

УДК 533.6.013.42

КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК С ЖИДКОСТЬЮ, БЛИЗКИХ К ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ

ЛАМПЕР Р. Е., ЛЕВИН В. Е.

В конструкцию летательного аппарата могут входить упругие тонкостенные баки-оболочки. Для расчета их колебаний используются различные методы, схемы которых основаны на допущении об осевой симметрии оболочек. Это позволяет провести решения с разделением переменных.

Назначение конструкции бака или технология изготовления могут вызывать сознательное или случайное отступление от некоторой исходной формы при сохранении упругих параметров исходной оболочки.

Рассмотрим частично заполненную жидкостью оболочку S , подкрепленную шпангоутами. Предположим, что она мало отличается от осесимметричной «основной» оболочки S_0 , имеющей одинаковые с S жесткостные характеристики. Для срединных поверхностей оболочек используем те же обозначения. Отличие оболочки S от S_0 можно считать начальной неправильностью.

Сформулируем задачу о колебаниях бака S , отнеся его к области, занимаемой основным баком. Пренебрежем массой сухого бака и энергией волнообразования на свободной поверхности жидкости.

1. Поверхность вращения S_0 отнесем к цилиндрическим координатам s, θ и параметризуем главными координатами $\chi^1 = s, \chi^2 = \theta$ (s — длина меридиана, θ — окружная координата). Между поверхностями S и S_0 установим взаимнооднозначное соответствие

$$r(s, \theta) = r_0(s, \theta) + \mu U(s, \theta) \quad (1.1)$$

где $r(s, \theta), r_0(s, \theta)$ — радиусы-векторы поверхностей S и S_0 ; $U(s, \theta)$ — вектор начальной неправильности оболочки S , μ — малый параметр.

В силу (1.1) поверхность S также параметризована координатами s, θ . Такой способ параметризации (метод фиктивной деформации) применен к пластинам и оболочкам в работах [1, 2].

По выражению радиуса-вектора (1.1) можно вычислить компоненты метрических тензоров поверхности S и символы Кристоффеля, а затем развернуть тензорные соотношения выбранного варианта теории оболочек применительно к оболочке S . Можно действовать и иначе. Радиус-вектор оболочки S после деформации запишем в аналогичной (1.1) форме

$$\vec{r}^*(s, \vartheta) = \vec{r}(s, \vartheta) + \vec{u}(s, \vartheta) \quad (1.2)$$

где $\vec{u}(s, \vartheta)$ — вектор упругого перемещения оболочки S .

Векторы $\vec{U}(s, \vartheta)$ и $\vec{u}(s, \vartheta)$ разложим на компоненты по единичным ортогональным векторам $\vec{i}_s, \vec{i}_\vartheta, \vec{i}_n$ локального базиса основной оболочки S_0 .

$$\vec{U}(s, \vartheta) = U(s, \vartheta)\vec{i}_s + V(s, \vartheta)\vec{i}_\vartheta + W(s, \vartheta)\vec{i}_n$$

$$\vec{u}(s, \vartheta) = u(s, \vartheta)\vec{i}_s + v(s, \vartheta)\vec{i}_\vartheta + w(s, \vartheta)\vec{i}_n$$

Компоненты первой и второй квадратичных форм недеформированной и деформированной оболочек определяются по формулам

$$a_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j}, \quad b_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^i \partial x^j} \cdot \vec{n}, \quad a_{ij}^* = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial x^j}, \quad b_{ij}^* = \frac{\partial^2 \vec{r}^*}{\partial x^i \partial x^j} \cdot \vec{n}^*$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности, значком (*) снабжены параметры деформированной оболочки. Компоненты тензоров тангенциальной и изгибной деформации оболочки S будут

$$2\tilde{e}_{ij} = a_{ij}^* - a_{ij}, \quad \tilde{\gamma}_{ij} = b_{ij}^* - b_{ij}$$

При сохранении первых степеней κ для малых деформаций получим выражения

$$\tilde{e}_{ij} = r^{i+j-2} (e_{ij} + \kappa e_{ij}^0), \quad \tilde{\gamma}_{ij} = r^{i+j-2} (\gamma_{ij} + \kappa \gamma_{ij}^0) \quad (1.3)$$

Введем обозначения $e_{ij} = e_{ij}(u, v, w)$, $e_{ij}^0 = e_{ij}(U, V, W)$. Величины $e_{ij}(u, v, w)$ определяются формулами

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1}, \quad e_{12} = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad e_{21} = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} \quad (1.4)$$

$$e_{22} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{\cos \gamma}{r} v, \quad e_{23} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \gamma}{r} u + \frac{w}{R_2}, \quad e_{33} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} - \frac{v}{R_2}$$

где $R_{1,2}$ — главные радиусы кривизны поверхности S_0 ; γ — угол между внешней нормалью к S_0 и отрицательным направлением оси z . Через (1.4) параметры в формулах (1.3) определяются так:

$$\begin{aligned} e_{11} &= e_{11}, \quad e_{11}^0 = e_{11}e_{11}^0 + e_{12}e_{12}^0 + e_{13}e_{13}^0 \\ e_{12} &= \frac{1}{2} (e_{12} + e_{21}), \quad e_{12}^0 = \frac{1}{2} (e_{11}e_{21}^0 + e_{11}^0e_{21} + e_{12}e_{22}^0 + e_{12}^0e_{22} + e_{13}e_{23}^0 + e_{13}^0e_{23}) \\ e_{22} &= e_{22}, \quad e_{22}^0 = e_{12}e_{22}^0 + e_{21}e_{21}^0 + e_{22}e_{22}^0 \\ e_{21} &= \frac{\partial e_{12}}{\partial s} - \frac{e_{11}}{R_1}, \quad e_{12} = \frac{\partial e_{21}}{\partial s} - \frac{e_{21}}{R_1}, \quad e_{22} = \frac{1}{r} \frac{\partial e_{22}}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \gamma}{r} e_{11} - \frac{e_{22}}{R_2} \\ e_{11}^0 &= \frac{e_{11}e_{11}^0}{R_1} - \frac{e_{12}e_{12}^0}{R_1} - e_{13} \frac{\partial e_{11}}{\partial s} - e_{13}^0 \frac{\partial e_{11}}{\partial s} - e_{21} \frac{\partial e_{12}}{\partial s} - e_{21}^0 \frac{\partial e_{12}}{\partial s} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \beta_{12}^0 &= [(e_{12} - e_{33})e_{13}^0 + (e_{22}^0 - e_{23}^0)e_{12}] \frac{1}{R_2} + [(e_{22} - e_{11})e_{23}^0 + (e_{22}^0 - e_{11}^0)e_{23} + \\ &+ e_{13}e_{21}^0 + e_{13}^0e_{21}] \frac{\cos \gamma}{r} - \frac{1}{r} e_{13} \frac{\partial e_{11}^0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} e_{13}^0 \frac{\partial e_{11}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} e_{23} \frac{\partial e_{12}^0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} e_{23}^0 \frac{\partial e_{12}}{\partial \theta} \\ \beta_{22}^0 &= (e_{13}e_{13}^0 - e_{23}e_{23}^0) \frac{1}{R_2} + [(e_{22} - e_{11})e_{11}^0 + (e_{22}^0 - e_{11}^0)e_{13} - (e_{12} + e_{21})e_{23}^0 - \\ &- (e_{12}^0 + e_{21}^0)e_{23}] \frac{\cos \gamma}{r} - \frac{1}{r} e_{13} \frac{\partial e_{11}^0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} e_{13}^0 \frac{\partial e_{11}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} e_{23} \frac{\partial e_{12}^0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} e_{23}^0 \frac{\partial e_{12}}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Результаты двух подходов к вычислению компонентов тензоров деформаций совпадают.

Энергию деформации оболочки при известных допущениях можно выразить через деформации ее срединной поверхности (например, [3])

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{S_0} [S^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta} (-\xi_{\alpha\beta})] \sqrt{a} dx^1 dx^2$$

где

$$S^{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\nu a^{\alpha\beta} a^{ij} \varepsilon_{ij} + (1-\nu) \varepsilon^{\alpha\beta}]$$

$$H^{\alpha\beta} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [\nu a^{\alpha\beta} a^{ij} (-\xi_{ij}) + (1-\nu)(-\xi^{\alpha\beta})]$$

a^{ij} — контравариантные компоненты первого метрического тензора поверхности S ; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости материала оболочки; h — толщина оболочки. С учетом (1.5) энергию деформации оболочки с неправильностью можно представить в виде основного слагаемого и малого добавка:

$$\Pi = \Pi_0 + \Delta \Pi \quad (1.6)$$

где

$$\Pi_0 = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint_{S_0} [\varepsilon_{11}^2 + 2\nu \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + 2(1-\nu) \varepsilon_{12}^2] r ds d\theta +$$

$$+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint_{S_0} [\xi_{11}^2 + 2\nu \xi_{11} \xi_{22} + \xi_{22}^2 + 2(1-\nu) \xi_{12}^2] r ds d\theta$$

$$\Delta \Pi = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint_{S_0} [2\varepsilon_{11} \varepsilon_{11}^0 + 2\varepsilon_{22} \varepsilon_{22}^0 + 2\nu \varepsilon_{11} \varepsilon_{22}^0 + 2\nu \varepsilon_{22} \varepsilon_{11}^0 +$$

$$+ 4(1-\nu) \varepsilon_{12} \varepsilon_{12}^0 + \varepsilon_{12} (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 (e_{12}^0 + e_{21}^0) - 2(1-\nu) \varepsilon_{12}^0 (e_{11}^0 + e_{22}^0) -$$

$$- 2\nu \varepsilon_{11} \varepsilon_{22}^0 (e_{11}^0 + e_{22}^0) + \varepsilon_{11}^2 (e_{22}^0 - 3e_{11}^0) + \varepsilon_{22}^2 (e_{11}^0 - 3e_{22}^0)] r ds d\theta +$$

$$+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint_{S_0} [2\xi_{11} \xi_{11}^0 + 2\xi_{22} \xi_{22}^0 + 2\nu \xi_{11} \xi_{22}^0 + 2\nu \xi_{22} \xi_{11}^0 +$$

$$+4(1+\nu)\beta_{12}\beta_{12}^0-4\beta_{12}(\beta_{11}+\beta_{22})(e_{12}^0+e_{21}^0)-2(1-\nu)\beta_{12}^2(e_{11}^0-e_{22}^0)-$$

$$-2\nu\beta_{11}\beta_{22}(e_{11}^0+e_{22}^0)+\beta_{11}^2(e_{22}^0-3e_{11}^0)+\beta_{22}^2(e_{11}^0-3e_{22}^0)|rdsd\theta$$

В рамках аналогичной схемы записывается и энергия деформаций первоначально кольцевого шпангоута, претерпевающего вместе с оболочкой S_0 фиктивную деформацию. Примем допущение о том, что ось шпангоута совпадает с линией его контакта с оболочкой. Упругие деформации оси шпангоута $\tilde{z}$, изменение его кривизны в направлении меридиана и нормали $\tilde{x}_s, \tilde{x}_n$ и кручение $\tilde{x}_{ns}$ можно представить в подобной (1.3) форме с выделением слагаемых, в которые μ входит в первой степени

$$\tilde{z} = z + \mu e^0, \quad \tilde{x}_s = x_s + \mu x_s^0, \quad \tilde{x}_n = x_n + \mu x_n^0, \quad \tilde{x}_{ns} = x_{ns} + \mu x_{ns}^0$$

где

$$z = e_{22} \quad x_s = -\frac{1}{r} \left(e_{13} \cos \chi + \frac{\partial e_{22}}{\partial \theta} \right), \quad x_n = \frac{1}{r} \left(e_{13} \sin \chi - \frac{\partial e_{21}}{\partial \theta} \right)$$

$$x_{ns} = \frac{1}{r} \left(e_{21} \sin \chi - e_{23} \cos \chi + \frac{\partial e_{12}}{\partial \theta} \right), \quad z^0 = -e_{22}e_{22}^0 + e_{21}e_{21}^0 + e_{23}e_{23}^0$$

$$x_s^0 = \frac{1}{r} \left[e_{13} \frac{\partial e_{21}^0}{\partial \theta} + e_{13}^0 \frac{\partial e_{22}}{\partial \theta} + e_{23} \frac{\partial e_{22}^0}{\partial \theta} + e_{23}^0 \frac{\partial e_{22}}{\partial \theta} + e_{22} \frac{\partial e_{23}^0}{\partial \theta} + 2e_{22}^0 \frac{\partial e_{21}}{\partial \theta} + \right.$$

$$\left. + e_{13}(e_{11}^0 + e_{22}^0) \cos \chi + e_{13}^0 e_{11} \cos \chi + e_{23}(e_{12}^0 + e_{21}^0) \cos \chi - e_{13}e_{13}^0 \sin \chi - e_{21}e_{21}^0 \sin \chi \right]$$

$$x_n^0 = \frac{1}{r} \left[-e_{13} \frac{\partial e_{22}^0}{\partial \theta} - e_{13}^0 \frac{\partial e_{23}}{\partial \theta} + e_{21} \frac{\partial e_{22}^0}{\partial \theta} + e_{21}^0 \frac{\partial e_{23}}{\partial \theta} + e_{22} \frac{\partial e_{21}^0}{\partial \theta} + 2e_{22}^0 \frac{\partial e_{21}}{\partial \theta} - \right.$$

$$\left. - e_{13}(e_{11}^0 + e_{22}^0) \sin \chi - e_{13}^0 e_{11} \sin \chi - e_{23}e_{12}^0 \sin \chi - e_{23}^0 e_{12} \sin \chi - e_{13}e_{13}^0 \cos \chi - e_{23}e_{23}^0 \cos \chi \right]$$

$$x_{ns}^0 = \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial e_{23}}{\partial \theta} e_{21}^0 - \frac{\partial e_{23}^0}{\partial \theta} e_{21} - \frac{\partial e_{13}}{\partial \theta} (e_{11}^0 + e_{22}^0) - \frac{\partial e_{13}^0}{\partial \theta} e_{11} - \frac{\partial e_{11}}{\partial \theta} e_{13}^0 - \frac{\partial e_{11}^0}{\partial \theta} e_{13} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial e_{23}}{\partial \theta} e_{12}^0 - \frac{\partial e_{23}^0}{\partial \theta} e_{12} - \frac{\partial e_{12}^0}{\partial \theta} e_{23} + e_{22}e_{23}^0 \cos \chi - e_{23}e_{21}^0 \sin \chi - 2e_{22}^0(e_{23} \cos \chi - e_{21} \sin \chi) \right]$$

Энергия деформаций шпангоута приводится к виду, аналогичному (1.6).

В форме (1.6) можно записать и энергию деформаций упругих опор, распределенной по длине шпангоута.

2. Обозначим свободную поверхность жидкости в баке S_0 через F_0 . Считаем, что бак S заполнен такой же жидкостью и ее свободная поверхность F лежит в одной плоскости с поверхностью F_0 . Пусть движения жидкости описываются потенциалом перемещений φ . Граничное условие, выражающее требование совместности нормальных перемещений оболочки S и жидкости, перенесем на смоченную

поверхность оболочки S_0 . Для этого используем разложение потенциала перемещений в ряд Тейлора в окрестности поверхности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} W_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{1}{r} W_{\theta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} U + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n \partial \theta} V + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} W = w - e_{13}^0 u - e_{13}^0 v \quad (2.1)$$

Кинетическую энергию движений жидкости вычислим в предположении о постоянстве градиента потенциала по нормали к слою — разности объемов жидкости в баках S и S_0

$$T = T_0 + \mu \Delta T, \quad T_0 = \frac{\rho}{2} \int_{S_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 r ds d\theta, \quad \Delta T = \frac{\rho}{2} \int_{S_0} (\text{grad} \varphi)^2 W r ds d\theta$$

Здесь S_0 — смоченная поверхность оболочки.

Задача о собственных колебаниях формулируется как задача на экстремум функционала

$$\Pi_0 + \mu \Delta \Pi = \omega^2 (T_0 + \mu \Delta T)$$

Кинематически возможные состояния оболочки с жидкостью S определяются потенциалом перемещений жидкости и перемещениями оболочки. Потенциал перемещений задается в основном объеме, тангенциальные перемещения оболочки — на основной поверхности. Нормальные перемещения смоченной части оболочки определяются из перенесенного на основную поверхность условия совместности нормальных перемещений оболочки и жидкости. Нормальные перемещения несмоченной части бака задаются независимо.

Решение задачи можно разыскивать в виде рядов по формам собственных колебаний основной оболочки с жидкостью. При этом определяются поправки к основным частотам и формам.

Здесь ограничимся примерами, в которых оболочка S остается осесимметричной.

Применение описанной методики к тестовым, имеющим точное решение, задачам [4] о колебаниях полностью заполненных безмоментных цилиндра с жестким дном и свободной сферы для случаев фиктивной деформации, переводящей цилиндр в цилиндр и сферу в сферу изменением радиуса, дает те же поправки к частотам, что и линеаризованные в окрестности основных оболочек точные решения задачи. При использовании форм колебаний залитой жидкостью цилиндрической оболочки с жестким плоским дном получены частотные параметры для следующих видов начальной неправильности при заполнении $H/R=4$, $\nu=0,32$.

Коническая неправильность

Неправильность типа бочки

$$W = \frac{s}{H}$$

$$W = 1 - \left(2 \frac{s}{H} - 1 \right)^2$$

Λ_1 0,0679—0,0175 μ ,	0,0679—0,0470 μ
Λ_2 0,5350—0,2832 μ ,	0,5350—0,4521 μ
Λ_3 1,2191—0,8680 μ ,	1,2191—1,2347 μ
Λ_4 1,9482—1,5863 μ ,	1,9482—2,1932 μ
Λ_5 2,6739—2,3291 μ ,	2,6739—3,1831 μ

Здесь H —высота оболочки, отсчет дуги s производится от дна, а

$$\Lambda_i = \frac{\rho R^2 (1 - \nu^2)}{E h^3} \omega_i^2, \quad \rho - \text{плотность жидкости, } R - \text{радиус цилиндра.}$$

VIBRATIONS OF LIQUID FILLED SHELLS CLOSE TO AXISYMMETRIC ONES

R. E. LAMPER, V. E. LEVIN

ՀԵՂՈՒՆՈՎ ԼՅՎԱՆ, ԱՌԱՆՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿՆ ՄՈՏ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ռ. Ե. ԼԱՄՊԵՐ, Վ. Ե. ԼԵՎԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է մասամբ հեղուկով լցված թաղանթ, որը բիէ տարրերովում «հիմնական» առանցքային հարկերից:

Սեփական առանցքային մասին խնդիրը ձևակերպվում է հիմնական թաղանթի դեաղեցրած տիրույթի համար: Թաղանթի դիֆուզիայի առնչությամբ բաղադրիչները հաշվվում են հիմնական մակերևույթի մետրիկայում: Լուծման մեջ մտցված են ուղղամենք հիմնական հաճախությունների և առանցքային ձևերի համար:

Թերթված են հաշվարկային մեթոդի կիրառության արինակներ կոնական և ապառաձի անմոմենտ թաղանթների վերաբերյալ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Пайдушин В. Н. Соотношения теории гонких оболочек типа Тимошенко в криволинейных координатах поперхности отсчета.—ПММ, 1978, т. 42, № 4, с. 753—758.
2. Пайдушин В. Н. К проблеме расчета пластин и оболочек со сложным контуром.—Прикладная механика, 1980, т. 16, № 4, с. 63—70.
3. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Л.: ЛГУ, 1964, 395 с.
4. Пшеничная Г. Н. Точные решения некоторых задач о колебаниях жидкости и упругих безмоментных оболочках.—ПММ, 1971, т. 35, № 4, с. 739—744.

Новосибирский электротехнический институт

Поступила в редакцию
17.III.1985