

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ БАЛКИ ПРИ  
 ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

АРАКЕЛЯН А. Е.

В настоящей статье исследуется устойчивость неоднородной балки, у которой один конец закреплен (по отношению к продольным перемещениям), а второй конец движется в сторону первого с постоянной скоростью  $c$ , в двух случаях неоднородности: в предположении, что модуль упругости и плотность изменяются вдоль длины по произвольным законам и модуль упругости и плотность по толщине кусочно постоянны (случай ступенчатой балки).

1. Устойчивость неоднородной балки, у которой модуль упругости и плотность материала изменяются вдоль длины.

Продольное движение: уравнение невозмущенного движения относительно продольного перемещения  $u$  будет

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

где  $E(x) = E_0 f(x)$  и  $\rho(x) = \rho_0 \bar{\rho}(x)$  — произвольные функции.

Для определенности примем нулевые начальные условия

$$u=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad \text{при } t=0 \quad (1.2)$$

при следующих граничных условиях

$$u=0 \quad \text{при } x=0, \quad u=-ct \quad \text{при } x=l \quad (1.3)$$

Действующие в поперечных сечениях сжимающие напряжения определяются формулой

$$\sigma = E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.4)$$

Обозначим

$$v = u + ct x/l \quad (1.5)$$

Уравнения (1.1), начальные и краевые условия (1.2) и (1.3) при таких обозначениях приводятся к виду

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = P(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q(x) \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{ct}{l} \right) \quad (1.6)$$

$$v=0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = cx/l \quad \text{при } t=0 \quad (1.7)$$

$$v=0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=l \quad (1.8)$$

где

$$a^2 = E_0/\rho_0, \quad P(x) = f(x)/\varphi(x), \quad Q(x) = f'(x)/\varphi(x) \quad (1.9)$$

Представляя коэффициенты (1.6) в виде рядов

$$P(x) = \frac{p_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos i_k x, \quad Q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin i_k x, \quad i_k = \pi k/l \quad (1.10)$$

где

$$p_k = \frac{2}{l} \int_0^l P(x) \cos i_k x dx, \quad q_k = \frac{2}{l} \int_0^l Q(x) \sin i_k x dx$$

ищем решение (1.6) в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin i_k x \quad (1.11)$$

который удовлетворяет граничным условиям (1.8).

Подставляя (1.11) и (1.10) в (1.6) и производя некоторые преобразования, для неизвестных  $v_k(t)$  получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2 v_k}{dt^2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} v_n - q_k c t/l \quad (1.12)$$

где

$$A_{kk} = \frac{i_k^2}{2} (p_{2k} - p_0) + \frac{i_k}{2} q_{2k} \quad (1.13)$$

$$A_{kn} = \frac{i_k^2}{2} (p_{k+n} - p_{k-n}) + \frac{i_n}{2} (q_{n+k} + q_{k-n})$$

здесь должны иметь в виду, что  $p_{-n} = p_n$  и  $q_{-n} = -q_n$ .

Учитывая (1.7), начальные условия для (1.12) будут

$$v_k = 0, \quad \frac{dv_k}{dt} = -\frac{2c}{l} \frac{(-1)^k}{i_k} \text{ при } t=0 \quad (1.14)$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3) свелось к системе (1.12) с начальными условиями (1.14), то есть к задаче Коши, для которой примененные методы редукции приводятся, например, в [1].

Другой вид решения задачи о продольном колебании неоднородной балки приведен, например, в [2], но для наших целей удобнее вышеприведенное решение.

Разлагая  $E(x)$  в ряд

$$E(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos i_k x \quad (1.15)$$

где

$$f_k = \frac{2}{l} \int_0^l E(x) \cos i_k x dx$$

И учитывая (1.4) и (1.15), для сжимающего напряжения получим

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \cos i_k x \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 3f_0 c_0 + \sum_{q=1}^{\infty} f_q c_q, \quad \sigma_k = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{\infty} (f_{k-q} + f_{k+q}) c_q \\ c_0 &= -ct/l, \quad c_k = i_k v_k, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$

$v_k$  определяется из (1.12)–(1.14).

Числовые результаты получены для безразмерного сжимающего напряжения  $\sigma^* = \sigma(E_0 \rho^* a)$  при неоднородностях вида:

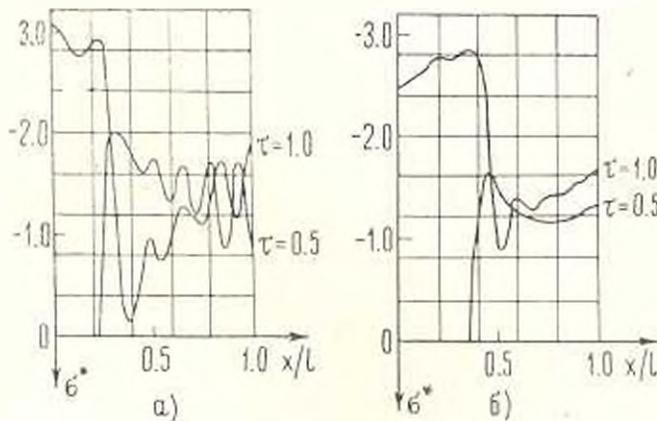
случай (а)  $f(x) = 1 + 2x/l$ ,  $\varphi(x) = 1$

и

случай (б)  $f(x) = 1 + 2(1-x/l)$ ,  $\varphi(x) = 1$ .

На фиг. 1 (а) и (б) приведены распределения сжимающего напряжения для двух моментов времени ( $\tau = at/l$ ), соответственно, для случаев неоднородностей а) и б).

Методом Хемминга интегрировались первые 10 и 15 уравнений из системы (1.12). Их результаты практически мало отличались друг от друга.



Фиг. 1

*Возмущенное движение:* уравнение устойчивости (уравнение возмущенного движения) берем в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ zF \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \varphi(x) F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.18)$$

где  $D(x) = E(x)J$  — изгибная жесткость,  $J$  и  $F$  — соответственно, момент инерции и площадь поперечного сечения.

Предположим, что балка на концах шарнирно оперта

$$\dot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=l \quad (1.19)$$

Решение (1.18) ищем в виде ряда, удовлетворяющего условиям (1.19)

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m(t) \sin l_m x \quad (1.20)$$

Представляем  $\varphi(x)$  в виде ряда

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cos l_k x \quad (1.21)$$

Подставляя (1.20) в (1.18), учитывая (1.15), (1.16) и (1.21), после некоторых преобразований для неизвестных  $\omega_m(t)$  получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{q=1}^{\infty} (\varphi_{m-q} - \varphi_{m+q}) \frac{d^2 \omega_m}{dt^2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{mk}(t) \omega_k = 0, \quad m=1, 2, \dots \quad (1.22)$$

где

$$2FB_{mk}(t) = l_m l_k [l_m l_k J (f_{m-k} - f_{m+k}) + F(\varphi_{m-k} + \varphi_{m+k})]$$

Если в качестве критического параметра брать критическое время, то его можно определять так, как и [3, 4], то есть это — время, при котором «мгновенная частота» системы (1.22) равна нулю.

Итак, критическое время есть наименьший корень уравнения

$$\det \|B_{mk}(t_{cr})\| = 0 \quad (1.23)$$

Ниже приводится таблица для  $Yc a$  ( $Y = FF/J\pi^2$  — параметр гибкости), при которых достигается заданное критическое время.

Первая строка соответствует неоднородности вида (а), вторая — неоднородности (б). Для сравнения, в третьей строке приведен случай однородной балки.

$\tau$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
$Yc a$	1.6820 2.7679 2.1118	1.3806 1.8667 1.8915	0.9615 0.9395 1.5538	0.7294 0.6447 1.0000	0.6510 0.5765 0.6934	0.4663 0.4805 0.6622

Вычисления производились для детерминантов третьего и четвертого порядков, результаты которых практически совпадали.

Из приведенной таблицы видно, что в общем случае повышение модуля упругости не приводит к увеличению критического времени.

## 2. Устойчивость слоистой балки.

Рассмотрим теперь многослойную балку с прямоугольным поперечным сечением, общей толщиной  $h$ , составленную из нечетного числа  $(2m+1)$  изотропных однородных слоев постоянной толщины, симметрично расположенных относительно срединной поверхности.

Будем исследовать устойчивость такой балки.

Для получения уравнения невозмущенного и возмущенного движения будем принимать гипотезы классической теории стержней [5] для всего пакета. При таких допущениях полученные уравнения по виду совпадают с уравнениями однородного стержня [4] с оговоркой, что под модулем упругости, плотностью и изгибной жесткостью надо понимать их приведенные значения [6]

$$E = \frac{2}{h} \left[ E_{m+1} h_{m+1} + \sum_{s=1}^m E_s (h_s - h_{s+1}) \right]$$

$$\rho = \frac{2}{h} \left[ \rho_{m+1} h_{m+1} + \sum_{s=1}^m \rho_s (h_s - h_{s+1}) \right]$$

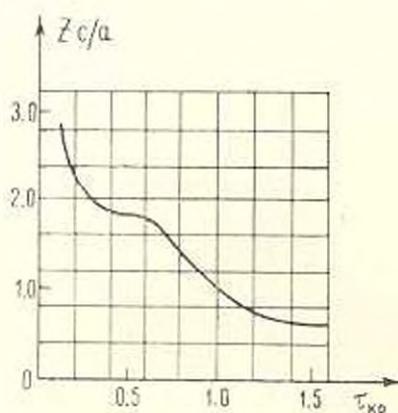
$$D = \frac{2}{3} \left[ E_{m+1} h_{m+1}^3 + \sum_{s=1}^m E_s (h_s^3 - h_{s+1}^3) \right]$$

где  $E_s, \rho_s$ —модуль упругости и плотность материала  $s$ -го слоя, соответственно,  $h_s$ —расстояние  $s$ -го слоя от срединной поверхности.

Согласно [4] критическое время потери устойчивости определяется из (1.23), где

$$2hB_{mk}(l) = \begin{cases} 2Dk_n^2 + k_n^2 h(z_0 + z_k) & \text{при } m = k \\ k_n^2 h(z_{m-k} + z_{m+k}) & \text{при } m \neq k \end{cases}$$

$k_n$ —коэффициент разложения сжимающего напряжения в ряд (1.16).



Фиг. 2

На фиг. 2 приведена зависимость  $Zc/a$  ( $Z = Eh^3/Da^2$ ) от  $\tau_{кр}$ , из которой при известной структуре пакета для заданной скорости удара  $c$  можно определить критическое время потери устойчивости. В то же время, изменяя распределение слоев при одних и тех же материалах, можно получить различные критические времена (в частности, для композитов с различными углами армирования), то есть можно ставить вопрос о наибольшем критическом времени или скорости удара. Для примера рассмотрим трехслойный стержень. Слои имеют одинаковую толщину и плотность. В случае, когда модуль упругости среднего слоя в десять раз больше, чем модуль ( $E_0$ ) наружных слоев, критическое время  $t_{кр} = 0,25la$  получится при  $c = 1,04(h/l)^2 a$ , в то время как, если слои расположить в обратном порядке, для достижения того же критического времени

необходимо  $c=5,23(h/l)^2a$ . В случае, когда модуль упругости всех трех слоев одинаков и равен  $E_0$ , критическая скорость равна  $c=1,74(h/l)^2a$ ,

## STABILITY OF ELASTIC NONHOMOGENEOUS BEAT SUBJECTED TO LONGITUDINAL IMPACT

A. E. ARAKELIAN

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԱՆՀԱՄԱՍՆՈՒ ԸՆԾԱՆԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ  
ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՐԿԱԾԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա. Ե. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է անհամասեռ հեծանի կայունությունը, որի մի եզրը ամրացված է (երկայնական տեղափոխության նկատմամբ), իսկ մյուս եզրը շարժվում է հաստատուն արագությամբ: Ընդունվում է անհամասեռության երկու դեպք. առաձգականության բարձակիցը և խտությունը հեծանի երկարությամբ փոփոխվում են կամայական օրենքով և բաց հաստության կտոր առ կտոր հաստատուն են (չերտափոր հեծան): Գտնված է տրված անհամասեռությանը համապատասխան սեղմող լարման բաշխումը հեծանի երկարությամբ և տրված ճարձածի արագությանը համապատասխան հեծանի կայունությունը կորցնելու կրիտիկական ժամանակը:

### ЛИТЕРАТУРА

1. Жаугымко О. А. Метод бесконечных систем дифференциальных уравнений в задачах колебаний систем с распределенными параметрами.—Успехи механики, 1986, т. 9, вып. 1, с. 64—91.
2. Крестенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 324 с.
3. Мовсисян Л. А. К устойчивости упруго-пластических стержней при ударных нагрузках.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1986, т. 39, № 2, с. 15—23.
4. Мовсисян Л. А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе.—Докл. АН АрмССР, 1969, т. 49, № 3, с. 124—130.
5. Григолюк Э. И. Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек ВИННИТИ, итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. М.: 1973, т. 5, с. 5—270.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 148 с.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
9.XII. 1986