ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 5, 1987 Механика

УДК 539.3:534.1

КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНАХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

ТОПЧЯН Д. Х.

В работах [1, 2 и др.] рассмотрены волны модуляций в нелинейно-упругих пластинах и вопросы их устойчивости.

В настоящей статье изучаются одномерные волны в пластине, находящейся на упругом (или жидком) основании.

1. Рассмотрим нелинейную упругую пластину на линейно-упругом полупространстве. Ось x выбирается в срединной плоскости пластины, а ось z направлена перпендикулярно к ней. В упругой среде $(z<0)$ [3] перемещения определяются через потенциалы

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.1}$$

для которых имеются уравнения

$$\Delta\varphi=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\quad \Delta\psi=\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

где a, b—скорости продольных и поперечных волн.

Прогиб пластинки ищется в виде квазимонохроматической волны: $w=A\cos\tau$, где $\tau=kx-\omega t$.

Вышеприведенные уравнения будут удовлетворены, если выбрать φ и ψ следующим образом:

$$\varphi=Be^{k_1z}\cos\tau,\quad \psi=Ce^{k_2z}\sin\tau$$

$$k_1^2=k^2-\frac{\omega^2}{a^2},\quad k_2^2=k^2-\frac{\omega^2}{b^2}$$

Отсюда для перемещений получим

$$u=(-Bke^{k_1z}+Ck_2e^{k_2z})\sin\tau,\quad v=(Bk_1e^{k_1z}-Cke^{k_2z})\cos\tau$$

Условия непрерывности смещений $w=v$ и гладкости контакта $\sigma_{xz}=0$ можно записать при $z=0$, которые дают

$$Bk_1-Ck=A,\quad -2kk_1B+k_2^2C+k^2C=0 \tag{1.2}$$

Отсюда получится

$$C=-\frac{b^2}{\omega^2}2kA,\quad B=-\frac{\left(2k^2-\frac{\omega^2}{b^2}\right)b^2}{k_1\omega^2}A \tag{1.3}$$

Компонента нормального напряжения при $z=0$, которая входит в уравнение движения пластины-балки как внешняя нагрузка, определяется формулой

$$Z=\sigma_z=\rho_0 a^2 \frac{\partial v}{\partial z}+\rho_0(a^2-2b^2)\frac{\partial u}{\partial x}=\rho_0 a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)-2b^2\rho_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-$$

$$-2b^2\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}=(-\rho_0\omega^2 B+2b^2\rho_0 k^2 B-2b^2\rho_0 k_2 kC)\cos\tau=$$

$$=\frac{A\rho_0\cos\tau}{\omega^2}\,\frac{4b^4k^2k_1k_2-(2b^2k^2-\omega^2)^2}{k_1} \qquad (1.4)$$

где ρ_0—плотность упругой среды.

Уравнение изгибных волн в пластине имеет вид

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+Z=0 \qquad (1.5)$$

где M_1—изгибающий момент; $M_1=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_x z\,dz$

Напряжение σ_x согласно [4] для материала с кубической нелинейностью определяется

$$\sigma_x-\sigma_0=2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_x-\varepsilon_0),\quad \sigma_y-\sigma_0=2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_y-\varepsilon_0)$$

$$\sigma_z-\sigma_0=2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_z-\varepsilon_0),\quad \sigma_{xy}=G\gamma(\psi_0^2)\varepsilon_{xy},\quad \gamma(\psi_0^2)=1+\frac{1}{2}\gamma_2\psi_0^2 \qquad (1.6)$$

Согласно гипотезе прямых нормалей

$$\sigma_z=0,\quad \sigma_0=\frac{1}{3}(\sigma_x-\sigma_y),\quad \varepsilon_0=\frac{1}{3}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) \qquad (1.7)$$

Исключая из (1.6) ε_z, причем

$$\varepsilon_z=-\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)+\gamma_2\psi_0^2\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{3(1-\nu)^2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

получим

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)+\frac{2G\gamma_2\psi_0^2}{3(1-\nu)^2}\{2(1-\nu+\nu^2)\varepsilon_x+(4\nu-1-\nu^2)\varepsilon_y\} \qquad (1.8)$$

$$\psi_0^2=\frac{8}{9}\{A_1(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2)+B_1\varepsilon_x\varepsilon_y\} \qquad (1.9)$$

где

$$A_1=\frac{1-\nu-\nu^2}{(1-\nu)^2},\qquad B=\frac{4\nu-1-\nu^2}{(1-\nu)^2}$$

Деформация определяется формулой

$$\varepsilon_x=\varepsilon_1+\varkappa_1 z \qquad (1.10)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varkappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Следовательно,

$$M_1 = D\varkappa_1 \left(1 + \frac{4}{15} h^2 \gamma_2 \nu_1 \varkappa_1^2 \right)$$

Тогда из (1.5) получим уравнение

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \Gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Z = 0 \tag{1.11}$$

Здесь $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — жесткость пластины, $\Gamma = \dfrac{E\gamma_2 \nu_1 h^5}{35(1-\nu^2)}$ является нелинейным коэффициентом, где $\nu_1 = \dfrac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^3}$. Подставляя (1.4) в (1.11), можно найти нелинейное дисперсионное уравнение

$$Dk^4 + \frac{3}{4} \Gamma A^2 k^6 - \rho h \omega^2 + \frac{\rho_0}{\omega^2} \frac{4b^4 k k_1 k_2 - (2b^2k^2 - \omega^2)^2}{k_1} = 0 \tag{1.12}$$

Полагая

$$\omega = \omega_0(k) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial A^2} \right)_0 A^2 \tag{1.13}$$

можно получить линейное уравнение

$$Dk^4 - \rho h \omega_0^2 + \frac{\rho_0}{\omega_0^2} \frac{4b^4k^2 \sqrt{k^2 - \dfrac{\omega_0^2}{a^2}} \sqrt{k^2 - \dfrac{\omega_0^2}{b^2}} - (2b^2k^2 - \omega_0^2)^2}{\sqrt{k^2 - \dfrac{\omega_0^2}{a^2}}} = 0 \tag{1.14}$$

и

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial A^2} \right)_0 = \frac{\dfrac{3}{4} \Gamma k^6 - \dfrac{\partial}{\partial \omega} \left(\dfrac{\rho_0}{\omega^2} \dfrac{4b^4k^2 k_1 k_2 - (2b^2k^2 - \omega^2)^2}{k_1} \right)_{\omega=\omega_0}}{2\rho h \omega_0} \tag{1.15}$$

Уравнение (1.14) является сложным и его можно решить лишь численно. В качестве примера рассмотрим случай жидкости, для которой $b=0$. Кроме того, считаем, что жидкость несжимаема. Тогда $a=\infty$ и из (1.14) получится $\left(\rho h + \dfrac{\rho_0}{k} \right) \omega_0^2 = Dk^4$. Вычисления показывают, что $\omega_0''(k) > 0$, как и в случае пластины без основания, то есть наличие жидкого основания не меняет неустойчивость волновых пакетов в пластине [2]. Для получения нетривиального результата можно учесть силу тяжести, при этом в Z добавится $\rho_0 g w$ и получим

$$\omega_0^2(\rho hk + \rho_0) = Dk^5 + \rho_0 gk \tag{1.16}$$

Дифференцирование дважды по k дает

$$\omega_0 \omega_0''(\rho hk+\rho_0)=\frac{\lambda}{4(\rho h+\rho_0)^2(Dk^5+\rho_0 gk)} \tag{1.17}$$

где

$$\lambda=8D^2k^{10}(\rho h)^2+15D^2k^6\rho_0^2-20D^2\rho h\rho_0 k^3+$$

$$+6Dk^4g\rho_0\{4(\rho h)^2k^2+8\rho_0\rho hk+5\rho_0^2\}-g^2\rho_0^3(\rho_0+4\rho hk) \tag{1.18}$$

Условие $\omega_0''<0$ получится при $\lambda<0$, причем в качестве параметра можно взять g. Дискриминант трехчлена (1.18) больше нуля, поэтому имеются корни g_1 и g_2: $g_2<0$, $g_1>0$. Тогда $\omega_0''<0$ при $g>g_1$ или $g<g_2$. Поскольку $g>0$, остается условие того, что $\omega_0''<0$, $g>g_1$.

Уравнение (1.12) для жидкости с учетом силы тяжести имеет вид

$$Dk^4+\frac{3}{4}\Gamma a^2k^8+\rho_0 g=\omega^2\left(\rho h+\frac{\rho_0}{k}\right)$$

Отсюда получится (1.16) и кроме того

$$2\omega_0\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0\left(\rho h+\frac{\rho_0}{k}\right)=\frac{3}{4}\Gamma k^8 \tag{1.19}$$

Поскольку $\Gamma<0$, отсюда видно, что $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0<0$, при этом условие устойчивости волн модуляций [5] $\omega_0''\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0>0$ имеет место для относительно достаточно больших значений g. Значение g_1 имеет вид

$$\frac{12g_1\rho_0(1-\nu^2)h}{E}=\frac{m^4}{1+4m\nu_1}\Big\{3(5+8\nu_1 m+4\nu_1^2m^2)+$$

$$+\sqrt{9(5+8\nu_1 m+4\nu_1^2m^2)^2+(1+4\nu_1 m)(15+20\nu_1 m+8\nu_1^2m^2)}\Big\}$$

причем $\nu_1=\rho/\rho_0$, $kh=m$.

Для $\nu_1=10$, $m=0{,}1$, $E=2\cdot 10^5$ Па получится значение $g_1=4\cdot 10$ м/сек², что дает очень большие значения силы тяжести, при которых движение устойчиво. Для $\nu_1=0{,}1$, $m=0{,}1$ будем иметь $g_1=10^4$ м/сек² и опять большие значения. Для $\nu_1=0{,}1$, $m=0{,}1$ получится $g_1=6$ м/сек², то есть реальное значение g. При этом, взяв $h=10^{-2}$ м, получим $2\pi/k=2\pi$ м, а приняв $h=10^{-3}$ м, получим $2\pi/k=2\pi\cdot 10^{-1}$ м, то есть обычные акустические волны.

Таким образом, для пластины на жидкости наличие силы тяжести приводит к устойчивости волновых пакетов.

Для упругой основы из (1.14), вводя величины $\mu=\frac{\omega_0}{ak}$, $c^2=\frac{E}{\rho}$, можно найти

$$m^3-\frac{12(1-\nu)^2\mu^2}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}m^2+\frac{12(1-\nu^2)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^4}{\left(\frac{c}{a}\right)^2\mu^2\sqrt{1-\mu^2}}\left\{4\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\mu^2}-\right.$$

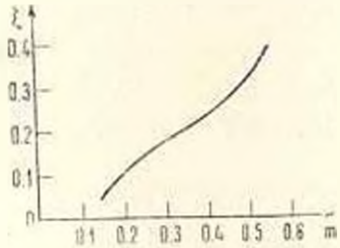
$$-\left(2-\left(\frac{a}{b}\right)^2\mu^2\right)^2\Bigg\}=0$$

Были проведены вычисления для следующих параметров:

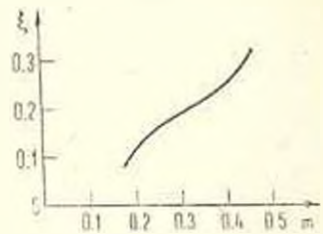
$$1.\quad \frac{c}{a}=6,\qquad \frac{\rho_0}{\rho}=0{,}8,\qquad \nu=0{,}3,\qquad \frac{a}{b}=1{,}5$$

$$2.\quad \frac{c}{a}=8,\qquad \frac{\rho_0}{\rho}=0{,}8,\qquad \nu=0{,}3,\qquad \frac{a}{b}=1{,}5$$

На фиг. 1 и 2 построены графики $\xi=\mu kh$ от m.



Фиг. 1



Фиг. 2

Из полученных кривых можно сделать выводы о знаке кривизны кривой $\omega_0(k)$. Из полученных фигур следует, что $\omega_0''(k)>0$ при $m>0{,}3$, а для значений $m<0{,}3$, $\omega_0''(k)<0$. Тот же вывод можно получить и из уравнения (1.14) для малых μ и $\frac{\rho_0}{\rho}m\frac{b^2}{a^2}$, которое теперь принимает вид $\mu m=\sqrt{\frac{2\rho_0}{\rho}\frac{b^4}{a^4}\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)m}$ и для приведенных выше значений превращается в $\mu m=0{,}6\sqrt{m}$. Полученная кривая для немалых значений μ переходит в кривые фиг. 1, 2.

Таким образом, при $kh<0{,}3$ имеется устойчивость распространения волн при наличии основания, а при $kh>0{,}3$ — неустойчивый вид волновых пакетов.

QUASYMONOCHROMATIC NONLINEAR WAVES IN PLATES ON ELASTIC FOUNDATION

D. Kh. TOPCHIAN

ՔՎԱԶԻՄՈՆՈՔՐՈՄԱՏԻԿ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԴՐՎԱԾ ՍԱԼԵՐՈՒՄ

Դ. Խ. ԹՈՓՉՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է մոդուլացված ալիքների կայունության խնդրի լուծմանը ոչ գծային առաձգական սալի համար, դրված առաձգական կիսահարթության վրա։

Ցույց է տրված, որ ադիաբատ դեպքի համար առաձգական մետաղյա սալերում ալիքները անկայուն են և կարելի է հանել կայունության վիճակի միայն շատ փոքր ամպլիտուդների դեպքում, իսկ հեղուկ հիմքի առկայության դեպքում ալիքները կայուն են ծանրության ուժի բավականաչափ մեծ պարամետրի համար։

Ցույց է տրված նաև, առաձգական հիմքի համար ալիքային փաթեթների կայունության գոյությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу распространения изгибных волн в нелинейно-упругих пластинах.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1979, т. 32, №5, с. 25—37.
2. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые вопросы распространения квазимонохроматических нелинейных волн в пластинах и оболочках. Тр. XII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1980, т. *I*, с. 106—112.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с. 1973. 175 с.
5. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. Новосибирск: Наука, 1973. 175 с.

Ленинаканский педагогический
институт им. М. Налбандяна

Поступила в редакцию
25.XI.1986