

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ МАГНИТОМЯГКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ
 ОБОЛОЧКИ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ՄԿՐՏՅԱՆ Ս. Ա

В работе, исходя из общих нелинейных уравнений возмущенного состояния, выведены линеаризованные уравнения устойчивости магнитомягкой сферической оболочки в стационарном неоднородном магнитном поле. На основе этих уравнений исследуется поведение оболочки в начальном однородном магнитном поле. Установлена возможность потери устойчивости возмущенного состояния. Получена формула для определения критического значения напряженности внешнего магнитного поля.

1 Пусть изотропная замкнутая сферическая оболочка толщины $2h$ и радиуса срединной поверхности R , изготовленная из магнитомягкого материала, находится в стационарном неоднородном магнитном поле H_0 . Упругие свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Электромагнитные свойства среды, окружающей оболочку, эквивалентны свойствам вакуума. Ортогональная система координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ выбирается так, что срединная поверхность оболочки отнесена к сферическим координатам α_1, α_2 (α_1 —полярный угол, α_2 —азимутальный), а α_3 направлена по нормали к срединной поверхности.

В отношении тонкой оболочки считается справедливой гипотеза недеформируемых нормалей. Принимается, что силы, с которыми магнитное поле действует на токи проводимости, пренебрежимо малы по сравнению с силой, обусловленной намагниченностью материала оболочки [1, 2].

Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле происходит намагничивание материала, приводящее к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве. Это изменение приводит к наложению на начальное поле H_0 магнитного поля H^0 , создаваемого намагничиванием тела. Поэтому невозмущенное магнитное поле $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}^0$ должно удовлетворять следующим уравнениям магнитостатики:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.1)$$

где \vec{B} —вектор магнитной индукции. В вакууме векторы \vec{B} и \vec{H} свя-

заны соотношением $\vec{B} = \mu \vec{H}$, а в магнитном материале $-\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, где \vec{M} —вектор намагниченности, μ —универсальная постоянная. Для магнитомягких ферромагнитных материалов с линейной характеристикой [1, 2] $\vec{M} = \chi \vec{H}$ или $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$, где χ —магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ —относительная магнитная проницаемость материала оболочки. На основе этой модели ферромагнетизма невозмущенное магнитное поле определяется из решения следующей задачи магнитостатики:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= 0, & \text{div} \vec{H} &= 0, & \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{H}^{(a)} &= \vec{H}_0 \\ [\vec{B}^{(a)} - \vec{B}^{(e)}] \cdot \vec{n}_0 &= 0, & [\vec{H}^{(a)} - \vec{H}^{(e)}] \times \vec{n}_0 &= 0 & \text{при } \vec{r} \in S \end{aligned} \quad (1.2)$$

где \vec{n}_0 —единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности S тела, \vec{r} —радиус-вектор рассматриваемой точки, индекс « a » обозначает принадлежность к внутренней области (пространство, занимаемое оболочкой), а индекс « e »—к внешней области (пространство вне оболочки).

Вследствие того, что магнитная проницаемость материала оболочки μ , отлична от единицы ($\mu \gg 1$), на поверхности оболочки компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этими разрывами обусловлено появление магнитного давления P_0 , определяемого формулой

$$\vec{P}_0 = [\vec{T}^{(a)} - \vec{T}^{(e)}] \cdot \vec{n}_0 \quad (1.3)$$

где \vec{T}^0 —тензор напряжений Максвелла невозмущенного состояния

$$T_{ik}^0 = H_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (1.4)$$

δ_{ik} —символ Кронекера.

Под действием нагрузки P_0 в оболочке устанавливается начальное невозмущенное состояние, характеризующееся вектором перемещений \vec{u}_0 и тензором упругих напряжений $\vec{\tau}^0$. Исходное состояние оболочки, как обычно, определяется из линейных уравнений теории упругости при поверхностных условиях, написанных без учета деформаций поверхностей, ограничивающих оболочку. Тогда характеристики невозмущенного состояния будут определяться из следующих уравнений равновесия и граничных условий на поверхности S :

$$\text{div} \vec{\tau}^0 = 0 \quad (1.5)$$

$$\vec{\tau}^0 \cdot \vec{n}_0 = \vec{P}_0 \quad \text{при } \vec{r} \in S \quad (1.6)$$

Характеристики возмущенного состояния $(\vec{u}_0 + \vec{u}, \vec{\tau}^0 + \vec{\tau}, \vec{P}_0 + \vec{P}, \vec{H} + \vec{h})$ должны удовлетворять нелинейным уравнениям и граничным

условиям на деформированной поверхности оболочки. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия, аналогично работам [3, 4], линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения возмущенного состояния:

в области, занимаемой оболочкой

$$\operatorname{div}[\vec{\varepsilon} + 2(\nabla \vec{u})^*] - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7)$$

во всем пространстве

$$\operatorname{rot} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0 \quad (1.8)$$

Решения уравнений (1.7) и (1.8) связаны следующими линейными условиями на поверхностях $\alpha_i = \pm h$ оболочки:

$$\varepsilon[\vec{E} - \vec{T}^{(0)} - \vec{T}^{(1)}] \vec{n}_i = 0 \quad (1.9)$$

$$\{\rho, \vec{h}^{(0)} - \vec{h}^{(1)} + [\mu, \vec{H}^{(0)} - \vec{H}^{(1)}](\nabla \vec{u})^* + \vec{u} \nabla \{ \rho, \vec{H}^{(0)} - \vec{H}^{(1)} \} \} \cdot \vec{n}_i = 0 \quad (1.10)$$

$$\{ \vec{h}^{(0)} - \vec{h}^{(1)} + [\vec{H}^{(0)} - \vec{H}^{(1)}](\nabla \vec{u})^* + \vec{u} \nabla [\vec{H}^{(0)} - \vec{H}^{(1)}] \} \times \vec{n}_i = 0 \quad (1.11)$$

Здесь

$$\vec{\varepsilon} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} (\operatorname{div} \vec{u}) \vec{E} + \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^* \right] \quad (1.12)$$

$$\vec{T}_{ik} = h_i \theta_k + h_k \theta_i - \lambda_{ik} \vec{v} \cdot \vec{v} \quad (1.13)$$

где \vec{E} — единичный тензор, ∇ — набла-оператор Гамильтона, $(\nabla \vec{u})^*$ — транспонированный тензор $\nabla \vec{u}$, \vec{T} — тензор напряжений Максвелля возмущенного состояния.

2. Пусть для рассматриваемой оболочки справедливы гипотеза Кирхгофа-Лява и допущение Кармана относительно углов поворота $2\omega = \operatorname{rot} \vec{u}$, то есть принимается, что справедливы следующие приближенные соотношения:

$$u_1 = \left(1 + \frac{z_2}{R}\right) u - \frac{z_2}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = \left(1 + \frac{z_1}{R}\right) v - \frac{z_1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \omega_3 = 0 \quad (2.1)$$

где $u(x_1, z_2, t)$, $v(x_1, z_2, t)$, $w(x_1, z_2, t)$ — искомые тангенциальные и нормальные перемещения точек срединной поверхности оболочки, u_1 , u_2 , u_3 — перемещения произвольной точки оболочки, $A_1 = R$, $A_2 = R \sin \alpha_1$ — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки.

В силу (2.1) условия (1.10), (1.11) принимают следующий вид на поверхностях $\alpha_i = \pm h$:

$$h_1^{(0)} = h_1^{(e)} + \frac{\nu_r - 1}{\mu_r} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (H_3^{(e)} w), \quad h_2^{(0)} = h_2^{(e)} + \frac{\nu_r - 1}{\mu_r} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (H_3^{(e)} w)$$

$$h_3^{(0)} = \frac{1}{\mu_r} h_3^{(e)} + \frac{\nu_r - 1}{\mu_r} \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)} A_2 w) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)} A_1 w) \right] \quad (2.2)$$

Подставляя (1.12) и (2.1) в (1.7) и осредняя полученные при этом уравнения по толщине оболочки, с учетом поверхностных условий (1.9) и (2.2) получим следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости оболочки:

$$\frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x_1} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\Delta + 2) w \right] + \frac{1 - \nu}{R} \left(\frac{u}{R} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{(1 - \nu^2) \nu_0 (1 - \nu_r)}{2E h \nu_r} \left[\frac{H_3^{(e)+}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (H_3^{(e)+} w) - \frac{H_3^{(e)-}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_2} (H_3^{(e)-} w) + \frac{\nu_r H_1^{(e)+}}{A_1 A_2} \times \right.$$

$$\times \left. \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)+} A_2 w) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)+} A_1 w) \right] - \frac{\nu_r H_1^{(e)-}}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)-} A_2 w) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)-} A_1 w) \right] \right] = 0$$

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial \delta v}{\partial x_2} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\Delta + 2) w \right] + \frac{1 - \nu}{R} \left(\frac{v}{R} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{(1 - \nu^2) \nu_0 (1 - \nu_r)}{2E h \nu_r} \left[\frac{H_3^{(e)+}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (H_3^{(e)+} w) - \frac{H_3^{(e)-}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (H_3^{(e)-} w) + \frac{\nu_r H_2^{(e)+}}{A_1 A_2} \times \right.$$

$$\times \left. \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)+} A_2 w) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)+} A_1 w) \right] - \frac{\nu_r H_2^{(e)-}}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)-} A_2 w) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)-} A_1 w) \right] \right] = 0 \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{h^2}{3R^3} \Delta - \frac{1 + \nu}{R} \right) w - \frac{h^2}{3R^3} (\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2) w - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{1 - \nu^2}{2E h} \left[\frac{T_1^0}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{T_2^0}{A_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{2\nu^0}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{(1 - \nu^2) \nu_0 (\nu_r - 1)}{2E h \nu_r} \left[\nu_r \left[H_1^{(e)+} h_1^{(e)+} - H_1^{(e)-} h_1^{(e)-} + H_2^{(e)+} h_2^{(e)+} - \right. \right.$$

$$\left. - H_2^{(e)-} h_2^{(e)-} \right] + H_3^{(e)+} h_3^{(e)+} - H_3^{(e)-} h_3^{(e)-} + \nu_r \left[\frac{H_1^{(e)+}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (H_3^{(e)+} w) - \frac{H_1^{(e)-}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \times \right.$$

$$\times (H_3^{(e)-} w) + \frac{H_2^{(e)+}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (H_3^{(e)+} w) - \frac{H_2^{(e)-}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (H_3^{(e)-} w) \left. \right] -$$

$$- \frac{H_3^{(e)+}}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)+} A_2 w) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)+} A_1 w) \right] + \frac{H_3^{(e)-}}{A_1 A_2} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)-} A_2 w) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)-} A_1 w) \right] \Big| = 0$$

Здесь

$$\theta = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 u) + \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 v) \right] + \frac{2w}{R}$$

$$\Delta = \frac{R^2}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right]$$

T_{11}^0 , T_{22}^0 , S^0 — усилия, характеризующие начальное невозмущенное состояние оболочки, индексами «+», «-» отмечены значения соответствующих величин на поверхностях оболочки.

Рассматривая систему уравнений (2.3), замечаем, что она не замкнута. В нее входят неизвестные граничные значения составляющих индуцированного магнитного поля $\vec{h}^{(+)}$ и $\vec{h}^{(-)}$ на поверхностях оболочки. Введем потенциалы функций $\Phi^{(+)}$ и $\Phi^{(-)}$ посредством

$$\vec{h}^{(+)} = \text{grad} \Phi^{(+)}, \quad \vec{h}^{(-)} = \text{grad} \Phi^{(-)} \quad (2.4)$$

задачу определения возмущенного магнитного поля, согласно (1.8) и (2.2), приводим к решению уравнений

$$\Delta_1 \Phi^{(+)} = 0, \quad \Delta_1 \Phi^{(-)} = 0 \quad (2.5)$$

с условиями на поверхностях $z_3 = \pm h$

$$\Phi^{(+)} = \Phi^{(-)} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} H_3^{(+)} w, \quad \frac{\partial \Phi^{(+)}}{\partial r} = \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial \Phi^{(-)}}{\partial r} +$$

$$+ \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (H_1^{(+)} A_2 w) + \frac{\partial}{\partial z_2} (H_2^{(+)} A_1 w) \right] \quad (2.6)$$

где Δ_1 — трехмерный оператор Лапласа в сферической системе координат.

Найдя решения уравнений (2.5), удовлетворяя граничным условиям (2.6), а также условиям затухания возмущений на бесконечности и ограниченности их в области $z_3 < -h$, определим потенциалы возмущенного магнитного поля $\Phi^{(+)}$ и $\Phi^{(-)}$

$$\Phi^{(+)} = \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\xi} \left[C_{\xi\gamma} \left(\frac{R+z_3}{R-h} \right)^{\xi} + D_{\xi\gamma} \left(\frac{R+h}{R+z_3} \right)^{\xi-1} \right] P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1) \cos \gamma \alpha_2$$

$$\Phi^{(-)} = \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\xi} \left[\Phi_{\xi\gamma}^{(+)} \left(\frac{R+h}{R+z_3} \right)^{\xi+1} P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1) \cos \gamma \alpha_2 \right] \quad \text{при } z_3 > h$$

$$\Phi^{(-)} = \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\xi} \left[\Phi_{\xi\gamma}^{(+)} \left(\frac{R+z_3}{R-h} \right)^{\xi} P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1) \cos \gamma \alpha_2 \right] \quad \text{при } z_3 < -h \quad (2.7)$$

Здесь $P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1)$ — присоединенные функции Лежандра.

$$C_{\xi\gamma} = \frac{1}{\Delta_{\xi\gamma}} \left[-\frac{a_{\xi\gamma}}{R-h} \left(\xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) + \frac{(\xi+1)(\mu_r-1)^{\xi} b_{\xi\gamma}}{\mu_r(R+h)} \right]$$

$$D_{\xi\gamma} = \frac{1}{\Delta_{\xi\gamma}} \left[\frac{n(1-\mu_r)^{\xi+1} a_{\xi\gamma}}{\mu_r(R-h)} + \frac{b_{\xi\gamma}}{R+h} \left(\xi + \frac{\xi+1}{\mu_r} \right) \right], \quad \lambda = \frac{R-h}{R+h}$$

$$\Delta_{1\xi} = \frac{\lambda - \xi}{R - h} \left(\xi + \frac{\xi + 1}{\mu_r} \right) \left(\xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) + \frac{\xi(\xi + 1)^{\xi}}{R + h} \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \right)^2$$

$$\Phi_{\xi\tau}^{(1)} = \frac{1}{\Delta_{1\xi}} \left\{ - \frac{Q_{\xi\tau}}{(R - h)^{\xi}} \left[\xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} + \frac{\xi(\mu_r - 1)^{\xi + 1}}{\mu_r} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{b_{\xi\tau}}{R + h} \left[\xi + \frac{\xi + 1}{\mu_r} + \frac{(\xi + 1)(\mu_r - 1)}{\mu_r} \right] \right\} + \frac{1 - \mu_r}{\mu_r} \Psi_{\xi\tau}^+$$

$$\Phi_{\xi\tau}^{(2)} = - \frac{1}{\Delta_{1\xi}} \left\{ \frac{a_{\xi\tau}}{R - h} \left[\xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} + \frac{\xi(1 - \mu_r)}{\mu_r} \right] + \frac{b_{\xi\tau}}{(R + h)^{\xi + 1}} \left[\xi + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\xi + 1}{\mu_r} + \frac{(\xi + 1)(\mu_r - 1)^{\xi + 1}}{\mu_r} \right] \right\} + \frac{1 - \mu_r}{\mu_r} \Psi_{\xi\tau}^- \quad (2.8)$$

$$a_{\xi\tau} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \left[\frac{\xi + 1}{\mu_r} \Psi_{\xi\tau}^+ + \frac{R + h}{R} f_{\xi\tau}^+ \right], \quad b_{\xi\tau} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \left[- \frac{1}{\mu_r} \Psi_{\xi\tau}^- + \frac{R - h}{R} f_{\xi\tau}^- \right]$$

$$f_{\xi\tau} = \frac{1}{\|Y_{\xi\tau}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} H_1^{(\sigma)} w \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_2^{(\sigma)} w) \right] P_{\xi,1}(\cos \alpha_1) \cos \alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\Psi_{\xi\tau} = \frac{1}{\|Y_{\xi\tau}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} H_3^{(\sigma)} w P_{\xi,1}(\cos \alpha_1) \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\|Y_{\xi\tau}\|^2 = \frac{2 - \varepsilon_1}{2\xi + 1} \frac{(\xi + \tau)!}{(\xi - \tau)!}, \quad \varepsilon_1 = \begin{cases} 2 & \text{при } \tau = 0 \\ 1 & \text{при } \tau > 0 \end{cases}$$

Подставляя (2.4) в систему (2.3) с учетом (2.7) и (2.8), получим замкнутую двумерную систему разрешающих интегро-дифференциальных уравнений устойчивости относительно некоторых функций u , v , w . Ее решения должны удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

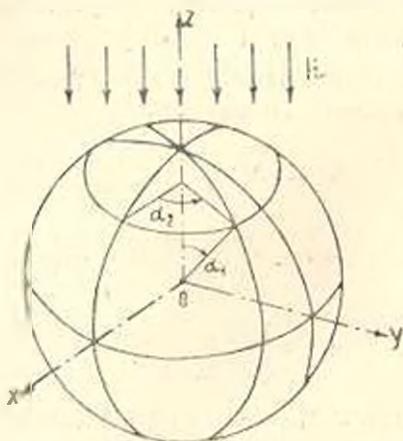
3. На основе полученной системы рассмотрим задачу статической устойчивости магнитомягкой сферической оболочки в однородном магнитном поле с напряженностью \vec{H}_0 (фиг. 1)

$$\vec{H}_0 = H_0 (\sin \tau_3 \cdot \vec{e}_1 - \cos \tau_3 \cdot \vec{e}_3)$$

$$H_0 = \text{const} \quad (3.1)$$

где \vec{e}_i — единичные векторы по направлениям τ_i ($i=1, 2, 3$).

Невозмущенное магнитное поле определяется из решения задачи (1.2), и имеет вид



Фиг. 1

$$\vec{H}^{(v)} = \frac{3H_0(1+2\nu_r)}{\Delta_0} \left\{ \left[1 + \frac{2(1-\nu_r)}{1+2\nu_r} \left(\frac{R-h}{R+\alpha_3} \right)^3 \right] \cos \alpha_1 \vec{e}_3 - \right. \\ \left. - \left[1 + \frac{\nu_r-1}{1+2\nu_r} \left(\frac{R-h}{R+\alpha_3} \right)^3 \right] \sin \alpha_1 \cdot \vec{e}_2 \right\}$$

$$\vec{H}^{(v)} = \frac{9\nu_r H_0}{\Delta_0} (\cos \alpha_1 \cdot \vec{e}_3 - \sin \alpha_1 \cdot \vec{e}_2) \quad \text{при } \alpha_3 < -h$$

$$\vec{H}^{(v)} = -H_0 \left\{ \left[1 + \frac{2(1+2\nu_r)(1-\nu_r)(1-i^3)}{\Delta_0} \left(\frac{R+h}{R+\alpha_3} \right)^3 \right] \cos \alpha_1 \cdot \vec{e}_3 - \right. \quad (3.2)$$

$$\left. - \left[1 + \frac{(1+2\nu_r)(\nu_r-1)(1-i^3)}{\Delta_0} \left(\frac{R+h}{R+\alpha_3} \right)^3 \right] \sin \alpha_1 \cdot \vec{e}_2 \right\} \quad \text{при } \alpha_3 > h$$

где $\Delta_0 = 2(\nu_r - 1)^2 i^3 - (2\nu_r + 1)(\nu_r + 2)$.

Подставляя (3.2) в (1.3) и (1.4), находим следующие значения для поверхностных сил, действующих на оболочку в невозмущенном состоянии:

$$\vec{P}_0 = q_0 \begin{cases} (\mu_1 \mu_2^2 \cos^2 \alpha_1 + \mu_2^2 \sin^2 \alpha_1) \vec{n}_0 & \text{при } \alpha_3 = h \\ 9\mu_r (\cos^2 \alpha_1 + \mu_r \sin^2 \alpha_1) \vec{n}_0 & \text{при } \alpha_3 = -h \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь

$$\mu_1 = 1 + 2\nu_r + 2i^3(1-\nu_r), \quad \mu_2 = 1 - 2\nu_r + i^3(\nu_r-1), \quad q_0 = \frac{9\nu_r(\nu_r-1)H^2}{2\Delta_0}$$

В исходную систему (2.3) входят неизвестные усилия T_1^0 , T_2^0 и S^0 невозмущенного состояния. Их определяем, решая задачу (1.5) — (1.6). Принимая невозмущенное состояние оболочки безмоментным и усредняя уравнение (1.5) по толщине оболочки, с учетом (1.6) и (3.3) для определения указанных неизвестных усилий получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 T_1^0) - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} T_2^0 + A_1 \frac{\partial S^0}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 T_2^0) + \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 S^0) + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} S^0 = 0 \quad (3.4) \\ \frac{T_1^0 + T_2^0}{R} = q_0 i^3 \left[\frac{1}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right)^2 + \gamma \frac{A_2^2}{A_1^2} \right]$$

где $\mu = \mu_r(\mu_1^2 - 9)$, $\gamma = (\mu_1^2 - 9\mu_r)/\mu$.

Решение уравнений (3.4) имеет вид

$$T_1^0 = \frac{q_0 R \mu}{4} \left[1 + \frac{1}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right)^2 + \gamma \frac{A_2^2}{A_1^2} \right], \quad S^0 = 0 \\ T_2^0 = -\frac{q_0 R \mu}{4} \left[1 - \frac{3}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right)^2 - 3\gamma \frac{A_2^2}{A_1^2} \right] \quad (3.5)$$

Подстановкой (3.5), (3.2) в систему (2.3) с учетом (2.4), (2.7) и исключением неизвестных u и v рассматриваемая задача устойчивос-

ти сводится к исследованию следующего интегро-дифференциального уравнения относительно нормального перемещения w :

$$\begin{aligned} & \left[\delta^2(\Delta+1)^2 + 1 \right] (\Delta+2)w - \frac{q_0 R_0^2}{Eh} \left(\frac{h^2}{3R^2} \Delta - 1 - \nu \right) \left[\frac{1}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial z_1} \right)^2 \Delta w - \right. \\ & - \frac{3A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} + \left. \left[1 - \frac{3}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial z_1} \right)^2 \right] w \right] + \gamma \left[\frac{A_2^2}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} + \frac{5A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} + \right. \\ & + 4 \left(1 - \frac{3A_2^2}{2A_1^2} \right) w \left. \right] - \frac{q_0 R(1-\nu_r)}{Eh \mu_r} (\Delta+1-\nu) \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial F}{\partial z_1} - \frac{\Phi}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} - \right. \\ & - \frac{\gamma_1 \mu_r}{1-\mu_r} \left[1 + \frac{1}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial z_1} \right)^2 \right] w \left. \right] - \frac{q_0 R \mu_r}{4Fh} (\Delta+1-\nu) \left[\Delta w + \right. \\ & \left. + (1-\gamma) \left(\frac{A_2^2}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} - \frac{3A_2^2}{2A_1^2} \Delta w \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\xi} F_{\xi\gamma} P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1) \cos \gamma \alpha_2, \quad \lambda^2 = \frac{h^2}{3(1-\nu^2)R^2} \\ \Phi &= \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\xi} \Phi_{\xi\gamma} P_{\xi\gamma}(\cos z_1) \cos \gamma z_2, \quad \gamma_1 = \mu_r (9\mu_r - \mu_1 \mu_2) \\ F_{\xi\gamma} &= [\mu_1 (\xi+1) \mu_{1\xi} + 3\xi \mu_{2\xi} + \gamma_1] I_{\xi\gamma}^{(2)} + (3\mu_r \mu_{2\xi} - \mu_2 \mu_{1\xi}) I_{\xi\gamma}^{(1)} \\ \Phi_{\xi\gamma} &= [(\xi+1)(\mu_{3\xi} + \mu_1 \mu_r) \mu_1 + 3\xi \mu_{4\xi} + 9\mu_r] I_{\xi\gamma}^{(3)} + (\mu_r \mu_{4\xi} - \mu_2 \mu_{3\xi}) I_{\xi\gamma}^{(1)} \\ I_{\xi\gamma}^{(1)} &= \frac{1}{\|Y_{\xi\gamma}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{A_2^2}{A_1^2} w \right) P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1) \cos \gamma \alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \\ I_{\xi\gamma}^{(2)} &= \frac{1}{\|Y_{\xi\gamma}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} w P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1) \cos \gamma \alpha_2 \sin \alpha_1 d\alpha_1 d\alpha_2 \\ \mu_{1\xi} &= \frac{1}{R \Delta_{1\xi}} \left[\left(\xi+1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) \left(3\mu_r - \frac{\mu_2}{\lambda^{\xi}} \right) + \frac{\xi(1-\mu_r)}{\mu_r \lambda^{\xi+1}} \left(\mu_2 + \frac{3\mu_r}{\lambda^{\xi+1}} \right) \right] \\ \mu_{2\xi} &= \frac{1}{R \Delta_{1\xi}} \left[\frac{(\xi+1)(\mu_r-1)\lambda^{\xi}}{\mu_r} \left(3\mu_r - \frac{\mu_2}{\lambda^{\xi}} \right) - \left(\xi + \frac{\xi+1}{\mu_r} \right) \left(\mu_2 + \frac{3\mu_r}{\lambda^{\xi+1}} \right) \right] \\ \mu_{3\xi} &= \frac{1}{R \Delta_{1\xi}} \left\{ \left(\xi+1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) \left[3\xi + \frac{\mu_1(\xi+1)}{\lambda^{\xi}} \right] + \frac{\xi(\mu_r-1)\lambda^{\xi+1}}{\mu_r} \left[\mu_1(\xi+1) - \frac{3\xi}{\lambda^{\xi+1}} \right] \right\} \\ \mu_{4\xi} &= \frac{1}{R \Delta_{1\xi}} \left\{ \left(\xi + \frac{\xi+1}{\mu_r} \right) \left[\mu_1(\xi+1) - \frac{3\xi}{\lambda^{\xi+1}} \right] + \frac{(\xi+1)(\mu_r-1)}{\mu_r \lambda^{\xi}} \left[3\xi + \frac{\mu_1(\xi+1)}{\lambda^{\xi}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

4. Решение уравнения (3.6) представим в виде разложения

$$w = \left(\sum_{n=l}^{\infty} w_n P_{nk}(\cos z_1) \right) \cos k z_2, \quad (k \leq n, \quad i=2, 3, \dots) \quad (4.1)$$

где w_m — неизвестные коэффициенты. $P_{nk}(x)$ — присоединенные функции Лежандра.

Подставляя (4.1) в уравнение (3.6) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений относительно w_m :

$$\Omega_m^2 w_m - \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^{(k)} w_n = 0, \quad (m=l, l+1, l+2, \dots, k \leq n) \quad (4.2)$$

где

$$\Omega_m^2 = \frac{E}{\rho R^2} (i_m - 2) \frac{1 + 2\gamma(i_m - 1)^2}{i_m - 1 + \gamma}, \quad i_m = m(m+1)$$

$$b_{mn}^{(k)} = \frac{q_0}{\rho R h} \frac{i_m - 1 + \gamma}{i_m - 1 + \gamma} [A_{kn}^{(1)} \delta_{m,n} + A_{kn}^{(2)} \delta_{m,n+2} + A_{kn}^{(3)} \delta_{m,n+2}] \quad (4.3)$$

В (4.3) Ω_m — частота собственных колебаний оболочки в вакууме при отсутствии магнитного поля, $\delta_{i,j}$ — символы Кронекера

$$A_{kn}^{(1)} = -\frac{\mu}{4\Delta_0^2(4i_n - 3)} \left\{ 3i_n(i_n - 1) + i_n^2 \gamma + (5i_n - 6)(\gamma - 1) - \frac{8(1+\gamma)}{i_n - 1 + \gamma} [i_n(1 - \gamma) + (2i_n - k^2) + (6 - \gamma)i_n - 1, 5k^2(\gamma + 5)] + \frac{8\gamma}{\mu} (3i_n^2 - k^2 - 2) \right\} + B_{kn}$$

$$A_{kn}^{(2)} = -\frac{(n+k)(n+k-1)\mu}{8(4n^2-1)} \left\{ (i_n - 2n - 2)(1 - \gamma) + \frac{8(1+\gamma)(n-2)[n - \gamma(n-1)]}{i_n - 1 + \gamma} + \frac{8\gamma}{\mu} \right\} - B_{kn}^{(1)}$$

$$A_{kn}^{(3)} = -\frac{(n-k+1)(n-k+2)\mu}{8(2n+1)(2n+3)} \left\{ (i_n + 2n)(1 - \gamma) + \frac{8(1+\gamma)(n+3)[n+1 - \gamma(n+2)]}{i_n - 1 + \gamma} + \frac{8\gamma}{\mu} \right\} - B_{kn}^{(2)}$$

$$B_{kn} = \frac{1}{\Delta_0^2(2n+1)} \left\{ \frac{n^2 - k^2}{2n-1} [(n-1)a_n - c_n] + \frac{(n-k+1)(n+k+1)}{2n+3} [(n+2)b_n + d_n] \right\}$$

$$B_{kn}^{(1)} = \frac{(n+k)(n+k-1)}{4n^2-1} (na_n + c_n), \quad B_{kn}^{(2)} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(2n+1)(2n+3)} [(n+1)b_n - d_n]$$

$$a_n = \frac{1}{\Delta_{2n}} \left\{ [n\mu_1 + (n-1)\mu_2] \left[\frac{(n-1)(\mu_r - 1)}{\mu_r i^{n-1}} \left(\mu_r + \frac{3\mu_r}{\lambda^n} \right) - \left(n - \frac{n-1}{\mu_r} \right) \left(3\mu_r - \frac{\mu_r}{i^{n-1}} \right) \right] + 3(n-1)(\mu_r - 1) \left[\frac{n(\mu_r - 1)\lambda^{n-1}}{\mu_r} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left(3\mu_r - \frac{\mu_r}{\lambda^{n-1}} \right) - \left(n-1 + \frac{n}{\mu_r} \right) \left(\mu_r + \frac{3\mu_r}{\lambda^n} \right) \right] \right\} - \frac{\gamma_1(1-\nu_r)}{\mu_r} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\Delta_{3n}} \left\{ (\nu_1 - \nu_2) \left[\left(n + 2 - \frac{n+1}{\nu_r} \right) \left(3\nu_r - \frac{\nu_2}{\lambda^{n+1}} \right) + \frac{(n+1)(1-\nu_r)}{\nu_r \lambda^{n+2}} \times \right. \right. \\
&\times \left. \left(\nu_2 + \frac{3\nu_r}{\lambda^{n+2}} \right) \right] + 3[n+1 + (n+2)\nu_r] \left[\frac{(n+2)(\nu_r-1)\lambda^{n+1}}{\nu_r} \left(3\nu_r - \frac{\nu_2}{\lambda^{n+1}} \right) - \right. \\
&\left. - \left(n+1 + \frac{n+2}{\nu_r} \right) \left(\nu_2 + \frac{3\nu_r}{\lambda^{n+2}} \right) \right] \left| + \frac{\nu_2(1-\nu_r)}{\nu_r} \right\} \\
c_n &= \frac{1}{\Delta_{2n}} \left\{ (n-1)(\nu_r-3) \left[\left(n-1 - \frac{n}{\nu_r} \right) \left(n\nu_1 - \frac{3n-3}{\lambda^n} \right) + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{n(\nu_r-1)}{\nu_r \lambda^{n-1}} \left(3n-3 + \frac{n\nu_1}{\lambda^{n-1}} \right) \right] - [(n-1)\nu_2 + n\nu_1] \left[\left(n - \frac{n-1}{\nu_r} \right) \left(3n-3 + \frac{n\nu_1}{\lambda^{n-1}} \right) + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{(n-1)(\nu_r-1)\lambda^n}{\nu_r} \left(n\nu_1 - \frac{3n-3}{\lambda^n} \right) \right] \right\} + (\nu_r-1)(n\nu_1^2+9) \\
d_n &= \frac{1}{\Delta_{1n}} \left\{ (n+2)(\nu_1-\nu_2) \left[\left(n+2 - \frac{n+1}{\nu_r} \right) \left(3n-3 + \frac{n\nu_1+2\nu_2}{\lambda^{n+1}} \right) + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{(n+1)(\nu_r-1)\lambda^{n+2}}{\nu_r} \left(n\nu_1+2\nu_2 - \frac{3n+3}{\lambda^{n+2}} \right) \right] + [(n+2)\nu_r + 3(n-1)] \left[\left(n+1 + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{n+2}{\nu_r} \right) \left(n\nu_1+2\nu_2 - \frac{3n+3}{\lambda^{n+2}} \right) + \frac{(n+2)(\nu_r-1)}{\nu_r \lambda^{n+1}} \left(3n+3 + \frac{n\nu_1+2\nu_2}{\lambda^{n+1}} \right) \right] \right\} + \\
&+ (1-\nu_r)[(n+2)\nu_1^2+9] \\
\Delta_{2n} &= \frac{\nu_r}{(1-\nu_r)\lambda^{n-1}} \left(n-1 - \frac{n}{\nu_r} \right) \left(n - \frac{n-1}{\nu_r} \right) + \frac{n(n-1)(1-\nu_r)\lambda^{n-1}}{\nu_r} \\
\Delta_{3n} &= \frac{\nu_r}{(1+\nu_r)\lambda^{n+1}} \left(n+1 + \frac{n+2}{\nu_r} \right) \left(n+2 - \frac{n+1}{\nu_r} \right) + \frac{(n+1)(n+2)(1-\nu_r)\lambda^{n+1}}{\nu_r}
\end{aligned}$$

Условием существования нетривиального решения системы (4.2) является равенство нулю следующего бесконечного определителя:

$$|\delta_{mn} + c_{mn}| = 0 \quad (4.5)$$

где $c_{mn} = -b_{mn}^{(k)} / \Omega_m \Omega_n$.

В силу (4.3) и (4.1) легко заметить, что бесконечный определитель, входящий в уравнение (4.5), относится к классу сходящихся (нормальных) определителей.

Из уравнения (4.5) в первом приближении ($n=m=i$) для критического значения внешнего магнитного поля, при котором оболочка теряет статическую устойчивость, получим следующую формулу:

$$H_{0k} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2Ek(\nu_n-2)}{2\nu_r k(\nu_r-1)\lambda_{kn}} \frac{1+\epsilon^2(\nu_n-1)^2}{\nu_n-1+\nu}}$$

В таблице для оболочки, изготовленной из железоникелевого сплава (пермаллой 68: никеля 68%, железа 32%), для которого $\nu = 2.5 \cdot 10^4$, приведены минимальные значения H_{0k} по числам волн n и k при различных отношениях h/R .

STABILITY OF WEAK-FERROMAGNETIC SPHERICAL SHELL IN THE UNIFORM MAGNETIC FIELD

P. A. MIKRTCHIAN

ՀԱՄԱՍԵՐ՝ ԿՐՏՆԵՐՈՒԿԱՆ ԳԱՇՏՈՒՄ ԿՐՏՆԵՐՈՒԹՅԱՆ ՓՍՓՈՒԿ ԿՆԵՐՈՅԻՆ ԹԱՂԱՆՔԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Պ. Ա. ՄԿՐՏՉԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Այնպիսի զրգռված վիճակի բնագծանույր ոչ զծային հավասարումներից, ստացված են մագնիսապես փափուկ պնդային թաղանթի պայմանագրված կայունության հավասարումները ստացիոնար անհամասեռ մագնիսական դաշտում: Իրանց հիման վրա հետազոտված է թաղանթի վարքը սկզբնական համասեռ մագնիսական դաշտում և փաստված է կայունությունը կորցնելու հնարավորությունը:

Ստացված է բանաձև՝ արտաբին մագնիսական դաշտի լարվածության կրիտիկական արժեքի որոշման համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Мун, Пао И-синь. Магнитоупругое выпучивание тонкой пластинки. Прикл. механика, 1968, № 1.
2. Мун, Пао И-синь. Колебания и динамическая неустойчивость стержня-пластины в поперечном магнитном поле. Прикл. механика, 1969, № 1.
3. Амбарцумян С. А.; Багдасарян Г. Е., Белубегян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
4. Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А. Устойчивость сверхпроводящей сферической оболочки в магнитном поле круговых токов. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1985, 38, № 5, с. 22—32.

Երևանский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
27.III.1987