ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 6, 1967 Механика

УДК 539.319

ДВИЖЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

МАРТИРОСЯН А. Н.

В настоящей статье для общего случая упругой анизотропной среды дается решение плоской задачи о распространяющейся полубесконечной трещины, на границах которого заданы нормальные импульсы. Соответствующая задача для изотропной среды рассматривается в [1] методом факторизации и сверток. В данной работе путем использования факторизации основной функции, сделанной в [2, 3, 7], получено в замкнутом виде решение на оси, направленной вдоль трещины; определены коэффициенты интенсивности напряжений. Показано совпадение полученных формул с частным решением [3] для стоящей трещины. Получено также решение для заданного на трещине касательного импульса.

§1. Определение решения на продолжении трещины для приложенного нормального импульса

Уравнения движения для анизотропной упругой среды в плоской задаче имеют вид [3]

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+d\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+e\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \left(a=\frac{C_{11}}{\rho},\quad b=\frac{C_{22}}{\rho}\right)$$
$$c\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\quad \left(d=\frac{C_{66}}{\rho},\quad e=\frac{C_{66}+C_{12}}{\rho}\right) \tag{1.1}$$

Здесь C_{ij}—упругие постоянные, ρ—плотность среды.

При $t=0$ имеем нулевые начальные условия $u=0$, $v=0$. На границе трещины имеет место $(y=0)$

$$\sigma_y=\sigma_-(t,x),\quad -\infty<x<l(t) \tag{1.2}$$
$$v=v_+(t,x)=0,\quad x>l(t);\quad \sigma_{xy}=0,\quad -\infty<x<\infty$$

где $l(t)$—закон движения края трещины.

Согласно [1] вводятся трансформанты Лапласа по t и Фурье по координате x от компонент смещения по осям x и y

$$u^L;\ v^L=\int_0^\infty u;\ v\exp(-st)\,dt$$

$$u^L,\ v^L=\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_n^{LF},\ v_n^{LF}\exp[-iqx+iy\beta_n(q)]\,dq \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в (1.1), получим

$$v_n^{LF}=\frac{d\beta_n^2-a\mu_1^2}{cq\beta_n}u_n^{LF};\qquad \beta_n=i\left|\frac{(b+d)s^2+Lq^2-(-1)^n\sqrt{\Delta(q)}}{2bd}\right|^{1/2}$$

$$\Delta(q)=[(b+d)s^2+Lq^2]^2-4abd^2\mu_1^2\mu_2^2 \tag{1.4}$$

$$\mu_1=i\left(\frac{s^2}{a}+q^2\right)^{1/2},\qquad \mu_2=i\left(\frac{s^2}{d}+q^2\right)^{1/2}$$

$$a>d,\quad b>d>0,\quad L=ab+d^2-c^2$$

$$N_2=b(a-d)-c^2>0,\quad K_1=ab-(c-d)^2>0$$

Из (1.2) получится функциональное уравнение

$$v^{LF}(s,q)=S^{LF}(s,q)\sigma^{LF}(s,q)$$

$$S^{LF}(s,q)=-iaC_0[\rho\mu_2F(s,q)]^{-1},\qquad C_0=\left[2\left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}+\frac{L}{ad}\right]^{1/2}K_1^{-1} \tag{1.5}$$

$$F(s,q)=C_0R(s,q)[\mu_1\mu_2(\beta_1+\beta_2)]^{-1},\quad F(s,q)\to 1,\ q\to\infty$$

$$R(s,q)=-(bs^2+K_1q^2)\mu_2\sqrt{\frac{a}{b}}-as^2\mu_1=-\frac{ad\sqrt{a}K_1}{4(a-d)s^2\sqrt{b}}\{Q_1s^4-$$

$$-P_1s^2(q^2+\mu_1\mu_2)+4q^2\mu_1\mu_2+(\mu_2^2-q^2)^2\}(\mu_1+\mu_2)$$

$$P_1=\frac{4}{K_1}(\sqrt{ab}-b),\quad Q_1=\frac{P_1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{d^2K_1}[b(b-a)+(c+d-b)(c+b-3d)]$$

где $R(s,q)$—функция Рэлея. Число и положение точек разветвления функций β_n на комплексных плоскостях в зависимости от соотношений упругих постоянных изучено в [9].

После выбора ветвей функций μ_n, β_n легко получить [3]

$$S^{LF}(s,q)=S_+^{LF}(s,q)S_-^{LF}(s,q) \tag{1.6}$$

$$S_+^{LF}(s,q)=\frac{\sqrt{\dfrac{s}{\sqrt{a}}-iq}}{\dfrac{s}{c_R}-iq}D_+,\qquad S_-^{LF}(s,q)=-\frac{aC_0}{\rho}\,\frac{\sqrt{\dfrac{s}{\sqrt{a}}+iq}}{\dfrac{s}{c_R}+iq}D_-$$

$$D_\pm\left(\frac{iq}{s}\right)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}\ln\left[\frac{\overline{R(\xi)}}{R(\xi)}\,\frac{\beta_2(\xi)+\beta_1(\xi)}{\beta_2(\xi)+\overline{\beta_1(\xi)}}\right]\frac{d\xi}{\xi\mp\dfrac{iq}{s}}\right\},\quad R\left(\pm\frac{1}{c_R}\right)=0$$

$\beta_n(\xi)$, $R(\xi)$ даются формулами (1.4), (1.5), где берется $s=1$, $q=i\xi$.

Функции S_+^{LF} и S_-^{LF}—аналитические функции соответственно в верхней и нижней полуплоскости плоскости q. Представим функции σ^{LF}, v^{LF} в виде [1]

$$\sigma^{LF}=\sigma_{+}^{LF}+\sigma_{-}^{LF}, \quad v^{LF}=v_{+}^{LF}+v_{-}^{LF}, \quad v_{+}^{LF}=0 \tag{1.7}$$

где v_{-}^{LF} и σ_{+}^{LF} неизвестны. При этом $v(t, x)=v_{+}(t, x)H|x-l(t)|+v_{-}(t, x)H|l(t)-x|$, $\sigma(t, x)=\sigma_{+}(t, x)H|x-l(t)|+\sigma_{-}(t, x)H|l(t)-x|$, $H(x)$ — единичная функция. Нетрудно заметить, что функция S^{LF} такова, что указанная выше факторизация приводит к функциям $S_{\pm}^{LF}$, $P_{\pm}^{LF}=1/S_{\pm}^{LF}$, оригиналы которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &P_{+}(t, x)=S_{+}(t, x)=0 \quad \text{при} \quad x<c_R t \\ &P_{-}(t, x)=S_{-}(t, x)=0 \quad \text{при} \quad x>-c_R t \end{aligned} \tag{1.8}$$

Подставляя (1.7) в (1.5) и учитывая (1.8), можно, как и в [1], получить решение поставленной задачи в форме сверток по x, t

$$v_{-}=S_{-}**(S_{+}**\sigma_{-})H(l-x+0), \quad \sigma_{+}=-P_{+}**(S_{+}**\sigma_{-})H(x-l+0) \tag{1.9}$$

Так как $D_{\pm}(iq/s)$ являются аналитическими функциями на всей плоскости iq/s за исключением точек, принадлежащих разрезам $[\pm 1/\sqrt{a}, \pm 1/\sqrt{d}]$, с помощью интеграла Коши для неограниченной области имеем

$$D_{\pm}\left(\frac{iq}{s}\right)=1+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u)}{u\mp\frac{iq}{s}}\,du, \quad D_{\pm}^{-1}\left(\frac{iq}{s}\right)=1+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(u)}{u\mp\frac{iq}{s}}\,du$$

$$F_1(u)=\gamma(u)\exp(\varkappa(u)), \quad F_2(u)=-\gamma(u)\exp(-\varkappa(u)) \tag{1.10}$$

$$\gamma(u)=\frac{a\beta_2^{*}(u)\sqrt{u^2-a^{-1}}+(b-K_1u^2)\sqrt{ab^{-1}}\sqrt{d^{-1}-u^2}\,\beta_1^{*}(u)}{\pi\{[(b-K_1u^2)ab^{-1}(d^{-1}-u^2)+a^2(u^2-a^{-1})](bd)^{-1}\sqrt{\Delta(u)}\}^{1/2}}$$

$$\varkappa(u)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \ln\left|\frac{\overline{R(\xi)}}{R(\xi)}\,\frac{\beta_2(\xi)+\beta_1(\xi)}{\overline{\beta_2(\xi)+\beta_1(\xi)}}\right|\frac{d\xi}{\xi-u}$$

$$\beta_1^{*}(u)=-i\beta_1(q, s), \quad q=u, \quad s=i; \quad \beta_2^{*}(u)=-i\beta_1(q, s), \quad q=iu, \quad s=1$$

§ 2. Решение на оси для нормального импульса на границе трещины

Вычисление оригиналов $S_{\pm}(t, x)$, $P_{\pm}(t, x)$ проводится так же, как и в [1] и имеет вид

$$S_{+}(t, x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[1-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1/2}}{c_R^{-1}-t/x}}\,H(c_R^{-1}-t/x)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int\limits_{t/x}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u)}{c_R^{-1}-u}\sqrt{\frac{u-a^{-1/2}}{u-t/x}}\,du\right]H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right\} \tag{2.1}$$

$$B=1+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} F_2(u)\frac{du}{u-c_R^{-1}}$$

$$P(t,x)=\frac{H(x)}{x\sqrt{\pi x}}\frac{\partial}{\partial t}\left\{A(c_R^{-1}-a^{-1/2})\delta\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)-\left[\frac{1}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int\limits_{t/x}^{1/\sqrt{d}}\frac{d}{du}\left(\frac{(c_R^{-1}-u)F_2(u)}{\sqrt{u-1/\sqrt{a}}}\right)\frac{du}{\sqrt{u-t/x}}\right]H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{c_R}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\left[A\delta\left(t-\frac{x}{\sqrt{a}}\right)+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}F_3(h)\delta(t-hx)dh\right]\frac{H(x)}{\sqrt{x}}\right\}\tag{2.2}$$

$$A=1+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}F_2(u)\frac{du}{u-1/\sqrt{a}},\quad F_3(h)=\int\limits_{h}^{1/\sqrt{d}}\frac{d}{du}\left(\frac{F_2(u)}{\sqrt{u-1/\sqrt{a}}}\right)\frac{du}{u-h}$$

Для граничных значений на трещине в виде сосредоточенного импульса $\sigma_-(t,\tau,x,\xi)=-P\delta(x-\xi)H(t-\tau)$, можно получить нормальные напряжения вне трещины в виде (1.9). После вычисления интегралов [1] имеем

$$\sigma_+^0(t,\tau,x,\xi)=\frac{P}{\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\left[A\delta(t-t_1-(x-x_1)a^{-1/2})+\right.$$

$$+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}F_3(h)\delta(t-t_1-h(x-x_1))dh\left]\frac{H(x-x_1)}{\sqrt{x-x_1}}\right\{(x_1-\xi)^{-1/2}\left[1-\right.\tag{2.3}$$

$$-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1/2}}{c_R^{-1}-T}}H(c_R^{-1}-T)-\int\limits_{T}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_1(u)}{c_R^{-1}-u}\sqrt{\frac{u-a^{-1/2}}{u-T}}du\right]\frac{\delta(x_1-l(t_1))}{|l(t_1)c_R^{-1}-1|^{-1}}+$$

$$+\left[\frac{1}{2}+\int\limits_{T}^{1/\sqrt{d}}\frac{d}{du}(F_2(u)\sqrt{u-a^{-1/2}})\frac{du}{\sqrt{u-T}}\right]\frac{H(x_1-l(t_1))}{(x_1-\xi)^{3/2}}\Bigg\}H\left(T-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)dx_1dt_1$$

$$T=(t_1-\tau)(x_1-\xi)^{-1}$$

Полученные формулы по форме совпадают с [1] или со случаем изотропной среды, только функции $D_\pm$ даются (1.6). Вычисление интегралов по x_1, t_1 даст

$$\sigma_+^0=\frac{P}{\pi}\left[AN\left(t,\tau,x,\xi,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}F_3(h)N(t,\tau,x,\xi,h)dh\right]H\left(T-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$N(t,\tau x,\xi,h)=\frac{1-c_R^{-1}\dot l}{1-h\dot l}\,\frac{N_1^0 H(L_0-a^{-1/2})}{\sqrt{(x-l)(l-\xi)}}-\frac{N_2^0 H(L_0-1/\sqrt{a})}{x-\xi}-$$

$$-N_3^0\frac{H(1/\sqrt{a}-L_0)}{x-\xi},\quad N_1^0=\Phi(L_0,c_R^{-1})-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1/2}}{c_R^{-1}-L_0}}\,H(c_R^{-1}-L_0)\tag{2.4}$$

$$N_3^0=\left(\frac{x-l}{l-\xi}\right)^{1/2}\Phi(L_0,T),\quad \Phi(p_1,p_2)=1-\int_{p_1}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_1(u)}{p_2-u}\sqrt{\frac{u-1/\sqrt{a}}{u-p_1}}\,du\,H\left(\frac{1}{\sqrt{d}}-p_1\right)$$

$$N_2^0=N_3^0+\pi F_1(T)\sqrt{\frac{T-a^{-1/2}}{T-h}}\,H\left(\frac{1}{\sqrt{d}}-L_0\right)$$

$$T=\frac{t-\tau}{x-\xi},\quad L_0=\frac{t_0-\tau}{l-\xi},\quad l=l(t_0),\quad t-t_0=h(x-l(t_0))$$

Полученная формула несколько отличается от [1] последним слагаемым N_3^0, не влияющим на концентрацию напряжений.

Учитывая, что при $x\to l(t)$, $t_0\to t$ и $\frac{x-l(t)}{x-l(t_0)}\to 1-h\dot l(t)$, можно из (2.4) получить коэффициент интенсивности напряжений

$$\lim_{x\to l(t)+0}\sqrt{2\pi(x-l(t))}\,\sigma^0=P\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-c_R^{-1}\dot l(t)}{\sqrt{l(t)-\xi}}\left\{\frac{AN_1^0}{\sqrt{1-\dot l(t)a^{-1/2}}}+\right.$$

$$\left.+\lim_{x\to l(t)+0}\int_{a^{-1/2}}^{a^{-1/2}}F_3(h)\,\frac{N_1^0\sqrt{1-h\dot l(t)}}{1-h\dot l(t_0)}\,dh\right\}=$$

$$=P\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-c_R^{-1}\dot l(t)}{\sqrt{1-a^{-1/2}\dot l(t)}}\,\frac{g(t)K(\dot l)}{\sqrt{l-\xi}}\,H(L_0-a^{-1/2})\tag{2.5}$$

$$g(t)=1-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1/2}}{c_R^{-1}-L_0}}\,H(c_R^{-1}-L_0)-\int_{L_0}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_1(u)}{c_R^{-1}-u}\sqrt{\frac{u-a^{-1/2}}{u-L_0}}\,du\,H\left(\frac{1}{\sqrt{d}}-L_0\right)$$

$$K(\dot l)=1-\dot l\int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_2(u)}{1-u\dot l}\,du,\quad L_0=\frac{t-\tau}{l-\xi},\quad l=l(t)$$

§3. Сравнение с решением, полученным методом Винера-Хопфа

В случае $l(t)=0$, рассмотренном в [2, 3], также найдено значение σ_y в виде

$$\sigma_{+}^{(1)}=-\frac{P}{2\pi^2}\frac{c_R^{-1}-iq/s}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{iq}{s}}}D_{+}^{-1}\left(\frac{iq}{s}\right)\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{\infty}\frac{D_{-}(\tau)\sqrt{\tau-1/\sqrt{a}}}{(c_R^{-1}-\tau)(\tau-iq/s)}e^{i\tau s}d\tau$$

$$\sigma_y=-\frac{P}{\pi^2 x}\frac{\partial}{\partial t}H\left(T-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{\tau_1}\frac{D_{+}(\tau)D_{+}^{-1}(\tau_1)\sqrt{\tau-1/\sqrt{a}}(c_R^{-1}-\tau_1)}{(c_R^{-1}-\tau)(\tau-\tau_1)\sqrt{\tau_1-1/\sqrt{a}}}d\tau$$

или

$$\sigma_y=-\frac{P}{\pi^2 x}\frac{\partial}{\partial t}H\left(T-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{\tau_1}\frac{D_{+}(\tau)\sqrt{\tau-1/\sqrt{a}}(c_R^{-1}-\tau_1)}{(c_R^{-1}-\tau)(\tau-\tau_1)\sqrt{\tau_1-1/\sqrt{a}}}\Bigg[A+$$

$$+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_2(\zeta)(\tau_1-1/\sqrt{a})}{(\zeta-1/\sqrt{a})(\zeta-\tau_1)}d\zeta\Bigg]d\tau=J_1+J_2,\quad \tau_1=\frac{t+\tau\xi}{x},\quad T=\frac{t}{x-\xi}$$

$$\tau_0=-\left(t-\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\xi^{-1}$$

где D_{+}, D_{+}^{-1}, F_2, A даются формулами (1.10), (2.2) и верхний предел по τ выбран $\tau_1=-\frac{1}{3}\left(t-\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$, поскольку вне него интеграл равен нулю.

Подставляя значение D_{+} из (1.10) и вычисляя двухкратные интегралы, получим

$$J_1=\frac{P}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}AN\left(t,0,x,\xi,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)H\left(T-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

где $\tau_1=L_0$, $l(t_0)=0$, $N(t,0,x,\xi,1/\sqrt{a})$ даются формулой (2.4). Второй интеграл дает

$$J_2=\frac{P}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}H\left(T-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\Bigg[\frac{(1-A)\sqrt{x}}{(x-\xi)\sqrt{-\xi}}+\frac{B(A-1)}{\sqrt{-\xi x}}\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1/2}}{c_R^{-1}-\tau_1}}H\left(\frac{1}{c_R}-\tau_1\right)-$$

$$-\frac{B\sqrt{x}}{\sqrt{-\xi}}\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1/2}}{c_R^{-1}-\tau_1}}\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_2(\tau)d\tau}{(x\tau-\xi c_R^{-1}-t)}H\left(\frac{1}{c_R}-\tau_1\right)-\frac{\sqrt{-\xi}H(1/\sqrt{d}-\tau_1)}{(x-\xi)\sqrt{x}}\times$$

$$\times\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_2(\tau)d\tau}{\tau-1/\sqrt{a}}\int\limits_{\tau_1}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_1(u)\sqrt{(u-1/\sqrt{a})(u-\tau_1)}[u+t\xi^{-1}-x(\xi c_R)^{-1}]}{(c_R^{-1}-u)(T-u)\left[u+\frac{1}{\xi}(t-\tau x)\right]}du+$$

$$+\frac{\xi\sqrt{-\xi}}{x\sqrt{x}(x-\xi)}\int\limits_{\tau_1}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_2(\tau)\sqrt{\tau-\tau_1}(\tau-c_R^{-1})d\tau}{\sqrt{\tau-1/\sqrt{a}}(t/x+\xi/xc_R-\tau)(T-\tau)}\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_1(u)duH(1/\sqrt{d}-\tau_1)}{t/x-\tau+u\xi/x}+$$

$$+\frac{\pi}{x-\xi}(T-a^{-1/2})F_1(T)\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_1(\tau)d\tau}{(\tau-1/\sqrt{a})(\tau-T)}H\left(\frac{1}{\sqrt{d}}-\tau_0\right),\quad \tau_0=\frac{t}{x}+\frac{\xi}{x\sqrt{a}}$$

что совпадает с значением σ_y на ox, определяемой формулой (2.4) после упрощений. Окончательно из (3.2) получитс значение σ_y вблизи вершины трещины $x=0$

$$\sigma_y=\frac{P}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{1-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1/2}}{c_R^{-1}+\frac{t}{\xi}}}H\left(\frac{1}{c_R}+\frac{t}{\xi}\right)-\int\limits_{t/-\xi}^{1/\sqrt{d}}\frac{\sqrt{\tau-1/\sqrt{a}}\,F_1(\tau)}{\left(\frac{1}{c_R}-\tau\right)\sqrt{\tau+\frac{t}{\xi}}}\times\right.$$

$$\left.\times d\tau H\left(\frac{1}{\sqrt{d}}+\frac{t}{\xi}\right)\right\}\frac{H\left(\frac{t}{-\xi}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{-\xi x}}$$

где в скобках второй и третий члены равны нулю при прохождении через вершину трещины волны $x=c_R t$ и продольной волны $x=\sqrt{a}\,t$, что совпадает с (2.5) при $l(t)=0$, $\tau=0$. Таким образом показано, что формула для коэффициента интенсивности напряжений [2, 3] может быть приведена к более удобной записи, полученной в [1] для изотропной упругой среды.

§ 4. Случай касательного импульса

Граничные данные при $y=0$ имеют вид

$$\sigma_{xy}=\tau^0(t,\tau,x,\xi)=-Q\delta(x-\xi)H(t-\tau),\qquad x<l(t)$$

$$u=0,\quad x>l(t);\quad \sigma_y=0,\quad -\infty<x<\infty \tag{4.1}$$

Решение уравнений (1.1) пишется в виде (1.3) и для

$$u^{LF}=u_+^{LF}+u_-^{LF},\quad \sigma_{xy}^{LF}=\tau_+^{LF}+\tau_-^{LF},\quad u_+^{LF}=0$$

получится уравнение

$$u^{LF}(s,q)=S^{LF}(s,q)\,\sigma_{xy}^{LF}(s,q)$$

$$S^{LF}(s,q)=-\frac{C_0}{\varrho}\sqrt{ab}\,\frac{\sqrt{\frac{s^2}{d}+q^2}}{\frac{s^2}{c_R^2}+q^2}D_+\cdot D_-=S_+^{LF}\cdot S_-^{LF} \tag{4.2}$$

$$S_+^{LF}(s,q)=\frac{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{d}}-iq}}{\frac{s}{c_R}-iq}D_+(iq/s),\quad S_-^{LF}(s,q)=-\frac{C_0\sqrt{ab}}{\varrho}\frac{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{d}}+iq}}{\frac{s}{c_R}+iq}D_-\left(\frac{iq}{s}\right)$$

Вводя аналогично § 1 преобразованные значения $D_\pm(iq/s)$, можно найти

$$S_+(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\frac{\partial}{\partial t}H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left\{\left[1-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-d^{-1/2}}{c_R^{-1}-t/x}}H\left(c_R^{-1}-\frac{t}{x}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{\sqrt{d}}\right)+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{t/x}\frac{F_1(u)}{c_R^{-1}-u}\sqrt{\frac{d^{-1/2}-u}{t/x-u}}\,du\,H(d^{-1/2}-t/x)\right\}$$

$$P_+(t,x)=\frac{H(x)}{x\sqrt{\pi x}}\frac{\partial}{\partial t}\left\{(c_R^{-1}-d^{-1/2})D_+^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)\delta\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{\sqrt{d}}\right)-\right. \tag{4.3}$$

$$\left.-\left[\frac{1}{2}H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{\sqrt{d}}\right)-\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{t/x}\frac{d}{du}\left(\frac{(c_R^{-1}-u)F_2(u)}{\sqrt{d^{-1/2}-u}}\right)\frac{du}{\sqrt{t/x-u}}H\left(\frac{1}{\sqrt{d}}-\frac{t}{x}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{c_R}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\left[D_+^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\delta\left(t-\frac{x}{\sqrt{d}}\right)-\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}F_4(h)\delta(t-hx)dh\right]\frac{H(x)}{\sqrt{x}}\right\}$$

$$F_4(h)=\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{h}\frac{d}{du}\left(\frac{F_2(u)}{\sqrt{1/\sqrt{d}-u}}\right)\frac{du}{\sqrt{h-u}},\quad D_+^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)=1+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_2(u)}{u-1/\sqrt{d}}du$$

Значение $\tau_+^0(t,\tau,x,\xi)$ на оси x имеет вид

$$\tau_+^0(t,\tau,x,\xi)=\frac{Q}{\pi}\left[D_+^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)M_0\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)-\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}F_4(h)M_0(h)dh\right]H\left(T-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$M_0(h)=\frac{1-c_R^{-1}\dot{l}}{1-h\dot{l}}\,\frac{M_1^0H(L_0-a^{-1/2})}{\sqrt{(x-l)(l-\xi)}}-\frac{M_2^0H(L_0-a^{-1/2})}{x-\xi}$$

$$M_1^0=\left[1-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-d^{-1/2}}{c_R^{-1}-L_0}}H(c_R^{-1}-L_0)\right]H\left(L_0-\frac{1}{\sqrt{d}}\right)+\Phi_0\left(L_0,\frac{1}{c_R}\right) \tag{4.4}$$

$$M_2^0=\sqrt{\frac{x-l}{l-\xi}}\left[H\left(L_0-\frac{1}{\sqrt{d}}\right)+\Phi_0(L_0,T)\right]-\pi F_1(T)\sqrt{\frac{d^{-1/2}-T}{h-T}}H\left(\frac{1}{\sqrt{d}}-L_0\right)$$

$$\Phi_0(p_2,p_1)=\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{p_1}\frac{F_1(u)}{p_2-u}\sqrt{\frac{d^{-1/2}-u}{p_1-u}}\,du\,H\left(\frac{1}{\sqrt{d}}-p_1\right),\quad T=\frac{t-\tau}{x-\xi}$$

$$t-t_0=h(x-l),\quad L_0=(t_0-\tau)(l-\xi)^{-1},\quad l=l(t_0)$$

§ 5 Нахождение коэффициента интенсивности напряжений в случае касательного импульса

При $x\to l(t)$ из (4.4) получится

$$\lim_{x\to l(t)+0} \sqrt{2\pi(x-l)}\,\sigma_{xy} = Q\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{g_1(t)(1-c_R^{-1}\dot{l})}{\sqrt{l-\xi}\,\sqrt{1-\dot{l}d^{-1/2}}}\,H(L_0-a^{-1/2}) \tag{5.1}$$

$$g_1(t)=\left[1-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-d^{-1/2}}{c_R^{-1}-L_0}}\,H(c_R^{-1}-L_0)\right]H\left(L_0-\frac{1}{\sqrt{d}}\right)+\Phi_0\left(L_0,\ \frac{1}{c_R}\right)$$

$$L_0=(t-\tau)/(l-\xi),\quad l=l(t)$$

Для $l(t)=0$, $\tau=0$ в [3] получена формула

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{2\pi x}\,\sigma_{xy}=Q\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{g_1(t)}{\sqrt{-\xi}}\,H(L_0-a^{-1/2}) \tag{5.2}$$

что следует из (5.1).

Для произвольной нагрузки $\sigma_y=\sigma_-(t,x)$ напряжение на продолжении полубесконечной трещины получается из решения (2.4) путем суперпозиции ($P=1$)

$$\sigma_+(t,x)==\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0}^{l+0}\frac{\partial\sigma_-(\tau,\xi)}{\partial\tau}\,\sigma_+^0(t,\tau,x,\xi)\,d\tau\,d\xi \tag{5.3}$$

Более простым способом, чем сделано в [1], можно подставить (2.5) в (5.3) и получить формулу

$$\lim_{x\to l+0}\sqrt{2\pi(x-l)}\,\sigma_+=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-c_R^{-1}\dot{l}}{\sqrt{1-\dot{l}a^{-1/2}}}\,K(\dot{l})(-J_1+J_2+J_3) \tag{5.4}$$

$$J_1=\int_{l-t\sqrt{a}}^{l}\sigma_-\left(t-\frac{l-\xi}{\sqrt{a}},\ \xi\right)\frac{d\xi}{\sqrt{l-\xi}},\quad J_3=\int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}F_5(u)\int_{-0}^{t+0}\sigma'_-(t-\tau,\ l-\tau/u)\sqrt{\tau}\,d\tau\,du$$

$$J_2=B\sqrt{c_R^{-1}-a^{-1/2}}\int_{tc_R}^{t\sqrt{a}}(uc_R^{-1}-t)^{-1/4}\int_{-0}^{\lambda}\sigma'_-(\tau,\ l+\tau c_R-u)\,d\tau\,du$$

$$F_5(u)=u^{-3/2}\int_{u}^{1/\sqrt{a}}\frac{F_1(\omega)}{c_R^{-1}-\omega}\sqrt{\frac{\omega-a^{-1/2}}{\omega-u}}\,d\omega,\quad \lambda=\frac{t-ua^{-1/2}}{1-c_Ra^{-1/2}}$$

$$l=l(t),\quad \sigma'_-(\tau,g(\tau))=\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma_-(\tau,\xi)\quad \text{при}\quad \xi=g(\tau)$$

В частности, для $\sigma_-=-PH(-x)H(t)$ из (5.4) получится

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{2\pi x}\,\sigma_+=2P\sqrt{\frac{2c_R^{-1}t}{\pi\sqrt{a}}}\,D_-(0),\quad D_+(0)=\frac{\sqrt{K_1}}{c}\left(2b\sqrt{ab}+\frac{Lb}{d}\right)^{-1/4}$$

что для изотропной среды совпадает с решением [10] с вычислением интеграла $D_+(0)$. Если $\sigma_-=-P\delta(x)\,H(t)$, то получится формула

(2.5) при $\tau=\xi=0$ и при $l<c_R$, $g=1$, что в изотропном случае получено в работе [6]. В случае касательной нагрузки $\tau_{xy}=\tau_-(t, x)$ аналогично (5.4) получится ($Q=1$)

$$\lim_{x \to l+0} \sqrt{2\pi(x-l)}\,\tau_+ = \sqrt{\frac{2}{\pi}}K(l)\frac{1-c_R^{-1}l}{\sqrt{1-ld^{-1/2}}}(-J_1+J_2-J_3) \tag{5.5}$$

$$J_1=\int_{l-t\sqrt{d}}^{l}\tau_-\left(t-\frac{l-\xi}{\sqrt{d}},\ \xi\right)\frac{d\xi}{\sqrt{l-\xi}},\quad J_3=\int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}F_0(u)du\int_{0}^{t+0}\tau_-\left(t-\tau,\ l-\frac{\tau}{u}\right)\sqrt{\tau}\,d\tau$$

$$J_2=B\sqrt{c_R^{-1}-d^{-1/2}}\int_{tc_R}^{t\sqrt{d}}du\int_{0}^{\tau_1}(c_R^{-1}u-t)^{-1/2}\,\tau_-(\tau,\ l+\tau c_R-u)d\tau$$

$$\tau_1=\frac{t\sqrt{d}-u}{\sqrt{d}-c_R},\quad F_0(u)=u^{-3/2}\int_{1/\sqrt{a}}^{u}\frac{F_1(\omega)}{c_R^{-1}-\omega}\sqrt{\frac{d^{-1/2}-\omega}{u-\omega}}\,d\omega$$

При $\tau_-=-QH(-x)H(t)$ можно из (5.5) получить

$$\lim_{x\to l+0}\sqrt{2\pi x}\,\tau_+=2Q\sqrt{\frac{2c_R t}{\pi\sqrt{d}}}\,D_+(0)=2Q\left(\frac{2K_2 t}{\pi(2bd\sqrt{ab}+Lb)^{1/2}}\right)^{1/2}$$

что другим путем получено в [4].

Если $\tau_-(t, x)=-Q\delta(x)H(t)$, то получится формула (5.1) при $\tau=\xi=0$ и для $l<c_R t$, $g_1(t)=1$.

Автор благодарит А. Г. Багдоева за ценные советы.

THE MOTION OF CUT IN ANISOTROPIC MEDIUM

A. N. MARTIROSSIAN

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՃԱՔԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Տրվում է կիսաանվերջ ճաքի եզրին կիրառված նորմալ և շոշափող իմպուլսների վերաբերյալ խնդրի լուծումը անիզոտրոպ առաձգական միջավայրի համար, երբ ճաքի գագաթը շարժվում է կամայական օրենքով։ Ճաքի շարժման ուղղությամբ ուղղված առանցքի վրա հաշվված են լարումները։ Բեռնավորման մասնավոր դեպքերի և կամայական եզրային պայմանների համար որոշված են լարումների ինտենսիվության գործակիցները։ Ստացված արդյունքները համեմատված են անիզոտրոպ և իզոտրոպ միջավայրերի համար նախօրոք ստացված արդյունքների հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сарайкин В. А., Слепян Л. И.* Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.—Изв. АН СССР, МТТ, 1979, №4, с. 54—73.
2. *Мартиросян А. Н.* Решение некоторых нестационарных задач для анизотропной среды.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. *28*, №1, с. 34—48.
3. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы.—Изв. АН СССР, МТТ, 1976, №1, с. 100—110.
4. *Свекло В. А.* К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела.—ПММ, 1961, т. *25*, вып. 5, с. 885—896.
5. *Зволинский Н. В., Флитман Л. М., Костров Б. В., Афанасьев В. А.*, Некоторые задачи дифракции упругих волн. В сб.: Приложения теории функций в механике сплошной среды, т. 1. М.: 1965.
6. *Freund L. B.* Crack Propagation in an elastic solid subjected to general loading—I constant rate of extension.—J. Mech. Phys. Solids, 1972, v. 20, P. 129—140.
7. *Norris A. N., Achenbach J. D.* Elastic wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversely isotropic material.—Q. Jl. Mech. appl. Math., v. 37, pt. 4, 1984, p. 565—580.
8. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
9. *Осипов И. О.* К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника.—ПММ, 1969, т. *33*, вып. 3, с. 548—555.
10. *Baker B. R.* Dynamic strasses created by a moving crack.—Trans. ASME ser. E. J. Appl. Mech., 1962, v. 29, № 3.
11. *Ахинян Ж. О., Багдоев А. Г.* Определение движения магнитоупругой среды при точечных воздействиях.—Прикл. механика, 1977, т. XIII, №4, с. 9—14.

Армянский педагогический
институт им. Х. Абовяна.

Поступила в редакцию
12.XI.1986