

УДК 532.5

КОЭФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ В ЗАДАЧАХ
 АНТИПЛОСКОГО СДВИГА И ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ
 ЖИДКОСТИ В ТОНКИХ ОБЛАСТЯХ С ПРОДОЛЬНОМ
 РАЗРЕЗОМ

НАЗАРОВ С. А.

1°. *Постановка задачи.* Пусть Γ_1, Γ_2 и Γ_3 — простые замкнутые гладкие контуры, причем Γ_1 охватывает Γ_2 , а $\Gamma_2 - \Gamma_3$ (не исключается случай, когда контур Γ_3 пуст). Обозначим через Ω и ω области, ограниченные контурами Γ_1, Γ_2 и Γ_2, Γ_3 , соответственно. Введем цилиндр $Q_h = \{(x, z) : x = (x_1, x_2) \in \Omega, |z| < h/2\}$ и множество $M = \{(x, z) : x \in \omega, z = 0\}$. Предположим, что характерные размеры d_j контуров Γ_j , а также расстояния между ними являются величинами одного порядка, а отношения h/d_j — малыми параметрами. Не ограничивая общности, далее будем считать, что масштабированием размер d_1 сведен к единичному, а h является малым положительным безразмерным параметром.

В области $G_h = Q_h \setminus M$ (фиг. 1) рассмотрим задачу Неймана

$$-\Delta_{x,z} u(h, x, z) = h^{-1} f(x, h^{-1} z), \quad (x, z) \in G_h \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \left(h, x, \pm \frac{h}{2} \right) = \varphi^\pm(x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial u}{\partial z} (h, x, \pm 0) = \psi^\pm(x), \quad x \in \omega \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} (h, x, z) = \frac{1}{h} g \left(x, \frac{z}{h} \right), \quad (x, z) \in S_h^1 \cup S_h^2 \quad (1.3)$$

где $\Delta_{x,z} = \Delta_x + \partial^2 / \partial z^2$, $\Delta_x = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$; n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $S_h^1 = \Gamma_1 \times (-h/2, h/2)$, $S_h^2 = \Gamma_3 \times \{(-h/2, 0) \cup (0, h/2)\}$; $f, \varphi^\pm, \psi^\pm, g$ — гладкие функции на своих областях определения. Допустим, что выполнено условие

$$\frac{1}{h} \int_{Q_h} f \left(x, \frac{z}{h} \right) dx dz + \frac{1}{h} \int_{S_h^1 \cup S_h^2} g \left(x, \frac{z}{h} \right) ds dz + \sum_{\pm} \left\{ \int_{\Omega} \varphi^\pm(x) dx - \int_{\omega} \psi^\pm(x) dx \right\} = 0 \quad (1.4)$$

Краевую задачу (1.1) — (1.3) следует интерпретировать как эллиптическую краевую задачу в тонкой области. Построению асимптотических разложений решений подобных задач в цилиндрических областях малой высоты посвящено значительное количество работ ([1–6] и др.). Рассматриваемая ситуация осложнена наличием у

разреза M особой линии—ребра (или в двумерном случае—угловых точек), где производные решения исходной задачи имеют особенности. Асимптотика решений некоторых задач с такими особенностями строилась в [7—10].

Согласно § 5 [11] полное асимптотическое разложение решения $u(h, x, z)$ задачи (1.1)–(1.3) при $\pm z > 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 u(h, x, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} h^{k-1} \left\{ \chi_{k, \pm}(h, x) v_k(x) + \right. \\
 + \chi_{k, \pm}(h, x) \varphi_k^{\pm}(x) + h^k \chi_{k, \pm}(h, x) \omega\left(x, \frac{z}{h}\right) + \\
 + \chi(n_1) V_k\left(s_1, \frac{n_1}{h}, \frac{z}{h}\right) + \chi(n_2) V_k^{\pm}\left(s_2, \frac{n_2}{h}, \frac{z}{h}\right) + \\
 \left. + \chi(n_2) W_k\left(s_2, \frac{n_2}{h}, \frac{z}{h}\right) \right\} \quad (1.5)
 \end{aligned}$$



Фиг. 1

Здесь χ —срезающая функция с малым носителем, равная единице вблизи $n=0$; s_j и n_j —касательная и нормальная координаты в окрестностях контуров Γ_j ; $\chi_{k, \pm}(h, x) = 1 - \chi(h^{-1}n_2)$ в Ξ и $\chi_{k, \pm}(h, x) = 0$ вне Ξ ; V_k , W_k и V_k^{\pm} —функции, описывающие пограничные слои для боковой поверхности цилиндра Q и края ∂M разреза M ; $V_k(s, t, \cdot)$, $V_k^{\pm}(s, t, \cdot)$, $W_k(s, t, \cdot)$ экспоненциально убывают при $t \rightarrow \infty$; $v_k \in C^{\infty}(\Omega \setminus \omega)$, $\varphi_k^{\pm} \in C^{\infty}(\bar{\omega})$; $\omega(x, \tau)$ —функции с нулевым средним по τ на отрезке $[-1/2, 1/2]$.

В настоящей статье основное внимание уделяется приближенному вычислению коэффициента $C(h, s_2)$ в представлении $u(h, x, z)$ вблизи ребра ∂M .

$$u(h, x, z) = C_0(h, s_2) + C(h, s_2) \sqrt{r} \cos(\theta/2) + O(r) \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

где (r, θ) —полярные координаты в плоскостях, нормальных к ∂M , такие, что верхнему M^+ и нижнему M^- берегам разреза M соответствуют значения 0 и 2π переменной θ .

2°. Двумерный случай. Пусть Q_b —прямоугольник $(b_-, b_+) \times (-h/2, h/2)$, а M —отрезок $\{(x, z) : a_- < x < a_+, z=0\}$; $b_- < a_- < a_+ < b_+$ (фиг. 2). Краевая задача (1.1)–(1.3) имеет вид

$$-(\partial_x^2 + \partial_z^2)u(h, x, z) = h^{-1}f(x, h^{-1}z), \quad x \in G_b = Q_b \setminus M \quad (2.1)$$

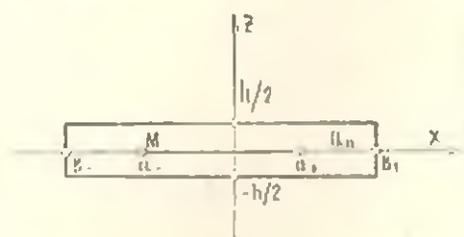
$$\frac{\partial u}{\partial z}\left(h, x, \pm \frac{h}{2}\right) = \varphi^{\pm}(x), \quad x \in (b_-, b_+); \quad \frac{\partial u}{\partial z}(h, x, 0) = \psi^{\pm}(x), \quad x \in (a_-, a_+) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(h, b_{\pm}, z) = \frac{1}{h} g^{\pm}\left(\frac{z}{h}\right), \quad |z| < \frac{h}{2} \quad (2.3)$$

Если главный член асимптотики решения u задачи (2.1)–(2.3) искать в виде $hw(x, h^{-1}z)$, то, выделяя в (2.1), (2.2) старшие (поряд-

ка h^{-1} и h^0) слагаемые, получаем, например, при $x \in (b_-, a_-) \cup (a_+, b_+)$ обыкновенное дифференциальное (по $\eta = h^{-1}z$) уравнение

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(x, \eta) = f(x, \eta), \quad \eta \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}\left(x, \pm \frac{1}{2}\right) = \varphi^\pm(x) \quad (2.4)$$



Фиг. 2

Задача (2.4) разрешима не при всех правых частях f, φ^\pm . Условием ее разрешимости является равенство

$$-\int_{-1/2}^{1/2} f(x, \eta) d\eta = \varphi^+(x) - \varphi^-(x) \quad (2.5)$$

Таким образом, не для каждой f и φ^\pm правые части уравнений (2.1), (2.2) удастся компенсировать при помощи функции $hw(x, h^{-1}z)$. Как обычно [1, 3, 6, 11], изменив вид приближения к u , представим его как сумму $h^{-1}v(x) + hw(x, h^{-1}z)$. Собирая в (2.1) коэффициенты при h^{-1} , а в (2.2) — при h^{-1} , получаем для $x \in (b_-, a_-) \cup (a_+, b_+)$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(x, \eta) = f(x, \eta) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x), \quad \eta \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}\left(x, \pm \frac{1}{2}\right) = \varphi^\pm(x) \quad (2.6)$$

Условием разрешимости задачи (2.6) служит равенство

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) = -\int_{-1/2}^{1/2} f(x, \eta) d\eta - \varphi^+(x) + \varphi^-(x), \quad x \in (b_-, a_-) \cup (a_+, b_+) \quad (2.7)$$

(сравни (2.5)), которое будем считать уравнением для функции v . Аналогично, для функций w, v^\pm , входящих в приближения $h^{-1}v^\pm(x) + hw(x, h^{-1}z)$ к решению u при $x \in (a_-, a_+)$, $z > 0$, находим

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(x, \eta) = f(x, \eta) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x), \quad \eta \in A_\pm$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta}\left(x, \pm \frac{1}{2}\right) = \varphi^\pm(x), \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}(x, \pm 0) = \psi^\pm(x) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 v^\pm}{\partial x^2}(x) = -2 \int_{A_\pm} f(x, \eta) d\eta \mp 2\{\varphi^\pm(x) - \psi^\pm(x)\}, \quad x \in (a_-, a_+) \quad (2.9)$$

где $A_+ = (0, 1/2)$, $A_- = (-1/2, 0)$.

Определим теперь граничные условия, которым следует подчинить старшие члены $h^{-1}v, h^{-1}v^\pm$ асимптотки u . Вблизи каждой из боковых сторон прямоугольника Q возникает пограничный слой ([3, 6, 11]), который описывается решением задачи в полуполосе

$$-\Delta_{z, \eta} V \mp \frac{1}{2}(\xi, \eta) = 0, \quad (\xi, \eta) \in (0, \infty) \times (-1/2, 1/2) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial V_{\delta}^{\pm}}{\partial \eta} \left(\xi, \frac{1}{2} \right) = \frac{\partial V_{\delta}^{\pm}}{\partial \eta} \left(\xi, -\frac{1}{2} \right) = 0, \quad \frac{\partial V_{\delta}^{\pm}}{\partial \xi} (0, \eta) = \pm \left(\frac{\partial v}{\partial x} (b_{\pm}) - g^{\pm}(\eta) \right) \\ |\eta| < \frac{1}{2} \quad (2.10)$$

Здесь для индекса $+$ $\xi = h^{-1}(b, -x)$, а для $-$ $\xi = h^{-1}(x - b)$. При помощи метода Фурье получаем, что экспоненциальное убывание (при $\xi \rightarrow \infty$) решений задач (2.10) обеспечивается равенствами

$$\frac{\partial v}{\partial x} (b_{\pm}) = \int_{-1/2}^{1/2} g^{\pm}(\eta) d\eta \quad (2.11)$$

Вблизи концов разреза M также возникает явление пограничного слоя, которое порождает (см. раздел 3^о) шесть условий сопряжения функций v, v^{\pm} в точках a_{\pm} :

$$v(a_{+}) = v^{+}(a_{+}) = v^{-}(a_{+}), \quad 2 \frac{\partial v}{\partial x} (a_{+}) = \frac{\partial v^{+}}{\partial x} (a_{+}) + \frac{\partial v^{-}}{\partial x} (a_{+}) \quad (2.12)$$

$$v(a_{-}) = v^{+}(a_{-}) = v^{-}(a_{-}), \quad 2 \frac{\partial v}{\partial x} (a_{-}) = \frac{\partial v^{+}}{\partial x} (a_{-}) + \frac{\partial v^{-}}{\partial x} (a_{-}) \quad (2.13)$$

Отметим, что уравнения (2.7), (2.9) с соотношениями (2.11)–(2.13) имеют решение в силу условия разрешимости задачи (2.1)–(2.3)

$$\int_0^{b_{+}} f(x, \eta) d\eta dx + \sum_{\pm} \left\{ \int_{b_{-}}^{a_{+}} \psi^{\pm}(x) dx - \int_{a_{-}}^{a_{+}} \psi^{\pm}(x) dx + \int_{-1/2}^{1/2} g^{\pm}(\eta) d\eta \right\} = 0 \quad (2.14)$$

3^о. *Пограничный слой вблизи концов разреза.* Рассмотрим для определенности левый конец $(a_{-}, 0)$ разреза M . После замены координат $(x, z) \rightarrow (\zeta_1, \zeta_2) = h^{-1}(x - a_{-}, z)$ уравнения (2.1), (2.2) переходят в задачу Неймана в полосе с полубесконечным разрезом $\Pi = R^1 \times (-1/2, 1/2) \setminus \{(\zeta_1, \zeta_2) \geq 0, \zeta_2 = 0\}$ (фиг. 3).

Утверждение 1. Для любых экспоненциально убывающих при $\zeta_1 \rightarrow \pm\infty$ гладких правых частей $F, \Phi^{\pm}, \Psi^{\pm}$ существует единственное убывающее при $\zeta_1 \rightarrow -\infty$ решение W краевой задачи

$$-\Delta_{\zeta} W(\zeta) = F(\zeta), \quad \zeta \in \Pi \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta_2} \left(\zeta_1, \pm \frac{1}{2} \right) = \Phi^{\pm}(\zeta_1), \quad \zeta_1 \in R^1; \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta_2} (\zeta_1, \pm 0) = \Psi^{\pm}(\zeta_1), \quad \zeta_1 > 0$$

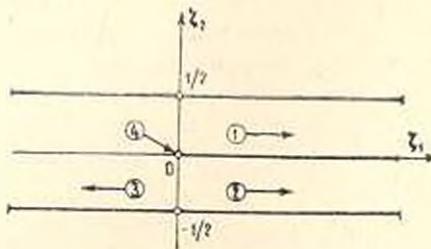
Утверждение 2. Всякое решение однородной ($F, \Phi^{\pm}, \Psi^{\pm}$ равны нулю) задачи (3.1), растущее не быстрее полинома, является линейной комбинацией $c_1 + c_2 \zeta_1 + c_3 Y(\zeta)$, $c_j = \text{const}$, Y — нечетная по ζ_2 гармоническая в Π функция, имеющая нулевые данные Неймана на $\partial \Pi$ и допускающая представления

$$Y(\zeta) = O(\exp(\zeta_1/2)) \quad \text{при} \quad \zeta_1 \rightarrow -\infty \quad (3.2)$$

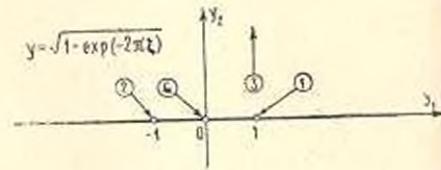
$$Y(\zeta) = \pm \zeta_1 \pm C\gamma + O(\exp(-\pi \zeta_1/4)) \text{ при } \zeta_1 \rightarrow +\infty, \pm \zeta_2 > 0$$

Утверждение 3. Для решения W задачи (3.1) справедливы асимптотические разложения: $W(\zeta) = o(\exp(\delta \zeta_1))$ при $\zeta_1 \rightarrow -\infty$ и

$$W(\zeta) = B_0 \zeta_1 + B_{\pm} + o(\exp(-\delta \zeta_1)) \text{ при } \zeta_1 \rightarrow +\infty, \pm \zeta_2 > 0 \quad (3.3)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Здесь $\delta > 0$, а постоянные B_0, B_{\pm} вычисляются по формулам

$$B_0 = -\Lambda(F, \Phi, \Psi; X_0), \quad B_{\pm} = \Lambda(F, \Phi, \Psi; X_{\pm}) \quad (3.4)$$

где $X_0(\zeta) = 1, X_{\pm}(\zeta) = \zeta_1 \pm Y(\zeta), \Lambda(F, \Phi, \Psi; X) = \int_{\Pi} F(\zeta) X(\zeta) d\zeta + \sum_{\pm} \pm$

$$\pm \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{\pm}(\zeta_1) X\left(\zeta_1, \pm \frac{1}{2}\right) d\zeta_1 - \int_0^{+\infty} \Psi^{\pm}(\zeta_1) X(\zeta_1, \pm 0) d\zeta_1 \right\}$$

Доказательство. Утверждения 1, 2 и соотношение (3.3) являются классическими результатами. Отметим лишь, что конформное преобразование $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2 \rightarrow y = \sqrt{1 - \exp(-2\pi\zeta)}, \sqrt{\zeta} = |\zeta|^{1/2} \exp(i \arg(\zeta)/2)$, переводит Π в полуплоскость (фиг. 3, 4, где стрелками отмечены различные выходы на бесконечность и особая точка). Поэтому

$$Y(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{y(\zeta_1 + i\zeta_2) - 1}{y(\zeta_1 + i\zeta_2) + 1} \right| \quad (3.5)$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что справедливы представления (3.2), в которых $c_{\gamma} = \pi^{-1} \ln 2$. Кроме того, в окрестности особой точки $\zeta = 0$ имеем

$$Y(\zeta) = (2\zeta/\pi)^{1/2} \cos(\theta/2) + O(\rho) \text{ при } \rho = h^{-1}r \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

Соотношения (3.4) устанавливаются при помощи метода [12].

Опишем построение пограничного слоя. Обозначим через $h^{-1}V(h, x, z)$ функцию, совпадающую с $h^{-1}v(x)$ при $x \in (b_-, a_+) \cup (a_+, b_+)$ и с $h^{-1}v^{\pm}(x)$ при $x \in (a_-, a_+), \pm z > 0$. Эта функция, вообще говоря, терпит разрывы при $x = a_{\pm}$. „Сгладим“ ее, умножив на срезывающие функции, равные нулю вблизи этих значений x :

$$h^{-1}\{1 - \chi(h^{-1}(x - a_+))\} \{1 - \chi(h^{-1}(x - a_-))\} V(x, z) \quad (3.7)$$

где $\chi \in C_0^\infty((-1, 1))$, $\chi(t) = 1$ при $|t| < 1/2$. Выражение (3.7) оставляет невязку в уравнениях (2.1)–(2.3), часть которой сосредоточена в h -окрестностях точек $x = b_{\pm 1}$ и возникла из-за умножения на указанные срезки. Переходя к координатам ζ и выделяя в (2.1) и (2.2) слагаемые порядка h^{-1} , h^{-2} и h^{-3} , h^{-1} соответственно, получаем, что главные члены упомянутой невязки компенсируются при помощи решения задачи (3.1), в которой $\Phi^\pm = 0$, $\Psi^\pm = 0$ и

$$F(\zeta) = [\Delta_\zeta, \chi(\zeta_{\pm 1})] \left\{ v(a_\pm) + h\zeta_{\pm 1} \frac{\partial v}{\partial x}(a_\pm) \right\} \quad \text{при } \zeta_{\pm 1} < 0, \zeta_{\pm 1} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$F(\zeta) = [\Delta_\zeta, \chi(\zeta_{\pm 1})] \left\{ v^\pm(a_\pm) + h\zeta_{\pm 1} \frac{\partial v^\pm}{\partial x}(a_\pm) \right\} \quad \text{при } \zeta_{\pm 1} > 0, \zeta_{\pm 1} \in A_\pm$$

где $[L, M] = LM - ML$ — коммутатор операторов L и M . Отметим, что F — гладкая функция. Решение $W(h, \zeta)$ этой задачи при $\zeta_{\pm 1} < 0$ имеет вид

$$x(\zeta_{\pm 1}) \left\{ v(a_\pm) + h\zeta_{\pm 1} \frac{\partial v}{\partial x}(a_\pm) \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^+}{\partial x}(a_\pm) - \frac{\partial v^-}{\partial x}(a_\pm) \right) Y(\zeta) \quad (3.8)$$

где $x(t) = \chi(t)$ при $t < 0$, $x(t) = 1$ при $t \geq 1$. При $\zeta_{\pm 1} > 0$, $\pm \zeta_{\pm 1} > 0$ к выражению (3.8) добавляются функции

$$(1 - x(\zeta_{\pm 1})) \left\{ v^\pm(a_\pm) + h\zeta_{\pm 1} (h v^\pm / \partial x)(a_\pm) \right\} \quad (3.9)$$

Построенное решение задачи (3.1) обращается в нуль при $\zeta_{\pm 1} < -1$ и допускает представление (3.3), в котором

$$B_0 = h \frac{\partial v}{\partial x}(a_\pm) - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial v^+}{\partial x}(a_\pm) + \frac{\partial v^-}{\partial x}(a_\pm) \right), \quad B_\pm = v(a_\pm) - v^\pm(a_\pm) \pm \pm \epsilon_\pm \frac{h}{2} \left(\frac{\partial v^+}{\partial x}(a_\pm) + \frac{\partial v^-}{\partial x}(a_\pm) \right)$$

Предположение $W(h, \zeta) = O(h)$ при $\zeta_{\pm 1} = O(h^{-1})$ об убывании пограничного слоя приводит к (2.12). Аналогичные рассуждения при построении погранслоя вблизи точки $(a_\pm, 0)$ дают условия сопряжения (2.13).

Вблизи левого конца разреза M построенное приближение к решению u задачи (2.1)–(2.3) совпадает с пограничным слоем $h^{-1}W(h, \zeta)$. Это дает возможность найти асимптотическую формулу для коэффициента $C_-(h)$ в представлении u вблизи особой точки

$$u(h, x, z) = \text{const} + C_-(h) \sqrt{r} \cos(\theta/2) + O(r) \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

где (r, θ) — полярные координаты с центром в $(a_\pm, 0)$ и полярной осью, направленной вдоль M . С учетом (3.8), (3.9) и разложения (3.6) функции (3.5) получаем следующее:

Утверждение 4. Для коэффициента $C_-(h)$ в представлении (3.10) решения задачи (2.1)–(2.3) справедлива асимптотическая формула

$$C_-(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \left(\frac{\partial v^+}{\partial x}(a_\pm) - \frac{\partial v^-}{\partial x}(a_\pm) \right) + O(\sqrt{h}) \quad (3.11)$$

где φ^\pm — решение задачи (2.7), (2.9), (2.11) — (2.13). Аналогичная формула для коэффициента $C_\pm(h)$ в разложении и вблизи $(a_-, 0)$ получается из (3.11), если a_- заменить на a_+ .

4°. *Трехмерный случай.* Построение асимптотики решения задачи (1.1) — (1.3) и асимптотики коэффициента в разложении (1.6) решения вблизи края ∂M плоского разреза проводится практически так же, как и в пп. 2°, 3°. Отметим лишь, что при определении пограничных слоев в окрестности каждого из контуров Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 необходимо сделать следующую замену координат: $(x, z) \rightarrow (s, \xi_1, \xi_2) = (s, h^{-1}n, h^{-1}z)$, где s и n — касательная и нормальная координаты вблизи Γ_j .

Издали от Γ_j главным приближением к u являются функции $h^{-1}v(x)$ (при $x \in \Omega \setminus \bar{\omega}$) и $h^{-1}v^\pm(x)$ (при $x \in \omega, z > 0$), которые удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$-\Delta v(x) = \int_{-i/2}^{i/2} f(x, \tau) d\tau + \varphi^-(x) - \varphi^+(x), \quad x \in \Omega \setminus \bar{\omega} \quad (4.1)$$

$$-\Delta v^\pm(x) = 2 \int_{A_\pm} f(x, \tau) d\tau - 2(\varphi^\pm(x) - \varphi^\pm(x)), \quad x \in \omega \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x) = \int_{-i/2}^{i/2} g(x, \tau) d\tau, \quad x \in \Gamma_1; \quad \frac{\partial v^\pm}{\partial n}(x) = \int_{A_\pm} g(x, \tau) d\tau, \quad x \in \Gamma_2 \quad (4.3)$$

$$v(x) = v^+(x), \quad v(x) = v^-(x), \quad x \in \Gamma_2 \quad (4.4)$$

$$2 \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v^+}{\partial n}(x) + \frac{\partial v^-}{\partial n}(x), \quad x \in \Gamma_2 \quad (4.5)$$

Здесь и далее в этом разделе нормаль n к Γ_1 и Γ_2 — внешняя по отношению к $\Omega \setminus \bar{\omega}$, а нормаль n к Γ_3 — внешняя по отношению к ω . Обозначим правые части уравнений (4.1) — (4.3) через F , F^\pm и H , H^\pm соответственно.

Утверждение 5. *Решение задачи (4.1) — (4.5) существует том и только в том случае, если выполнено равенство*

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} F(x) dx + \sum_{\pm} \int_{\omega} F^\pm(x) dx + \int_{\Gamma_1} H(x) ds + \sum_{\pm} \int_{\Gamma_2} H^\pm(x) ds = 0$$

Это решение определено с точностью до аддитивной постоянной.

Доказательство утверждения проводится по известной схеме (см., например, [13]).

Пограничный слой вблизи края ∂M разреза M конструируется так же, как и в 3°. Именно, в h -окрестности ∂M решение задачи (1.1) — (1.3) представляется в виде

$$u(h, x, z) = h^{-1} \{ J_0(s) + h J_1(s) + h^2 J_2(s) + h J_3(s) Y(\xi) \} + O(h)$$

где $\xi = h^{-1}(n, z)$, Y — функция (3.5), J_k — гладкие функции на ∂M ,

$$J_0 = v|_{\partial M}, \quad J_1 = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial M}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^+}{\partial n} - \frac{\partial v^-}{\partial n} \right) \Big|_{\partial M}$$

Указанное соотношение позволяет найти асимптотику коэффициента $C(h, s)$ при особенностях на ∂M производных решения задачи (1.1)–(1.3).

Утверждение 6. Для коэффициента $C(h, s)$ в представлении (1.6) решения задачи (1.1)–(1.3) справедлива асимптотическая формула

$$C(h, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \left(\frac{\partial v^+}{\partial n} \Big|_{\partial M} - \frac{\partial v^-}{\partial n} \Big|_{\partial M} \right) (s) + O(\sqrt{h}) \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (4.6)$$

5. Примеры. а) Рассмотрим задачу об антиплоском сдвиге прямоугольника Q_h с трещиной M (см. 2³). Предположим, что массовые силы отсутствуют, берега трещины и боковые стороны Q_h свободны от напряжений, а на горизонтальных сторонах заданы сдвиговые усилия интенсивности $\tau(x)$. Все это означает, что в (2.1)–(2.3) $\varphi^\pm(x) = 0$, $g^\pm(\gamma) = 0$, $\psi^\pm(x) = \mu^{-1}\tau(x)$, $f(x, \gamma) = 0$, где μ — модуль сдвига. В этом случае $v = 0$ и

$$v^\pm(x) = \pm \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{x-a_+}{a_+ - a_-} \int_{a_-}^x (y-a_-)\tau(y)dy + \frac{x-a_-}{a_+ - a_-} \int_x^{a_+} (y-a_+)\tau(y)dy \right\}$$

Тогда $\frac{\partial v^\pm}{\partial x}(a_-) = \pm \frac{2\mu^{-1}}{a_+ - a_-} \int_{a_-}^{a_+} (y-a_+)\tau(y)dy$ и по формуле (3.11) коэф-

фициент интенсивности в левой вершине трещины равен

$$\sqrt{\frac{8}{\pi h}} \frac{\mu^{-1}}{a_+ - a_-} \int_{a_-}^{a_+} (y-a_+)\tau(y)dy + O(\sqrt{h}) \quad \text{при } h \ll 1 \quad (5.1)$$

При $\tau > 0$ и малом h коэффициент $C_-(h)$ отрицателен. Отметим, что в рассмотренном примере функция v равна нулю на $[b_-, a_-] \cup [a_+, b_+]$. Поэтому условия (2.12), (2.13) записываются в виде $v^\pm(a_\pm) = v^\pm(a_\mp) = 0$. После этого возможно применение балочной теории трещины (см. § 1.12 [14]; [15] и имеющиеся там ссылки), которая приводит к тому же результату (5.1).

б) Рассмотрим задачу о потенциальном течении идеальной жидкости в трехмерном круговом кольце малой высоты h , частично перегородженном непроницаемой абсолютно жесткой мембраной (см. 4⁵). Пусть контуры Γ_j — окружности радиусов R_j ($R_1 > R_2 > R_3$). Предположим, что жидкость закачивается равномерно через верхнюю часть внутренней боковой стенки $S_{h,1}^3 = \{(x, z) : |x| = R_3, z \in (0, h/2)\}$, а откачи-

пастся через нижнее основание; поток равен $\pi q R_3$. Остальные стенки и мембрана считаются непроницаемыми. Все это означает, что в (1.1)–(1.3) $f(x, h^{-1}z) = 0$, $\varphi^+(x) = 0$, $\varphi^\pm(x) = 0$, $g(x, h^{-1}z) = 0$ при $(x, z) \in S_{\lambda, \pm}^1 \cup S_{\lambda, \pm}^2$, $g(x, h^{-1}z) = -h^{-1}\pi q R_3^{-1}$ при $(x, z) \in S_{\lambda, \pm}^3$; $\varphi^-(x) = -\pi q (R_1^2 - R_3^2)^{-1/2}$. В этом случае

$$v(x) = \frac{\pi}{2} \frac{q}{R_1^2 - R_3^2} \left(R_1^2 \ln r - \frac{r^2}{2} \right)$$

$$v^+(x) = \pi q \ln r + \frac{\pi}{2} \frac{q}{R_1^2 - R_3^2} \left\{ (2R_3^2 - R_1^2) \ln R_2 - \frac{R_2^2}{2} \right\}$$

$$v^-(x) = \frac{\pi q}{R_1^2 - R_3^2} \left(R_3^2 \ln r - \frac{r^2}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \frac{q}{R_1^2 - R_3^2} \left\{ (R_1^2 - 2R_3^2) \ln R_2 + \frac{R_2^2}{2} \right\}$$

и, согласно (4.6), коэффициент $C(h, s)$ в (1.6) при особенности скоростей φu на ребре ∂M обладает асимптотикой

$$C(h, s) = \sqrt{\frac{\pi}{2h}} \frac{q}{R_2} \frac{R_1^2 + R_2^2 - 2R_3^2}{R_1^2 - R_3^2} + O(\sqrt{h}) \quad \text{при } h \ll 1$$

При малом h коэффициент $C(h, s)$ имеет тот же знак, что и q .

в) Указанный способ приближенного вычисления коэффициентов интенсивности может быть применен и в более общих ситуациях. Рассмотрим, например, задачу об антиплоском сдвиге тонкой криволинейной трещины с трещиной:

$$-\Delta_{x,z} u(h, x, z) = 0, \quad (x, z) \in Q_h \setminus M; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(h, b_+, z) = 0, \quad |z| < hl(b_+) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(h, x, \pm hl(x)) = \pm \frac{1}{\mu} \tau(x), \quad x \in (b_-, b_+); \quad \frac{\partial u}{\partial z}(h, x, \pm 0) = 0, \quad x \in (a_-, a_+)$$

где l — гладкая на $[b_-, b_+]$ положительная функция, $Q_h = \{(x, z) : x \in (b_-, b_+), |z| < hl(x)\}$, n — внешняя нормаль к ∂Q_h (сравни пример а)).

Алгоритм построения асимптотики решения задачи (5.2) не отличается в существенном от изложенного в 2°, 3°. Не останавливаясь на подробностях, приведем окончательную асимптотическую формулу для коэффициента интенсивности

$$C(h) = \frac{-2}{\sqrt{\pi hl(a_+)}} \left\{ \mu \int_{a_-}^{a_+} \frac{dy}{l(y)} \right\}^{-1} \int_{a_-}^{a_+} \int_{a_-}^y \tau(t) dt \frac{dy}{l(y)} + O(\sqrt{h}) \quad \text{при } h \ll 1$$

Отметим, что при $l(x) = 1/2$ последняя формула переходит в (5.1).

STRESS INTENSITY FACTORS FOR ANTIPLANE SHEAR AND FLOW OF IDEAL LIQUID IN THIN REGIONS WITH A LONGITUDINAL CUT

S. A. NAZAROV

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՃԱՔԵՐ ՈՒՆՆՑՈՎ ԲԱՐԱԿ ՏԻՐՈՒՑՔՆԵՐՈՒՄ ՀԱԿԱՀԱՐԹ ՍԱՀՔԻ ԵՎ ԻԳԵԱԼԼԻԿԱՆ ՀԵՂՈՒԿ ԶՈՍՔԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԵԶԱԿՈՒԹՅԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԸ

Ս. Ա. ՆԱՅԱՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Կառուցված է կենտրոնական հարթության մեջ ճաք ունեցող, փոքր h բարձրությամբ դրանային տիրույթում Լապլասի սպերատորի համար նեյմանի խնդրի $h=0$ լուծման դեպքում ասիմպտոտիկայի գլխավոր անդամը: Եռաչափ տիրույթի դեպքում խնդիրը համապատասխանում է իրևարական լեղուկի պոստնեյչալ հոսքի խնդրին, իսկ երկչափում—նաև հակահարթ ստերի և ոլորման խնդիրներին: Արտածվում են լուծումների գրադիենտի եզակիության զործակերցների համար ասիմպտոտիկ բանաձևեր: Դիտարկված են կոնկրետ խնդիրներ, որոնցում այդ բանաձևերը ունեն առավել բացահայտ տեսք:

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.—ПММ, 1962, т. 26, №4, с. 668—686.
2. Гольденвейзер А. Л., Колос А. В. К построению двумерных уравнений упругих тонких пластин.—ПММ, 1965, т. 29, №1, с. 141—161.
3. Джавадов М. Г. Асимптотика решений краевой задачи для эллиптических уравнений в тонких областях.—Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, №10, с. 1901—1909.
4. Зинк И. Е., Тропп Э. А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 256 с.
5. Бердичевский В. Л. Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек.—ПММ, 1979, т. 43, №4, с. 664—687.
6. Назаров С. А. Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях.—Вестник ЛГУ, 1982, №7, с. 65—68.
7. Морозов Н. Ф., Назаров С. А., Семенов Б. Н. Об изгибе тонких пластин, ослабленных надрезами.—Тр. XII всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, т. 3, Ереван: Изд-во ЕГУ, 1980, с. 78—84.
8. Агаджян О. Б., Назаров С. А. Об изменении коэффициента интенсивности при западке продольной трещины в призматическом стержне.—Докл. АН Арм. ССР, 1981, т. 72, №1, с. 18—21.
9. Назаров С. А., Ромашов Ю. А. Изменение коэффициента интенсивности при разрыве перемычки между двумя коллинеарными трещинами.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1982, №4, с. 30—40.
10. Назаров С. А. Асимптотика решений эллиптических уравнений в тонких областях с кусочно-гладкой границей.—Дифференциальные уравнения и их применения, вып. 33, Вильнюс: Изд-во АН Лит. ССР, 1982, с. 62—83.

11. Назаров С. А. Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 120 с.
12. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками — *Math. Nachr.*, 1977, Bd. 76, s. 29—60
13. Ладыхенская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
14. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
15. Михайлов А. М. Обобщение балочного подхода к задачам теории трещин. — *Пробл. механики и техническая физика*, 1969, №3, с. 171—174.

Ленинградский госуниверситет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
23.IV.1985