

УДК 539.375

КОСОЕ СОУДАРЕНИЕ УПРУГИХ ПОЛОСЫ И
 ПОЛУПРОСТРАНСТВА С РЕЗКО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ
 ПАРАМЕТРАМИ

САЖИН В. В.

1. В декартовой подвижной системе координат xOy рассмотрим соударение жидкой полосы ($0 < y < 1$, $|x| < \infty$) с упругим полупространством ($y < 0$, $|x| < \infty$) как установившееся движение. При $x < 0$, $y = 0$ полоса и полупространство взаимодействуют при условии непрерывности нормальных компонент скорости и давления: при $x > 0$, $y = 0$ (разрез) ставится условие отсутствия давлений и задается скачок нормальной скорости на бесконечности: верхняя грань полосы не нагружена. Скорость движения точки контакта c — дозвуковая, а касательная скорость полосы мала по сравнению с волновыми. Обозначим (u, v) — компоненты массовой скорости по осям x, y : σ_{xx}, τ, τ — нормальные и тангенциальные компоненты тензора напряжений: p — давление в жидкости. За единицы измерения примем: плотность упругого полупространства ρ_1 , скорость поперечных волн c_1^0 и $2\rho_1$, где ρ — модуль сдвига, c_1 и $c_2 = 1$ — безразмерные скорости продольных и поперечных волн в упругом теле, а c_0 — безразмерная скорость звука в акустической среде. Уравнения для продольного φ и поперечного ψ потенциалов скоростей в упругой области и уравнение для потенциала скорости χ в жидкости будут уравнениями эллиптического типа:

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \gamma_{yy} &= 0, & \varphi_{xx} + \varphi_{yy} &= 0 \\ \psi_{xx} + \psi_{yy} &= 0, & \beta_j &= \sqrt{1 - c_j^2/c_0^2}, \quad j=0, 1, 2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Скорости, напряжения и давление связаны с φ, ψ, χ известными соотношениями [5].

Краевые условия имеют вид:

$$\begin{aligned} p=0 \quad (y=1, |x| < \infty); & \quad \tau=0 \quad (y=0, |x| < \infty) \\ \tau=-p, \quad \tau=0 \quad (y=0, x < 0); & \quad \tau=p=0 \quad (y=0, x > 0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

σ — скачок скорости на границе раздела двух сред. Для выделения постоянной составляющей скачка скорости при $x \rightarrow \infty$ используем условие [4]

$$v_x = \lim_{x_1, x_2, x_1/x_2 \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} \frac{v(x, 0)}{x_2 - x_1} dx = -v_0 \quad (1.3)$$

Необходимость этого условия обусловлена тем, что решение на бесконечности может содержать собственные волны. В точках нерегулярности решения $x=y=0$ и $x=\pm\infty$ следует наложить дополнительные условия: конечности и неотрицательности потока энергии в точку $x=y=0$:

$$0 \leq e_0 < \infty \quad (1.4)$$

а на бесконечности учтем энергетический принцип излучения Мандельштама [6] энергия распространяется от источника на бесконечность, но не наоборот.

2. Выполним преобразование Фурье всех функций по x с параметром k .

Введем обозначения:

$$V^+(k) = \int_0^{\infty} v(x, 0) \exp(ikx) dx, \quad \Sigma^-(k) = \int_{-\infty}^0 z(x, 0) \exp(ikx) dx$$

Функция $V^+(\xi)$ ($\Sigma^-(\xi)$) аналитична в верхней (нижней) полуплоскости комплексного переменного $\xi = k + im$. Решая преобразованные уравнения (1.1) с учетом краевых условий (1.2), можно получить выражения для Фурье-образов потенциалов скоростей через функцию $\Sigma^-(k)$

$$\chi = \frac{2i\Sigma^-}{k\beta_0 c} \cdot \frac{\text{sh}[\beta_0 k(y-1)]}{\text{sh}(\beta_0 k)} \quad (2.1)$$

$$\Phi = -\frac{ic\Sigma^-}{k\beta R} \exp(\beta_1 |k| y), \quad \Psi = \frac{c\beta_1 \Sigma^- \text{Sgn} k}{k\beta^2 R} \exp(\beta_2 |k| y)$$

где $R = \beta_1 \beta_2 / \beta^2 - 1$ — функция Рэлея, $\beta = (1 + \beta_2^2) / 2$.

Удовлетворяя условию $V(k, 0) = V^-(k)$, приходим к следующей задаче Римана-Гильберта:

$$V^+(k) = H(k) \Sigma^-(k), \quad (2.2)$$

$$H(k) = \frac{2i\beta_0}{c\beta R} \{R \text{cth}(\beta_0 |k|) - 2B\} \text{Sgn} k, \quad B = \frac{\beta_0 c^2 \beta_1}{8\beta_0^2 \beta^2}$$

$$H(k) \sim \frac{2i}{\beta_0 c k}, \quad k \rightarrow 0; \quad H(k) \sim \frac{2i\beta_0 S}{\beta_0 c R} = \pm A, \quad k \rightarrow \pm\infty$$

где $S = R - 2B = 0$ — уравнение Стоунли для случая, когда одна из двух сред является идеальной сжимаемой жидкостью. Функция $H(k)$ может обращаться в нуль лишь в интервале $c_S < c < c_R$, где c_S (c_R) — единственный положительный корень уравнения Стоунли (Рэлея). При $0 < c < c_S$ и $c_R < c < c^*$, где $c^* = \min(c_0, 1)$, функция $H(k)$ не имеет действительных корней, а в интервале $c_S < c < c_R$ $H(k)$ имеет два действительных симметричных относительно нуля корня $k = \pm k_0$, которым отвечают собственные волны, распространяющиеся с групповой скоростью $c_k < c$. Принцип излучения имеет вид

$$c_k < c, \quad x \rightarrow -\infty; \quad c_k > c, \quad x \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

Проводя факторизацию коэффициента $H(k)$ [7, 8] и используя обобщенную теорему Лувинья, приходим к следующим результатам.

Интервалы $c < c < c_s$ и $c_R < c < c^*$. Особенности $V^*(z)$ определяют следующую структуру $v(x, 0)$: в него входят постоянное слагаемое (вычет в точке $z=0$) и локальное возмущение экспоненциально исчезающая на бесконечности функция

$$v(x, 0) \underset{x \rightarrow -0}{\sim} \frac{AC_1 \exp(-i\pi/4)}{\sqrt{-\pi x}}, \quad \sigma(x, 0) \underset{x \rightarrow -0}{\sim} \frac{C_1 \exp(i\pi/4)}{\sqrt{-\pi x}} \quad (2.4)$$

Используя условие (1.3), получим

$$C_1 = -\sqrt{R/\beta_0} S \rho_0 c v_0 \exp(-i\pi/4) / 2$$

$e_0 = \rho_0 c v_0^2 / 2$. Расход кинетической мощности на единицу длины $K = -\rho_0 c v_0^2 / 2$. Учитывая, что все функции экспоненциально стремятся к нулю при $x \rightarrow -\infty$, сразу видим, что энергия сохраняется, $e_0 = K$, то есть вся кинетическая энергия выделяется в нуле. Собственные волны в указанных интервалах отсутствуют. При $x \rightarrow -\infty$ решение экспоненциально стремится к нулю. Полюс $z=0$ обходится сверху.

Интервал $c_s < c < c_R$. В этом интервале $e_0 = 0$, скачок скорости и напряжение $\sigma(x, 0)$ непрерывны в точке $x = y = 0$

$$v(x, 0) \sim -2v_0 k_s \sqrt{-S \beta_0 x / \pi R}, \quad x \rightarrow +0$$

$$\sigma(x, 0) \sim -\rho_0 c v_0 k_s \sqrt{R x / \pi S \beta_0}, \quad x \rightarrow -0$$

Скачок $v(x, 0)$ расщепляется на постоянное слагаемое и локальное возмущение, а функция $\sigma(x, 0)$ состоит из локального возмущения и собственной волны (вклад полюсов в точках $z = \pm k_s$ обходится снизу). Выделим эту собственную волну:

$$\sigma(x, 0) \sim -\rho_0 c v_0 \sqrt{-R/\beta_0} S \ln\{Q(k_s) \exp[-i(k_s x - \pi/4)]\} / 2, \quad x \rightarrow -\infty$$

Функция $Q(k)$ возникает при факторизации коэффициента $H(k)$ и является аналитической в нижней полуплоскости z .

Рассмотрим теперь нормальные и касательные компоненты скоростей упругой и жидкой фаз на границе раздела. Их Фурье-изображения при $y=0$ выражаются по формулам:

$$W_1(k) = ic^2 \beta_1 \text{Sgn} k \Sigma^-(k) / 2 \beta^2 R, \quad W_0(k) = 2i \beta_0 \text{cth}(\beta_0 k) \Sigma^-(k) / \rho_0 c$$

$$U_1(k) = c(R + 1 + \beta^{-1}) \Sigma^-(k) / R, \quad U_0(k) = -2 \Sigma^-(k) / \rho_0 c$$

Из формулы для $U_0(k)$ сразу видно, что поведение и асимптотики касательной скорости на поверхности жидкой фазы $u_0(x)$ с точностью до коэффициента $-2/\rho_0 c$ совпадает с поведением функции $v(x, 0)$. Сложность определения структуры и асимптотик остальных функций в том, что они имеют особенности в обеих z -полуплоскостях. Выделяя особенности в функциях $W_1(k)$, $W_0(k)$ и $U_1(k)$, приходим к следующим результатам.

Интервалы $0 < c < c_s$ и $c_R < c < c^*$. Поведение функций $w_1(x)$, $w_0(x)$ и $u_1(x)$ — одинаково. И слева, и справа от точки $x=0$ решение

есть локальное возмущение (слева $O(1)$, справа $O(x^{-1/2})$). Для функции $w_0(x)$ в решение добавляется скорость на бесконечности.

Интервал $c_S < c < c_R$. Решение для всех функций представляет из себя локальное возмущение $O(1)$ при $x > 0$ и расщепляется на локальное возмущение $O(1)$ и собственные волны при $x < 0$. Для функции $w_0(x)$ добавляется скорость на бесконечности. Можно показать, что все полученные асимптотики для функций $w_1(x)$ и $w_0(x)$ согласуются с асимптотиками для скачка скорости v .

3. Перейдем теперь к решению задачи, в которой среды менялись местами. Область $0 < y \leq 1$, $|x| < \infty$ занята упругой средой, а область $y < 0$, $|x| < \infty$ — акустическим полупространством, все обозначения остаются прежними. В крайних условиях (1.2) условие $p = 0$ ($y = 1$, $|x| < \infty$) заменяется условием $\tau = 0$ ($y = 1$, $|x| < \infty$).

Действуя аналогично п. 1–2, приходим к следующей задаче Римана-Гильберта:

$$V^-(k) = H_1(k) \Sigma^-(k), \quad H_1(k) = \frac{2i\beta_0}{c} \frac{F_1(k)}{\Delta_1(k) \Delta_2(k)}$$

$$H_1(k) \sim \Sigma_1 c k, \quad k \rightarrow 0; \quad H_1(k) \sim \pm A, \quad k \rightarrow \pm \infty$$

$$F_1(k) = \left[\Delta_1(k) \Delta_2(k) - B \left[\Delta_1(|k|) - i \ln \frac{k_1}{2} \ln \frac{k_2}{2} \Delta_2(|k|) \right] \right] \text{Sgn} k$$

$$\Delta_1(k) = (R+1) \ln \frac{i}{2} - \ln \frac{i}{2}$$

$$\Delta_2(k) = (R+1) \ln \frac{i}{2} - \ln \frac{i}{2}, \quad i_j = k \beta_j, \quad j = 1, 2$$

Не нулевые действительные решения уравнений $\Delta_1(k) = 0$, $\Delta_2(k) = 0$ известны [9]. Для определения нулей уравнения $F_1(k) = 0$ использовался численный счет. В результате выяснилось, что уравнение $F_1(k) = 0$ в интервале $c_S < c < c_R$ не имеет действительных ненулевых корней, а в интервалах $0 < c < c_S$ и $c_S < c < c^*$ — по два действительных симметричных относительно нуля корня $k = \pm k_3$ и $k = \pm k_4$. Корни уравнения $\Delta_1(k) = 0$, $k = \pm k_1$ существуют только при $c > c_R$, а корни уравнения $\Delta_2(k) = 0$, $k = \pm k_2$ существуют лишь при $c < c_R$. Для уравнения $F_1(c, k) = 0$ была численно рассчитана производная $c'(k)$ в точках $k = \pm k_i$, $i = 3, 4$. Оказалось, что корням $k = \pm k_3$ отвечают собственные волны с $c_R > c$, а корням $k = \pm k_4$ — собственные волны с $c_R < c$ (совместные локализованные колебания упругой и жидкой фаз).

Выделяя особенности и проводя факторизацию коэффициента $H_1(k)$, получим выражения для оригиналов $v(x, 0)$ и $\tau(x, 0)$ в трех интервалах звукового диапазона точки контакта.

Интервал $0 < c < c_S$. $v(x, 0)$ состоит из постоянного слагаемого, локального возмущения и собственной волны. Асимптотическое поведение оригиналов вблизи точки $x = y = 0$ описывается формулами (2.4), где вместо коэффициента C_1 стоит C_4 :

$$C_2 = -c v_0 k_2 \sqrt{\rho_0 k / \rho_0 S} \exp(-i\pi/4) / 2k_2, \quad e_0 = c v_0^2 k_2^2 / 2k_2^2$$

Расходуемая кинетическая мощность $K = c v_0^2 / 2$, следовательно, часть энергии, выделяющаяся в нуле, зависит от отношения k_2/k_1 (причем $k_2 < k_1$). Решение исчезает при $x \rightarrow -\infty$. Принцип излучения (2.3) удовлетворяется, то есть собственная волна уносит энергию вправо на бесконечность.

Интервал $c_S < c < c_R$. В этом интервале нет потока энергии в нуле, а асимптотики оригиналов в этой точке таковы, что решение является непрерывной функцией x в точке $x=y=0$:

$$v(x, 0) \sim -2v_0 k_2 \sqrt{-S \beta_0 x / \rho_0 \pi} / k_1, \quad x \rightarrow +0$$

$$z(x, 0) \sim -c v_0 k_2 \sqrt{\rho_0 R x / \pi S \beta_0}, \quad x \rightarrow -0$$

Полюса действительной оси обходятся сверху. Поведение $v(x, 0)$, определяемое особенностями $V(\xi)$ такое же, как и в интервале $0 < c < c_S$. Вся кинетическая энергия столкновения уносится собственной волной вправо на бесконечность.

Интервал $c_R < c < c^$.* Асимптотики в нуле описываются формулами, аналогичными (2.4) (C_1 заменяется на C_2):

$$C_2 = -c v_0 k_1 \sqrt{\rho_0 R / \rho_0 S} \exp(-i\pi/4) / 2k_1$$

Полюс $\xi=0$ обходит сверху, а полюса $\xi = \pm k_1$ — снизу. $v(x, 0)$ расщепляется на постоянное слагаемое и локальное возмущение, а $z(x, 0)$ состоит из локального возмущения и собственной волны. Энергия уносится собственной волной влево на бесконечность, что находится в согласии с принципом излучения.

Нормальные и касательные компоненты скорости при $y=0$ имеют следующую структуру. В интервале $0 < c < c_S$ асимптотики всех функций ($w_1(x)$, $w_0(x)$, $u_1(x)$) есть $O(1)$ при $x \rightarrow -0$ и $O(x^{-1/2})$ при $x \rightarrow +0$. Поведение функций таково. При $x < 0$ $w_1(x)$ есть локальное возмущение, при $x > 0$ функция $w_1(x)$ расщепляется на локальное возмущение, собственные волны (сумма вычетов в точках $\xi = \pm k_2$) и скорость упругой полосы при $x \rightarrow \infty$ ($w_1(x) \rightarrow -v_0$, $x \rightarrow \infty$). Для функции $w_0(x)$ решение и слева, и справа представляет из себя локальное возмущение. Функция $u_1(x)$ при $x < 0$ есть локальное возмущение, а при $x > 0$ в решении присутствуют локальное возмущение и собственные волны. Интервал $c_S < c < c_R$. Поведение всех функций не отличается от их поведения в первом интервале, а асимптотики при $x \rightarrow \mp \sim O(1)$. Интервал $c_R < c < c^*$. При $x < 0$ все функции представимы в виде локального возмущения и собственных волн, при $x > 0$ — локального возмущения. Асимптотическое поведение функций качественно совпадает с их поведением в первом интервале при $|x| \rightarrow 0$.

Автор выражает благодарность Н. В. Симонову за полезные обсуждения.

OBLIQUE IMPACTION BETWEEN ELASTIC STRIPS AND HALF-SPACE WITH STRONG DIFFERENT PARAMETERS

V. V. SAZHIN

ԽԻՍՏ ՏԱՐԲԵՐՎՈՂ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐՈՎ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ԵՎ
ԿԻՍԱՏԱՐԱՆՈՒԹՅԱՆ ՇԵՂ ՀԱՏՎԱՍԸ

Վ. Վ. ՍԱՅԻՆ

Գիտարկվում են ալիքային դաշտի ելակիրությունները ակուստիկական շերտի և առաձգական կիսատարածության (սուսձգական շերտի և ակուստիկական կիսատարածության) մինչձայնային ուժիմում փոքր անկյան տակ ստացիոնար հատվածի դեպքում: Ֆուրյեի ձևափոխության օգնությամբ խոնդիրը բերվում է Ռիմանի ընդհանրացված խնդրին: Ֆակտորիզացիայի մեթոդով ստացված լուծումը պարունակում է մի շարք կամայական շաստատուններ, որոնք որոշվում են ելակի կետերում հղած պայմաններից: Կոնտակտի կետի շարժման արագությունների դիսպազոնը Ռեյլի և Սթրոնլիի ալիքների արագություններով բաժանվում է երեք միջակայքի, որոնցից յուրաքանչյուրում լուծման վարքը տարբեր է: Որոշված է լուծման վարքը կոնտակտի կետի շրջակայքում և անվերջությունում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.—М.: Наука, 1977. 408С.
2. Ефремов В. В. Исследование косых соударений металлических пластин в упругой постановке.—ПМТФ, 1975, №1, с. 171—179.
3. Ефремов В. В. О косых соударениях металлических пластин в упругой постановке.—ПМТФ, 1975, №5, с. 167—172.
4. Симонов Н. В. Стационарное дозвуковое движение разреза в упругой полосе.—Изв. АН СССР, МТТ, 1982, №6, с. 90—99.
5. Новацкий В. Теория упругости.—М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике.—М.: Наука, 1972. 439 с.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.—М.: Наука, 1977. 640 с.
8. Гахов Ф. Д., Черский Ю. П. Уравнения типа свертки.—М.: Наука, 1978. 295 с.
9. Воронич И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.—М.: Наука, 1979. 349 с.

Институт проблем механики АН СССР

Поступила в редакцию
8.XII.1986