0$$

где $A = p^2 [(2a_0 - a_{2k}) \lambda_k^4 + (2a_0 - a_{2k+1}) \lambda_{k+1}^4]$

$$B = -p^2 \lambda_k^2 \lambda_{k+1}^4 [(a_{2k-1} - a_0)(a_{2k-1} - a_0) - (2a_0 - a_{2k+1})(2a_0 - a_{2k})]$$

На фиг. 1 показана зависимость отношений ω/ω^* и T_2/T_1 , где ω^* — частота собственных колебаний упругой балки без воздействия температурного поля.

Как видно из фиг. 1, частота собственных колебаний значительно

но зависит от температуры: с ростом температуры частота резко уменьшается и при $T_2/T_1=5$ практически в два раза меньше частоты собственных колебаний без учета температуры. Пунктиром показана зависимость частоты балки от температуры при решении в первом приближении. Как видно из сравнения результатов приближений, второе приближение значительно уточняет значение собственной частоты колебания балки. При этом, значения, получаемые в первом приближении, значительно выше более точных, которые получены из второго. (на фиг. 1 второе приближение указано сплошной чертой).

При проведении вычислений начальная температура бралась равной $T_1=200^\circ\text{C}$, а параметры относительно температуры брались равными параметрам стали ($\mu_0 = =1,3 \cdot 10^{-5}$).

2. Рассмотрим параметрические колебания упругой балки в том же температурном поле под действием периодической продольной силы

$$P(t) = P_0 + P_1 \cos bt \quad (2.1)$$

Уравнение колебания балки под действием силы (2.1) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + (P_0 + P_1 \cos bt) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

Так же, как и в первой задаче, представим в виде ряда (1.3) функцию EJ и ищем в виде ряда (1.2) функцию w . После подстановки (1.2) и (1.3) в уравнение (2.2) и проведения некоторых преобразований, относительно независимых w_k получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 w_k}{dt^2} + p^2 \left\{ (2a_0 - a_{2k}) i_{\frac{1}{2}}^2 w_k + \sum_{p=1}^{k-1} (a_{k-p} - a_{k+p}) i_{\frac{1}{2}}^2 i_{\frac{1}{2}}^2 w_p + \right. \\ \left. + \sum_{p=k+1}^{\infty} (a_{p-k} - a_{p-k}) i_{\frac{1}{2}}^2 i_{\frac{1}{2}}^2 w_p \right\} - i_{\frac{1}{2}}^2 (P_0 + P_1 \cos bt) w_k = 0 \quad (2.3)$$

Выпишем систему (2.3) для второго приближения

$$\frac{d^2 w_k}{dt^2} + \Omega_k^2 (1 - 2i_1 \cos bt) w_k + i_1^2 w_{k+1} = 0 \quad (2.4)$$

$$\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_2}}, \quad \omega_k = p \frac{\pi^2 k^2}{l^2} \sqrt{2a_0 - a_{2k}} \\ i_1 = \frac{P_1}{2(P_2 - P_0)}, \quad P_2 = \frac{p^2 (2a_0 - a_{2k}) \pi^2 k^2}{l^2} \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2 w_{k+1}}{dt^2} + \Omega_{1k}^2 (1 - 2\mu_1 \cos \theta t) + \omega_k^2 w_k = 0 \quad (2.6)$$

где $\Omega_{1k} = \omega_k \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_*}}$, $\omega_k = p \frac{\pi^2(k+1)^2}{l^2} \sqrt{2a_0 - a_{2k+1}}$

$$\mu_1 = \frac{P_1}{2(P_* - P_0)}, \quad P_* = \frac{p^2(2a_0 - a_{2k+1})\pi^2(k+1)^2}{l^2} \quad (2.7)$$

$$\mu_2 = \frac{i_k^2(P_0 - P_1 \cos \theta t)^2 (2a_0 - a_{2k})}{4p^2(2a_0 - a_{2k+1})(P_* - P_0)}, \quad \mu_3 = \frac{i_k^2(P_0 + P_1 \cos \theta t)(2a_0 - a_{2k+1})}{4p^2(2a_0 - a_{2k}) \cdot (P_* - P_0)}$$

Определим главные области динамической неустойчивости. Для этого пользуемся методом, изложенным в [1].

Периодические решения с периодом $2T$ ($T=2\pi/\theta$) ищем в виде:

$$w_k = a_1 \sin \frac{\theta t}{2} + b_1 \cos \frac{\theta t}{2} \quad (2.8)$$

$$w_{k+1} = a_2 \sin \frac{\theta t}{2} + b_2 \cos \frac{\theta t}{2} \quad (2.9)$$

Подставляя поочередно (2.8) в уравнение (2.4) и (2.9) в уравнение (2.6) и приравнявая коэффициенты при одинаковых $\sin \theta t/2$ и $\cos \theta t/2$, получим две системы, каждая из которых представляет собой систему двух уравнений с двумя неизвестными. Условиями существования периодических решений уравнения (2.3) являются условия равенства нулю определителей указанных систем. Запишем эти определители, соединяя соответственно первое уравнение системы с третьим, а второе уравнение с четвертым:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\theta^2}{4\Omega^2} + 1 - \mu & \frac{i^2}{\Omega^2} \\ \frac{i^2}{\Omega^2} & -\frac{\theta^2}{4\Omega_1^2} + 1 - \mu_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{\theta^2}{4\Omega^2} + 1 + \mu & \frac{i^2}{\Omega^2} \\ \frac{i^2}{\Omega_1^2} & -\frac{\theta^2}{4\Omega_1^2} + 1 + \mu_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

Для определения главной области динамической неустойчивости следует удерживать в (2.10) и (2.11) верхние диагональные элементы и приравнивать их нулю. Как и в [1] получаем приближенную формулу для оценки границ главной области динамической неустойчивости

$$\theta_{*0} = 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu} \quad (2.12)$$

В силу наличия $k+1$ -го члена, можно уточнить границы главной об-

ласти, разрешив определители (2.10) и (2.11) относительно λ . На фиг. 2 показаны главные области динамической неустойчивости, при этом заштрихованная область соответствует главной области уругой задачи без учета влияния температурного поля, сплошные линии ограничивают область, получаемую из соотношения (2.12), а внешние пунктирные линии обозначают область, получаемую из решений (2.10) и (2.11). Иначе говоря, внешние пунктирные линии являются уточнением границ главной области динамической неустойчивости при учете в (2.3) $k+1$ -ого члена. Как видно из фиг. 2, при увеличении температуры границы главной области динамической неустойчивости значительно расширяются. Учет же $k+1$ -ого члена позволяет еще более уточнить границы главной области. Это уточнение можно проводить и далее, если учесть в (2.3) $k-2$, $k+3$ и последующие члены. Однако, рассмотрение этих членов с математической точки зрения не является целесообразным, поскольку их влияние на границы главной области практически не сказывается.

3. Уравнение колебания вязкоупругой балки в том же температурном поле принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \left\{ EJ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \int_0^t \Gamma(t-\tau, T) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d\tau \right) \right\} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (3.1)$$

Как и в [6], рассматриваются простые экспоненциальные ядра

$$\Gamma(t-\tau, T) = A(T) \exp \{-\alpha(T)(t-\tau)\} \quad (3.2)$$

Воспользуемся температурно-временной аналогией [4, 5, 7] и заменим фактическое время приведенным:

$$t' = t/a_T = f(x)t \quad (3.3)$$

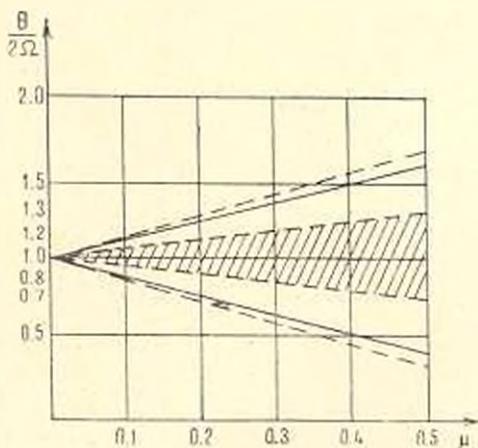
где a_T — функция температурного сдвига. Чтобы избежать лишних обозначений, вместо t' используем t , с учетом (3.3). Уравнение (3.1) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \left\{ EJ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A(T) f(x) \int_0^t \exp \{-\alpha(t-\tau)\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d\tau \right) \right\} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.4) ищем в следующем виде:

$$w = \bar{w}(x) \exp \{i(\omega t + \varphi)\} \quad (3.5)$$

Внешнее возмущение задается в виде:



Фиг. 2

$$F(x, t) = A_k(x) \exp(i\omega t) \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в уравнение (3.1), получаем:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EJ \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} (1 - A \cdot f \cdot \Gamma_c - i A \cdot f \cdot \Gamma_v) \right\} - \rho h \bar{w} (i\omega)^2 = A_k(x) \exp(i\omega t) \quad (3.7)$$

Здесь, как и в [2,3]

$$\Gamma_c = \int_0^{\frac{l}{2}} \Gamma(z) \cos \omega z dz, \quad \Gamma_v = \int_0^{\frac{l}{2}} \Gamma(z) \sin \omega z dz \quad (3.8)$$

Отделяя мнимую и действительную части уравнения (3.7) и учитывая, согласно [2], что $E = \operatorname{Im}(T)$, получим следующую систему:

$$\begin{aligned} EJ \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} (1 - A \cdot f \cdot \Gamma_c) \right\} - \rho h \bar{w} \omega^2 &= A_k(x) \cos \varphi \\ EJ \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} A \cdot f \cdot \Gamma_v \right\} &= A_k(x) \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для определения собственных частот колебаний балки, рассматриваем первое уравнение системы (3.9). Второе уравнение не рассматривается, так как нас интересует только частота, а не фаза. Для данного случая оно примет вид

$$EJ \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} (1 - A \cdot f \cdot \Gamma_c) \right\} - \rho h \bar{w} \omega^2 = 0 \quad (3.10)$$

Решение уравнения (3.10) ищем в виде ряда синусов:

$$\bar{w} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin \frac{\pi k}{l} x \quad (3.11)$$

В виде ряда представим следующую функцию:

$$A|T(x)| \cdot f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k}{l} x \quad (3.12)$$

Подставляя (3.11) и (3.12) в уравнение (3.10) и сделав ряд несложных преобразований относительно неизвестных функций w_k , получим бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \left[2EJ \frac{\pi^4 k^4}{l^4} - 2\rho h \omega^2 \right] w_k - EJ \Gamma_c \frac{\pi^2 k^2}{l^2} \left[(2a_0 - a_{2k}) w_k + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{k-1} (a_{k-p} - a_{k+p}) w_p + \sum_{p=k+1}^{\infty} (a_{k+p} - a_{k-p}) w_p \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Определим коэффициенты ряда Фурье. Для этого предполагаем, что элементы ядра вязкости изменяются в зависимости от температуры линейным образом

$$A = \bar{A}(1 - \mu z_0 T) \quad (3.14)$$

$$z = \bar{z}(1 - \mu z_0 T) \quad (3.15)$$

где α_n — коэффициент линейного теплового расширения без учета зависимости от температуры, μ — некоторый безразмерный коэффициент.

Температурное поле задано в виде (1.7). Кроме того, следуя [9], предположим, что

$$\ln a_1(T) = c(T - T_1) \quad (3.16)$$

где c — некоторое постоянное число. В частности, можем рассмотреть случай, когда $c = 1$. Учитывая (3.14) и (3.15), можем записать выражения для Γ_2 и Γ_1 :

$$\Gamma_2 = \frac{\bar{A} \bar{z}}{z^2 + \omega^2}, \quad \Gamma_1 = \frac{\bar{A} \omega^2}{z^2 + \omega^2} \quad (3.17)$$

Коэффициенты разбегания примут следующий вид:

$$a_0 = 2\bar{A} \left[\left(\frac{1}{T_2 - T_1} - \frac{\mu z_0 T_1}{T_2 - T_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\exp(T_2 - T_1)} \right) - \frac{\mu z_0}{T_2 - T_1} \left(\frac{T_2 - T_1 - 1}{\exp(T_2 - T_1)} - 1 \right) \right] \quad (3.18)$$

$$a_n = \frac{\bar{A}(T_2 - T_1)}{(T_2 - T_1)^2 + \pi^2 k^2} \left\{ (1 - \mu z_0 T_1) \left(\frac{\cos = k}{\exp(T_2 - T_1)} - 1 \right) - \mu z_0 \left(\left(1 - \frac{\cos = k}{\exp(T_2 - T_1)} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\pi^2 k^2 - (T_2 - T_1)^2}{(T_2 - T_1)^2 - \pi^2 k^2} - \frac{(T_2 - T_1) \cos = k}{\exp(T_2 - T_1)} \right) \right\} \quad (3.19)$$

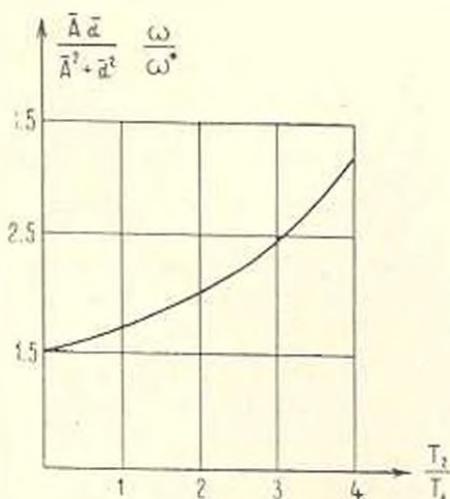
Проведены числовые вычисления, характеризующие зависимость частоты собственных колебаний вязкоупругой балки от изменения температур. На фиг. 3 показан график зависимости отношения

отношения $\frac{\bar{A} \bar{z}}{A^2 + z^2} \cdot \frac{\omega}{\omega^*}$

от отношения температур $\frac{T_2}{T_1}$, где

ω^* — как и в первой задаче, частота собственных колебаний упругой

балки без учета температур. $\frac{\bar{A} \bar{z}}{A^2 + z^2}$



Фиг. 3

согласно [5], есть некоторая постоянная величина. Как видно из фиг. 3, закономерности изменения частоты колебаний от изменения температур, как и в упругой задаче, сохранялась. Однако, увеличение температуры в вязкоупругой задаче влияло на рост частоты собственных колебаний балки более интенсивно, чем в упругом случае.

Как и в упругой задаче, вычисления проводились для второго приближения и при тех же значениях параметров

ELASTIC AND VISCO-ELASTIC BEAMES VIBRATION IN THE NONHOMOGENEOUS TEMPERATURE FIELD

E. G. ARGEMIAN

ԱՌՈՒՋԳԱԿԱՆ ԵՎ ԱՌՈՒՋԳՅՈՒՄՆՈՒՅԻՄ ՇՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄԸ
ՈՉ ՀԱՄԵՆՍԵՒ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԳԱՇՏՈՒՄ

Լ. Ն. ԱՐՄԵՂՅԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. լ. մ.

Աշխատանքում ստացված է առաձգական և առաձգամածուցիկ հեծանների առատանման սեփական հաճախակախությունների կախվածությունը ջերմային դաշտի փոփոխությունից (կիրք ջերմային դաշտը ստացիոնար է և ոչ համասեռ)։ Առաձգական հեծանի համար կատարված է առաջին և երկրորդ մոտավորություններ ստացված սեփական հաճախակախությունների համեմատություն։

Բացի այդ, առաձգական հեծանի համար դրսևված է դինամիկական անկայունության գլխավոր տիրույթը և ստացված է այդ տիրույթի սահմանների փոփոխման օրինաչափությունը՝ կախված ջերմային դաշտի փոփոխությունից։

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 595 с.
2. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 382 с.
3. Малмейстер А. К., Таммж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Знание, 1980. 561 с.
4. Колтуков М. А., Майборода В. П., Зубчанинов В. Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
5. Бугаков И. И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 272 с.
6. Мовсисян Л. А. К устойчивости упругих и вязкоупругих термомеханических пластин и оболочек. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1986. т. 39, №4, с. 35—41.
7. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термоупругости. М.: Наука, 1970. 277 с.
8. Подстригач Я. С., Швец Р. П. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наукова думка, 1978. 343 с.
9. Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985. 300 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
12. X. 1987