

УДК 539.3

ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ И  
 ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ  
 ИНТЕНСИВНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

АРАКЕЛЯН А. Б., МОВСИСЯН Л. А.

Упругая устойчивость стержня и цилиндрической оболочки при ударе в различных постановках рассматривалась многими авторами [1]. Работ же в упруго-пластической постановке очень мало. В [2, 3] изучается упруго-пластическая устойчивость стержня (оболочки) введением приведенного модуля упругости (модуль Кармана) или касательного модуля для той части объекта, где прошла волна сжатия. В [4] для всей длины стержня принимается приведенный модуль и однородное сжатие по всей длине. В [5] помимо неоднородности сжимающей силы изучается возмущенное движение всего стержня и принимается приведенный модуль там, где имеется пластическое сжатие, и упругий модуль там, где еще не прошла волна сжатия. Критерий потери устойчивости такой же, как и в [6 и др.]. В настоящей работе в постановке [5] исследуются другие задачи для стержня и цилиндрической оболочки. Принимается, что материал характеризуется линейным упрочнением.

1. Пусть имеется идеально прямой стержень постоянного сечения, один конец которого заделан (в продольном направлении), а к другому концу мгновенно прикладывается постоянное  $\sigma_0$ -напряжение, превышающее динамический предел пропорциональности. Решение уравнения продольных колебаний известно [8]. Физическая картина напряженного состояния такова: от ударяющего конца распространяется упругая волна со скоростью  $a = \sqrt{E/\rho}$  с напряжением за фронтом, равным напряжению динамического предела пропорциональности  $\sigma_n$ , и пластическая волна со скоростью  $a_1 = \sqrt{E_1/\rho}$  с напряжением за фронтом  $\sigma_0$ .

При рассмотрении возмущенного движения (уравнения устойчивости) для каждого момента времени  $t$  начальное напряжение и модуль материала определяются формулами

$$\sigma, E = \begin{cases} \sigma_0, E_p & \text{при } 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq t_2 \\ \sigma_n, E_p & \text{при } b < x \leq b+c, \quad 0 \leq t \leq t_2 \\ 0, E & \text{при } b+c < x \leq l, \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ \sigma_1, E_p & \text{при } b-c < x \leq l, \quad t_1 < t \leq t_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $b = a_1 t$ ,  $c = \begin{cases} (a-a_1)t & \text{при } 0 \leq t \leq t_1 \\ l-a_1(2t-l/a) & \text{при } t_1 < t \leq t_2 \end{cases}$ ,  $t_1 = l/a$ ,  $t_2 = l(a +$

$1/a_1)/2aa_1$ — время встречи отраженной волны с пластической волной с напряжением  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_0(1+a_1/a)$ — значение напряжения в отраженной части.

Мы будем изучать устойчивость стержня вплоть до  $t_2$ . Для  $t > t_2$  выражения для  $\sigma$ ,  $\bar{E}$  будут другие, но решение можно построить совершенно аналогичным образом.

Уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \bar{E} I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma F \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \sigma F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

где  $\bar{E}$ — обобщенный модуль, принимающий значения (1.1).

В качестве критического параметра берем критическое время (критическая длина  $l_{кр} = at_{кр}$ ) потери устойчивости. Его можно получить из уравнения (1.2) путем пренебрежения членом поперечной инерции [5—7 и т. д.], так что уравнение устойчивости примет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \bar{E} I \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left( \sigma F \frac{dw}{dx} \right) = 0 \quad (1.3)$$

Для каждой части отдельно запишем уравнение устойчивости

$$E_p I \frac{d^4 w_1}{dx^4} + F \sigma_0 \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (1.4)$$

$$E_p I \frac{d^4 w_2}{dx^4} + F \sigma_n \frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0 \quad \text{при } b < x \leq b+c, \quad 0 \leq t \leq t_2 \quad (1.5)$$

$$E I \frac{d^4 w_3}{dx^4} = 0 \quad \text{при } b+c < x \leq l, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (1.6)$$

$$E_p I \frac{d^4 w_3}{dx^4} + F \sigma_1 \frac{d^2 w_3}{dx^2} = 0 \quad \text{при } b+c < x \leq l, \quad t_1 < t \leq t_2 \quad (1.7)$$

При совместном решении уравнений (1.4)—(1.6) получим решение, пригодное до отражения упругой волны, а при совместном решении уравнений (1.4), (1.5) и (1.7)—до момента встречи отраженной и пластической волн.

Уравнения устойчивости (1.4)—(1.7) должны быть решены совместно с граничными условиями на концах  $x=0$  для  $w_1$  и  $x=l$  для  $w_3$ , а также должны быть удовлетворены условия сопряжения на  $x=b$  и  $x=b+c$

$$w_1 = w_2, \quad w_1' = w_2', \quad w_1'' = w_2'', \quad E_p I w_1'''' + F \sigma_0 w_1'' = E_p I w_2'''' + F \sigma_n w_2'' \quad \text{при } x=b, \quad 0 \leq t \leq t_2 \quad (1.8)$$

$$w_2 = w_3, \quad w_2' = w_3', \quad w_2'' = w_3'', \quad E_p I w_2'''' + F \sigma_n w_2'' = \quad (1.9)$$

$$= \begin{cases} E I w_3'''' & \text{при } x=b+c, \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ E_p I w_3'''' + \sigma_1 F w_3'' & \text{при } x=b+c, \quad t_1 < t \leq t_2 \end{cases}$$

Перейдем к безразмерным координатам  $x_1 = (b-x)/b$  при  $0 \leq x \leq b$ .

$x_2 = (x-b)/c$  при  $b < x \leq b+c$ ,  $x_3 = (x-(b+c))/d$  при  $b+c < x \leq l$ , где  $d = l - (b+c)$ .

При этих обозначениях решения уравнений (1.4)–(1.7), соответственно, имеют вид

$$w_1(x_1) = A_1 \sin k_1 x_1 + B_1 \cos k_1 x_1 + C_1 x_1 + D_1$$

$$w_2(x_2) = A_2 \sin k_2 x_2 + B_2 \cos k_2 x_2 + C_2 x_2 + D_2$$

$$w_3(x_3) = A_3 x_3^2 + B_3 x_3 + C_3 x_3 + D_3$$

$$w_4(x_3) = A_4 \sin k_3 x_3 + B_4 \cos k_3 x_3 + C_4 x_3 + D_4$$

где  $k_1^2 = \sigma_0 F b^2 / E_p l$ ,  $k_2^2 = \sigma_0 F c^2 / E_p l$ ,  $k_3^2 = \sigma_1 F d^2 / E_p l$ .

Удовлетворяя условиям сопряжения (1.8) и (1.9) и выражая  $A_i, B_i, C_i, D_i$  ( $i=1, 3$ ) через  $A_2, B_2, C_2, D_2$ , получим

$$w_1(x_1) = -A_2 \sqrt{\sigma_0 / \sigma_1} \sin k_1 x_1 - B_2 (\sigma_0 / \sigma_1 (\cos k_1 x_1 - 1) + 1) - \\ - C_2 a_1 / (a - a_1) (\sin k_1 x_1 (1 - \sigma_0 / \sigma_1) / k_1 + \sigma_0 x_1) + D_2$$

$$w_2(x_2) = A_2 \sin k_2 x_2 + B_2 \cos k_2 x_2 + C_2 x_2 + D_2$$

$$w_3(x_3) = A_2 \left( -\frac{\sigma_0 F (l - at)^2}{2E_p l} \sin k_4 x_3^2 + (l - at) \sqrt{\sigma_0 F / E_p l} \cos k_4 x_3 + \right.$$

$$\left. + \sin k_2 \right) + B_2 \left( -\frac{\sigma_0 F (l - at)^2}{2E_p l} \cos k_4 x_3^2 - (l - at) \sqrt{\sigma_0 F / E_p l} \sin k_2 x_3 + \right.$$

$$\left. + \cos k_2 \right) + C_2 \left( \frac{\sigma_0 F (l - at)^2}{6El(a - a_1)t} x_3^2 + \frac{l - at}{(a - a_1)t} x_3 + 1 \right) + D_2$$

$$w_4(x_3) = A_4 \sqrt{a / (a_1 + a)} \cos k_2 \sin k_3 x_3 + \sin k_4 + a / (a + a_1) \times \\ \times \sin k_4 (\cos k_3 x_3 - 1) + B_4 (-\sqrt{a / (a + a_1)} \sin k_4 \sin k_3 x_3 + \cos k_2 + \\ + a / (a + a_1) \cos k_2 (\cos k_3 x_3 - 1)) + C_2 \left( \frac{a_1 (l - t_1)}{l - a_1 (2t - t_1)} \frac{\sin k_3 x_3}{k_3} + 1 - \right. \\ \left. - \frac{a_1 (l - t_1)}{l - a_1 (2t - t_1)} \frac{a}{a + a_1} \left( \frac{\sin k_3 x_3}{k_3} - x_3 \right) \right) + D_2$$

Удовлетворяя граничным условиям  $x_1=1$  ( $x=0$ ) для  $w_1(x_1)$  и  $x_3=1$  ( $x=l$ ) для  $w_3(x_3)$ , получим трансцендентное уравнение для определения критического параметра.

Для шарнирно опертого стержня имеем

$$\left[ \frac{\sin k_2}{k_2} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_1} - 1 \right) - \frac{E_p}{E} \frac{l - at}{(a - a_1)t} \right] \left[ \left( \sqrt{\frac{\sigma_0 F}{E_p l}} (l - at) \cos k_2 + \sin k_4 \right) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_1}} \operatorname{ctg} k_1 - \sqrt{\frac{\sigma_0 F}{E_p l}} (l - at) \sin k_2 + \cos k_2 + \frac{\sigma_0}{\sigma_1} - 1 \right] - \\ - \left[ \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_1}} \operatorname{ctg} k_1 \sin k_2 + \cos k_2 \right] \left[ \frac{1}{k_2} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_1} - 1 \right) \left( \sqrt{\frac{\sigma_0 F}{E_p l}} \cos k_2 (l - at) + \sin k_2 \right) - \right.$$

$$-\frac{1}{3} \frac{\sigma_n F}{El} \frac{(l-at)^3}{(a-a_1)t} + \frac{t-a_1 t}{(a-a_1)t} + \frac{a_1}{a-a_1} \frac{\sigma_n}{\sigma_0} \Big] = 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_1 \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} & \left| \operatorname{sink}_2 \frac{a_1}{a+a_1} \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_0}} \operatorname{ctgk}_1 + \frac{a_1}{a+a_1} \cos k_2 + \frac{\sigma_n}{\sigma_0} - 1 \right| \times \\ & \times \left[ \left( \cos k_2 \operatorname{sink}_3 + \sqrt{\frac{a}{a+a_1}} \operatorname{sink}_2 \cos k_3 \right) \frac{1}{k_2} \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} - 1 \right) + \frac{\operatorname{sink}_2}{k_2} \times \right. \\ & \times \left. \left( 1 - \frac{a_1(t-t_1)}{l-a_1(2t-t_1)} \frac{a}{a+a_1} \right) \right] - \left[ \left( \cos k_2 \operatorname{sink}_3 - \sqrt{\frac{a}{a+a_1}} \operatorname{sink}_2 \cos k_3 \right) \times \right. \\ & \times \left. \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_0}} \operatorname{ctgk}_1 - \operatorname{sink}_2 \operatorname{sink}_3 + \sqrt{\frac{a}{a+a_1}} \cos k_2 \cos k_3 \right] \left| \frac{\operatorname{sink}_2}{k_2} \frac{a_1}{a+a_1} \times \right. \\ & \times \left. \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} - 1 \right) + 1 + \frac{a_1(t-t_1)}{l-a_1(2t-t_1)} \frac{a}{a+a_1} + \frac{a_1 t}{l-a_1(2t-t_1)} \frac{\sigma_n}{\sigma_0} \right] = 0 \end{aligned}$$

при  $t_1 < t \leq l$  (1.11)

Приведем результаты вычислений для стержня из дюралюминия D16T с данными  $\varepsilon_n = 0,002667$ ,  $\mu = 0,496$  и  $0,109$  ( $E_p = \mu E$ ). В табл. 1 помещены значения  $\sigma_0/\sigma_2$  ( $\sigma_2 = E/\pi^2 l^2$ ) в зависимости от отношения  $\tau_{кр} = at_{кр}/l$  при двух значениях параметра гибкости  $Y = F l^3 / \pi^2 I$

Таблица 1

Y	$\mu$	$\frac{\tau_{кр}}{\varepsilon_n}$										
			0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
120	0.496	0.002667	2.612	1.638	1.377	1.282	1.224	1.148	1.038	0.903	0.762	0.625
		0.004	2.560	1.603	1.359	1.278	1.222	1.134	1.001	—	—	—
	0.109	0.002667	1.374	0.944	0.746	0.566	0.405	—	—	—	—	—
		0.004	1.137	0.813	0.695	0.636	—	—	—	—	—	—
240	0.496	0.002667	2.508	1.567	1.341	1.273	1.221	1.120	0.964	—	—	—
		0.004	2.402	1.494	1.303	1.263	1.217	1.089	—	—	—	—
	0.109	0.002667	0.887	0.662	—	—	—	—	—	—	—	—
		0.004	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

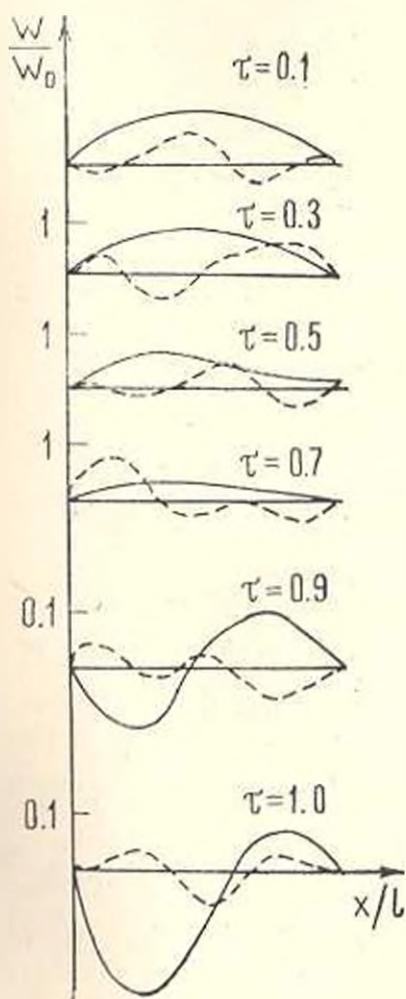
Как известно, динамический предел пропорциональности не совпадает со статическим и зависит от скорости деформации. Для выяснения как влияет этот факт на значение критического параметра помимо вышеприведенного  $\varepsilon_n$  были произведены вычисления и для  $\varepsilon_n = 0,004$ , который в полтора раза больше, чем данный (вторые строки в каждом блоке таблицы).

Из табл. 1 видно, что изменение критической длины в зависимости от изменяемости предела пропорциональности незначительное.

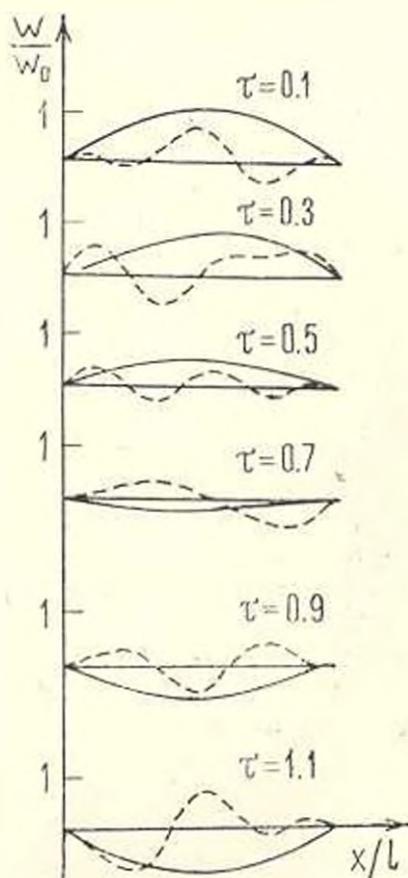
Если судить об устойчивости стержня, исходя из допустимых перемещений, нужно искать решение (1.2) в виде ряда [5. 7]

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k}{l} x \quad (1.12)$$

Тогда для  $f_k(t)$  получится бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается как задача с начальными условиями.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 приведены формы возрастания и видоизменения начального прогиба в зависимости от безразмерного времени для  $\sigma_0/\sigma_s = 1,3$  ( $\sigma_0 = 4,06\sigma_s$ ) и  $Y = 120$ . Сплошными линиями показан случай, когда начальное отклонение имеет вид одной синусоидальной полуволны по всей длине стержня ( $w = w_0 \sin \pi x/l$ ,  $\partial w/\partial t = 0$  при  $t = 0$ ), а пунктирными, когда синусоидальная полуволна находится на 0,3 части стержня ( $w = w_0 (H(x) - H(x - 0,3l)) \sin \pi x/0,3l$ ,  $\partial w/\partial t = 0$  при  $t = 0$ ,  $H(x)$  — единичная функция Хевисайда).

Вычисления проводились по схеме Рунге-Куты для систем из девяти и десяти уравнений. Результаты вычислений мало отличались друг от друга (менее, чем на 1%).

2. Теперь рассмотрим другой случай нагружения. Пусть на краю стержня действует сжимающая сила, равномерно возрастающая во времени

$$P = C^* E F t \quad (2.1)$$

Будем предполагать  $C^*$  настолько большим, что уже при первом прохождении волны на конце напряжение достигает  $\sigma_n$  ( $t_n = \sigma_n E C^*$ ,  $t_n < t_1$ ). Задача устойчивости в упругой постановке изучена в [7]. После времени  $t_n$  напряжение и модуль материала в каждом сечении  $x$  и в момент времени  $t$  будут иметь вид

$$\sigma, \bar{E} = \begin{cases} EC^*(t-x/a), E_p & \text{при } 0 \leq x \leq b', t_n \leq t < t' \\ EC^* t_n, E_p & \text{при } t' < x \leq c', t_n \leq t < t' \\ EC^*(t-x/a), E & \text{при } c' < x \leq d', t_n \leq t < t' \\ 0, E & \text{при } d' < x \leq l, t_n \leq t < t_1 \\ 2EC^*(t-t_1), E & \text{при } d' < x \leq l, t_1 < t < t' \end{cases}$$

где

$$b' = a_1(t-t_n), \quad c' = a(t-t_n), \quad d' = \begin{cases} l-at, & t_n \leq t < t_1 \\ 2l-at & t_1 < t < t' \end{cases}$$

$t' = t_1 + t_n/2$  — время встречи отраженной волны с упругой волной с напряжением  $\sigma_n$ .

Будем изучать устойчивость стержня вплоть до  $t'$ .

Уравнение возмущенного движения берем в виде (1.3). Решение его ищем в виде ряда (1.12), который удовлетворяет граничным условиям.

Представим  $\bar{E}$  и  $\sigma$  также в виде рядов по косинусам

$$\bar{E} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t) \cos^{2k} x, \quad \sigma = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) \cos^{2k} x \quad (2.2)$$

где  $b_0(t) = -(E-E_p)a(t-t_n)/l + E$

$$b_k(t) = -\frac{2}{-k} (E-E_p) \sin^{2k} a(t-t_n), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

$$c_0(t) = C^*(at^2 - (a-a_1)(t-t_n)^2)/2l$$

$$c_k(t) = 2C^* l / (-k)^2 ((1 - \cos^{2k} a_1(t-t_n))/a_1 - (\cos^{2k} a(t-t_n) - \cos^{2k} at)/a), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Подставляя (2.2) в (1.3) и производя некоторые преобразования для неизвестных  $f_m(t)$  получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}(t) f_k = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

здесь

$$2\beta F a_{mk} = \begin{cases} \lambda_m^2 [I_m^2 (2b_{0m} - b_{2m}) - F(2c_{0m} + c_{2m})], & m = k \\ (\lambda_m)^k |I_m^{m-k} (b_{m-k} - b_{m+k}) - F(c_{m-k} + c_{m+k})|, & m \neq k \end{cases} \quad (2.6)$$

Согласно критерию равенства нулю мгновенной частоты возмущающего движения [5-7], критический параметр определяется как наименьший корень уравнения

$$\det \|a_{mk}(t)\| = 0 \quad (2.7)$$

Для численного анализа взят пример предыдущего пункта. В табл. 2 приведены значения  $\sigma_0^{*k}$  ( $\sigma_0 = EC^0 t_{кр}$ ) в зависимости от  $\tau_{кр} = at_{кр}/l$  для значений  $Y=120$ ,  $\mu=0,496$ . Взятые определители восьмого и десятого порядков. Точность такая же, как и в предыдущем пункте.

Таблица 2

$\tau_{кр}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
0,002667	8,299	3,907	2,648	2,071	1,730	1,514	1,355	1,229	1,121	1,025	0,936
0,004	8,268	3,930	2,705	2,135	1,809	1,590	1,428	1,296	1,183	1,083	1,000

На фиг. 2 изображены кривые возрастающих прогибов балки при (если решение уравнения (1.2) искать в форме (1.12)) скорости нагружения  $C^0 = 10z_0$  и гибкости  $Y = 120$  для различных моментов времени  $t$ . Сплошные и пунктирные линии имеют смысл предыдущего пункта (метод интегрирования и точность, как и в предыдущем пункте).

3. Рассмотрим теперь цилиндрическую оболочку длиной  $l$ , радиусом  $R$ , на конце которой прилагается напряжение  $\sigma$ , которое мгновенно достигает своего максимального значения и поддерживается. При этом оно превосходит предел пропорциональности материала.

Будем предполагать, что начальное состояние оболочки характеризуется стержневым приближением, как это обычно делается, то есть примем сдвигательность (1.1) и для оболочки.

Уравнение возмущенного состояния берется в виде [10] с добавлением инерционного члена

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( (D_2 - D_3) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{B_2}{2R} + \nu \rho l \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + (1 - \nu^2) \frac{B_1}{R^2} w + \rho l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

где коэффициенты уравнений (3.1) определяются по [2,9], то есть

$$D_2 = \frac{Ez_0^3}{24(1-\nu^2)} (2 - \omega(1 + \bar{z}_0^3)), \quad D_3 = \frac{Ez_0^3}{64(1-\nu^2)} (\lambda - \omega)(1 + \bar{z}_0)^2 (2 - \bar{z}_0) \quad (3.2)$$

$$B_2 = \frac{3Ez_0^3}{32(1-\nu^2)} (\lambda - \omega) (1 + \bar{z}_0)^2, \quad B_1 = \frac{Ez_0}{2(1-\nu^2)} (2 - \omega(1 + \bar{z}_0))$$

где  $\lambda = 1 - E_k/E$ ,  $\omega = 1 - E_c/E$ ,  $E_k$  — касательный модуль,  $E_c$  — секущий модуль,  $\bar{z}_0$  — относительная координата, определяющая толщину слоя разгрузки.

При первом прохождении волны первая и вторая зоны будут из-

гибаться как пластическая среда, а третья зона—как упругая, следовательно, при разыскании критических параметров в первом и втором участках будем принимать  $\bar{z}_0 = 1$ ,  $\nu = 0,5$ , а в третьем участке— $\bar{z}_0 = 0$ ,  $\nu = \nu$ . При таких предположениях коэффициенты (3.2) примут вид

$$D_2 - D_3 = \begin{cases} \frac{1+3\alpha}{36} E_c \delta^3 & \text{при } 0 \leq x \leq a_1 t \\ \frac{1+3\mu}{36} E \delta^3 & \text{при } a_1 t < x \leq at \\ \frac{1}{12(1-\nu^2)} E \delta^3 & \text{при } at < x \leq l \end{cases} \quad (3.3)$$

где  $\alpha = E_k/E$

$$B_1, B_2 = \begin{cases} \frac{4}{3} E_c \delta, \quad \frac{\delta^2}{2} E_c (1-\nu) & \text{при } 0 \leq x \leq a_1 t \\ \frac{4}{3} E \delta, \quad \frac{\delta^2}{2} E (1-\nu) & \text{при } a_1 t < x \leq at \\ \frac{1}{1-\nu^2} E \delta, \quad 0 & \text{при } at < x \leq l \end{cases} \quad (3.4)$$

Предположим, что оболочка на краях шарнирно оперта. Тогда решение уравнения возмущенного движения ищем в виде (1.12) и коэффициенты (3.3) и (3.4) также представляем в виде рядов по косинусам

$$(D_2 - D_3) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cos \lambda_k x, \quad \left( \frac{B_2}{R} + z_i \delta \right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos \lambda_k x \quad (3.5)$$

$$(1-\nu^2) \frac{B_1}{R^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos \lambda_k x$$

где

$$d_0 = \frac{\delta^3 E}{12l} \left( \frac{1+3\alpha}{3\nu} \mu a_1 t + \frac{1+3\mu}{3} (a-a_1)t + \frac{1}{1-\nu^2} (l-at) \right)$$

$$d_k = \frac{\delta^3 E}{6\pi k} \left( \frac{1+3\alpha}{3\nu} \mu \sin \lambda_k a_1 t + \frac{1+3\mu}{3} (\sin \lambda_k at - \sin \lambda_k a_1 t) - \frac{1}{1-\nu^2} \sin \lambda_k at \right)$$

$$b_0 = \frac{\delta E}{l} \left( \left( \frac{\delta}{4R} \mu \frac{1-\nu}{\alpha} + \frac{\sigma_0}{E} \right) a_1 t + \left( \frac{\delta(1-\mu)}{4R} + \frac{\sigma_0}{E} \right) (a-a_1)t \right)$$

$$b_k = \frac{2\delta E}{\pi k} \left( \left( \frac{\delta}{4R} \mu \frac{1-\nu}{\alpha} + \frac{\sigma_0}{E} \right) \sin \lambda_k a_1 t + \left( \frac{\delta}{4R} (1-\mu) + \frac{\sigma_0}{E} \right) (\sin \lambda_k at - \sin \lambda_k a_1 t) \right)$$

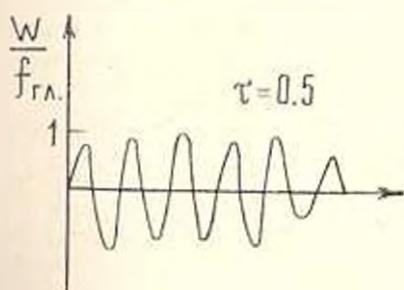
$$c_0 = \frac{\delta E}{l R^2} \left( \mu \frac{a_1 t}{\alpha} - (l-a_1 t) \right), \quad c_k = \frac{2\delta E}{\pi k R^2} \left( \frac{\mu}{\alpha} - 1 \right) \sin \lambda_k a_1 t, \quad k=1, 2, \dots$$

Подставляя (1.12) и (3.5) в (3.1), после некоторых преобразований для  $f_k(t)$  получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2.5), где  $a_{mk}(t)$  определяются так:

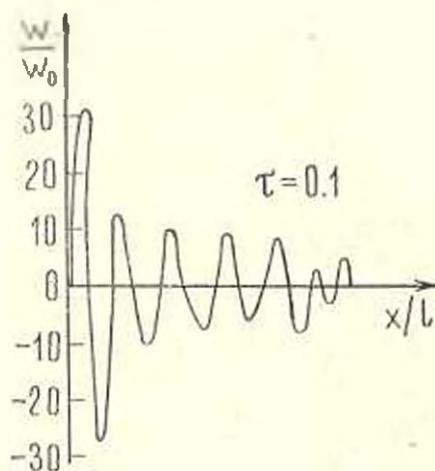
$$2i_m a_{mk}(t) = \begin{cases} i_m^4 (2d_0 - d_{2m}) - i_m^2 (b_0 - b_{2m}) + 2c_0 - c_{2m} & \text{при } m=k \\ i_m^2 i_k^2 (d_{m-k} - d_{m+k}) - i_m i_k (b_{m-k} + b_{m+k}) - c_{m-k} - c_{m+k} & \text{при } m \neq k \end{cases} \quad (3.6)$$

Критический параметр будем определять как наименьший корень уравнения (2.7), где  $a_{mk}(t)$  определяется из (3.6).

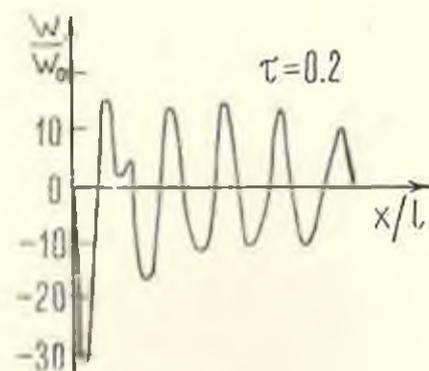
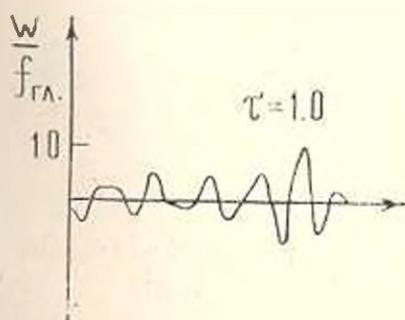
В табл. 3 приводятся значения  $\sigma_0 \tau_n$  при некоторых значениях параметров  $R/l$  и  $2R$  в зависимости от  $\tau_{кр}$  для вышеуказанного материала. Вычисления проводились следующим образом: сначала для данного  $\tau$  определяется главная гармоника, а потом критическое значение вычисляется из определителя десятого порядка, который содержит и главную гармонику. Для  $\mu$  взято значение 0,496. В скобках цифры показывают главную гармонику (гармонику, наиболее близкую к истинной форме потери устойчивости).



Фиг. 3



Фиг. 4



На фиг. 3 приведены формы потери устойчивости для двух моментов времени. По оси ординат отложен безразмерный прогиб ( $f_{гл}$  — коэффициент при главной гармонике для данных моментов времени, см. табл. 3).

$R/l$	$\frac{\sigma}{R}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.5	0.01	2.305 (14)	1.747 (10)	1.481 (11)	1.424 (11)	1.397 (12)	1.382 (12)	1.370 (12)	1.361 (12)	1.351 (12)	1.343 (12)
	0.005	2.013 (17)	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.75	0.01	3.600 (6)	1.837 (8)	1.541 (7)	1.463 (8)	1.425 (7)	1.404 (8)	1.386 (8)	1.372 (8)	1.363 (8)	1.352 (8)
	0.005	1.241 (14)	—	—	—	—	—	—	—	—	—

На фиг. 4 приведены формы возрастания прогиба оболочки, которой сообщено начальное напряжение  $\sigma_0 = 1,3 \sigma_n$  и начальное отклонение  $w|_{t=0} = w_0 \sin 9-x/l$ ,  $\partial w / \partial t|_{t=0} = 0$  для некоторых моментов времени.

При интегрировании системы типа (2.5) было взято десять уравнений от 9-ого до 18-ого включительно.

Все расчеты проводились на ЭВМ ЕС—1022 по программе, составленной на языке Фортран-IV.

На основании приведенных расчетов и сопоставления с упругими задачами можно отметить следующее:

1. Сильное видоизменение форм потери устойчивости как для различных моментов времени, так и в зависимости от упругой или упруго-пластической постановок.
2. Незначительное изменение значения критических напряжений в зависимости от изменения предела пропорциональности (от скорости деформации).
3. Невозможность однозначного ответа на вопрос уменьшается или увеличивается критический момент потери устойчивости при упруго-пластической постановке по сравнению с упругой.

## ON ELASTIC—PLASTIC STABILITY OF ROD AND CYLINDRICAL SHELL UNDER LONGITUDINAL INTENSIVE LOADS

A. E. ARAKELIAN, L. A. MOVSISIAN

ՈՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ԻՆՏԵՆՍԻՎ ԲԵՌՈՒՎՈՐՄԱՆ ԵՆՔԱՐԿՎԱՆՑ ԱՌԱՋԿԱՊԸԱՍՏԻՎ ՉՈՂԻ ԵՎ ԿԱՆԱՅԻՆ ԹԱՎԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ե. ԱՐԱԲԵԼՅԱՆ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ու մ փ ո փ ո մ

Գիտարկվում է ձողի և գլանային թաղանթի առաձգադաժարիկ կայունությունը, որի մի եզրում տեղի է ունենում հարված կամ ազդում է ժամանակին զծային համեմատական բևու ենթադրվում է, որ առաջացած լա-

րումները գերազանցում են դինամիկական համեմատականության սահմանը: Հաշվի է առնվում երկայնական ալիքների տարածվելը (սկզբնական լարվածալին վիճակի անհամասեռությունը) և զրգոված վիճակի շարժման հալա-տարման մեջ տարրեր կտրվածքներում նյութի տարրեր վարքը (զծային ամրակցման):

Տրված բևեռի և բեռնավորման արագությանը համապատասխանող կայունությունը կորցնելու կրիտիկական երկարությունը կամ կրիտիկական ժամանակը որոշվում է ելնելով վերջավոր ժամանակահատվածի համար կայունության կրիտերիայից:

Փննարկվում է, դեֆորմացիայի արագությունից կախված, համեմատականության սահմանի մեծացման ազդեցությունը կրիտիկական երկարության արժեքի վրա:

Ուսումնասիրվում է նաև ժամանակի ընթացքում տրված սկզբնական ձկվածքի շարժման ձևի փոփոխությունը:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вольмир А. С. Устойчивость дифференцируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
2. Терегулов Н. Г., Шигабутдинов Ф. Г. Исследование полубесконечных упругопластических цилиндрических оболочек при продольном ударе.—30 научная конференция. Тезисы докладов на 30 научной конференции КИСИ и Татарского республиканского правления ИТО. Казань: Стройиндустрия, 1978.
3. Терегулов Н. Г., Шигабутдинов Ф. Г. Устойчивость упругопластического стержня при динамическом нагружении.—В сб.: Прочность и жесткость тонкостенных конструкций. Казань: 1977, вып. 2, с. 77—86.
4. Корнев В. П., Маркин А. В., Яковлев И. В. Развитие динамических форм выпучивания упругопластических стержней.—ЖИИМТФ, 1980, №3, с. 121—126.
5. Мовсисян Л. А. К устойчивости упругопластических стержней при ударных нагрузках.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1986, т. 39, №2, с. 15—23.
6. Мовсисян Л. А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе.—Докл. АН Арм. ССР, 1969, т. 49, №3, с. 124—130.
7. Мовсисян Л. А. Устойчивость упругой балки при быстрых нагружениях.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. 24, №1, с. 38—50.
8. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 369 с.
9. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
10. Королева В. И. Упругопластическая деформация оболочек. М.: Машиностроение, 1971. 304 с.
11. Горденко Б. А. Экспериментальное исследование оболочек при ударе.—Тр. VII всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970, с. 190—193.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
23.X.1985