ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 4, 1987 Механика

УДК 539.3

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

САAКЯН С. Г.

Векторное волновое уравнение Ламе для однородных изотропных упругих сред в осесимметричном случае может быть разделено на два независимых скалярных волновых уравнения [1]. В настоящей работе обобщается метод разделения векторного волнового уравнения Ламе в осесимметричном случае для слоисто-неоднородных изотропных упругих сред. Показано, что в этом случае векторное волновое уравнение для некоторых классов слоисто-неоднородных упругих сред может быть разделено на три независимых скалярных линейных дифференциальных уравнения второго порядка.

Рассмотрим распространение осесимметричных волн в неоднородной изотропной упругой среде в пространстве при отсутствии внешних массовых сил. Примем, что коэффициенты Ламе λ, μ и плотность ρ упругой среды зависят только от одной декартовой координаты z. Тогда непрерывные дифференциальные решения векторного волнового уравнения в перемещениях

$$\mathrm{grad}[(\lambda+2\mu)\mathrm{div}\vec{u}]-\mathrm{rot}(\mu\,\mathrm{rot}\vec{u})+2\mu'\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}-\hat{i}_z\mathrm{div}\vec{u}+\hat{i}_z\times\mathrm{rot}\vec{u}\right]-\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=0 \quad (1)$$

представим в виде

$$\vec{u}=\psi_1(z)\mathrm{grad}\Phi_1(r,z,t)+\psi_2(z)\mathrm{rot\,rot}[\Phi_2(r,z,t)\hat{i}_z]+\mathrm{rot}[\Phi_3(r,z,t)\hat{i}_z] \quad (2)$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3—квазипотенциалы перемещения $\vec{u}$; $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$—неизвестные функции, зависящие только от z; $\hat{i}_z$—орт по оси z.

Подставляя выражение (2) в уравнение (1), получим

$$\varphi_1\mathrm{grad}[\varphi_1^{-1}\psi_1\xi L_1(\Phi_1)]+\varphi_2\mathrm{rot\,rot}[\varphi_2^{-1}\psi_2\mu L_2(\Phi_2)\hat{i}_z]+\mathrm{rot}[\varphi^{-1}\mu L_3(\Phi_3)\hat{i}_z]+$$
$$+\varphi_1\hat{i}_z\left[l_{11}\Delta\Phi_1+l_{12}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}+l_{13}\Phi_1+l_{14}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}\right]+\hat{i}_z\times\mathrm{rot}\left\{\varphi_2^{-1}\left[l_{21}\Delta\Phi_2+l_{22}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+l_{23}\Phi_2+l_{24}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}\right]\hat{i}_z\right\}=\vec{0} \quad (3)$$

где приняты обозначения:

$$L_1(\Phi_1)=\Delta\Phi_1+\left[\frac{\xi'+\mu'}{\xi}p_1+\frac{2\mu'}{\xi}\right]\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}+\left[\frac{\mu'}{\xi}p_1+\frac{\mu}{\xi}(p_1'+p_1^2)\right]\Phi_1-\frac{\rho}{\xi}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}$$

$$L_2(\Phi_2)=\Delta\Phi_2+\left[\frac{\xi+\mu}{\mu}p_2+\frac{2\mu'}{\mu}\right]\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\left[\frac{\xi'}{\mu}p_2+\frac{\xi}{\mu}(p_2'-p_2^2)\right]\Phi_2-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}$$

$$L_3(\Phi_3)=\Delta\Phi_3+\frac{\mu'}{\mu}\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial t^2}$$

$$p_i=\psi_i'/\psi_i;\ i=1,\ 2;\ \xi=\lambda+2\mu,\quad l_{11}=\xi\psi_1\varphi_1'-(\mu\psi_1'+2\mu'\psi_1)\varphi_1 \tag{4}$$

$$l_{12}=[(\xi+\mu)\psi_1'+2\mu'\psi_1]\varphi_1'-2(\mu\psi_1)''\varphi_1,\quad l_{13}=(\mu\psi_1')'\varphi_1'-(\mu\psi_1')''\varphi_1$$

$$l_{14}=\rho\psi_1\varphi_1'-(\rho\psi_1)'\varphi_1;\quad l_{21}=\mu\psi_2\varphi_2'-(\xi\psi_2'+2\mu'\psi_2)\varphi_2$$

$$l_{22}=[(\xi+\mu)\psi_2'+2\mu'\psi_2]\varphi_2'-2(\xi\psi_2'+\mu'\psi_2)'\varphi_2;\quad l_{23}=(\xi\psi_2')'\varphi_2-(\xi\psi_2')''\varphi_2$$

$$l_{24}=\rho\psi_2\varphi_2'-(\rho\psi_2)'\varphi_2$$

Если предположить, что механические свойства среды λ, μ, ρ и неизвестные функции $\psi_i(z)$ и $\varphi_i(z)$ $(i=1,\ 2)$ удовлетворяют условиям

$$l_{ij}=0;\quad i=1,\ 2;\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{5}$$

уравнение (3) примет вид

$$\varphi_1\,\mathrm{grad}[\varphi_1^{-1}\psi_1\rho v_1^2L_1(\Phi_1)]+\varphi_2\,\mathrm{rot\,rot}[\varphi_2^{-1}\psi_2\rho v_2^2L_2(\Phi_2)\hat{i}_z]+\rho\,\mathrm{rot}(v_2^2L_3(\Phi_3)\hat{i}_z)=\vec{0} \tag{6}$$

где

$$v_1^2=\xi/\rho;\quad v_2^2=\mu/\rho$$

В трехмерном пространстве векторы

$$\mathrm{grad}[\varphi_1^{-1}\psi_1\rho v_1^2L_1(\Phi_1)],\quad \mathrm{rot\,rot}[\varphi_2^{-1}\psi_2\rho v_2^2L_2(\Phi_2)\hat{i}_z],\quad \mathrm{rot}[v_2^2L_3(\Phi_3)\hat{i}_z]$$

линейно независимы и, следовательно, из уравнения (6) получим

$$\mathrm{grad}[\varphi_1^{-1}\psi_1\rho v_1^2L_1(\Phi_1)]=\vec{0}$$

$$\mathrm{rot\,rot}[\varphi_2^{-1}\psi_2\rho v_2^2L_2(\Phi_2)\hat{i}_z]=\vec{0},\quad \mathrm{rot}[v_2^2L_3(\Phi_3)\hat{i}_z]=\vec{0} \tag{7}$$

В уравнениях (7) выражения $\varphi_i^{-1}\psi_i\rho v_i^2L_i(\Phi_i)$, $(i=1,\ 2)$, $v_2^2L_3(\Phi_3)$ являются либо постоянными величинами, либо некоторыми функциями времени $f_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, которые можно принять равными нулю. В самом деле, если $f_i(t)$ не равно нулю, тогда вместо Φ_i можно рассматривать квазипотенциал

$$\overline{\Phi}_i=\Phi_i-v_i^2\int_0^t(t-\tau)f_i(\tau)d\tau$$

Во всех случаях Φ_i (или $\overline{\Phi}_i$) являются общими решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$L_i(\Phi_i)=0;\quad i=1,\ 2,\ 3 \tag{8}$$

Таким образом, если механические свойства среды λ, μ, ρ и функции $\varphi_i(z)$, $\psi_i(z)$ удовлетворяют условиям разделения (5), векторное уравнение (1) можно разделить на независимые линейные уравнения (8) для квазипотенциалов Φ_1, Φ_2, Φ_3. После некоторых преобразований уравнения (8) примут вид:

$$L_1(\Phi_1) \equiv \Delta\Phi_1 + \gamma^{-1}[(\gamma+1)p_1 + 2p_\mu]\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \gamma^{-1}[p_1 p_\mu + p_1' + p_1^2]\Phi_1 - v_1^{-2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

$$L_2(\Phi_2) \equiv \Delta\Phi_2 + [(\gamma+1)p_2 + 2p_\mu]\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - [(\gamma p_2)' + \gamma(p_2^2 + p_2 p_\mu)]\Phi_2 - v_2^{-2}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = 0 \tag{10}$$

$$L_3(\Phi_3) \equiv \Delta\Phi_3 + p_\mu \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - v_2^{-2}\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial t^2} = 0 \tag{11}$$

где $\quad \gamma = v_1^2/v_2^2; \quad p_\mu = \mu'/\mu; \quad p_\rho = \rho'/\rho.$

Из уравнений (9)—(11) следует, что в слоисто-неоднородной среде осесимметричная упругая волна представляет собой три независимо распространяющихся волны. Причем часть перемещения $\vec{u}$, соответствующая скалярному квазипотенциалу Φ_1, переносится в пространстве с переменной скоростью v_1 и является волной сжатия или расширения. Части перемещения $\vec{u}$, соответствующие квазипотенциалам Φ_2, Φ_3, распространяются с другой переменной скоростью v_2 и являются вертикальной и горизонтальной волнами сдвига.

Преобразуя (5), получим следующие условия разделения векторного волнового уравнения (1):

$$p_1 - q_1 = p_2 - q_2; \quad p_1 - \gamma q_1 + 2p_\mu = 0; \quad p_\rho = q_1 - p_1 \tag{12}$$

$$(\mu p_1)' + \mu p_1^2 + (\xi q_1)' - \xi q_1^2 = 0 \tag{13}$$

$$(\mu\varphi_1')' = K_1\varphi_1; \quad \gamma p_2 - q_2 + 2p_\mu = 0; \quad (\xi\varphi_2')' = K_2\varphi_2 \tag{14}$$

$$(\xi p_2)' + \xi p_2^2 + (\mu q_2)' - \mu q_2^2 = 0 \tag{15}$$

где K_i—произвольная постоянная,

$$q_i = \varphi_i'/\varphi_i, \quad i = 1,\ 2$$

Система уравнений разделения (12)—(15) незамкнута и ее можно решить при некоторых дополнительных условиях. Например, предполагая, что

$$\varphi_i = \rho\psi_i, \quad \text{то есть} \quad q_i = p_\rho + p_i, \quad i = 1,\ 2$$

система уравнений разделения (12)—(15) примет вид

$$p_1 + p_2 - p_\rho = 0; \quad p_1 + \gamma p_2 - p_\mu = 0 \tag{16}$$

$$(\mu p_1)' + \mu p_1^2 = K_1\rho; \quad (\xi p_2)' + \xi p_2^2 = K_2\rho \tag{17}$$

Условия разделения (16)—(17) впервые были получены Дж. Гуком [2].

Решение этой системы рассмотрено в работах [3, 4].

Предполагая далее, что в (9)—(11) и (12)—(15)

$$\varphi_1=\rho\psi_2;\quad \varphi_2=\rho\psi_1,\quad \text{то есть}\quad q_1=p_\rho+p_2;\quad q_2=p_\rho+p_1$$

получим известные результаты, описанные в работе [5].

Выделим некоторые специальные типы неоднородных упругих сред, для которых система уравнений разделения (12)—(15) имеет решение в элементарных функциях. Предполагая в системе уравнений (12)—(15), что

$$\varphi_1=\psi_2^{-1};\quad \varphi_2=\psi_1^{-1},\quad \text{то есть}\quad q_1=-p_2;\quad q_2=-p_1$$

получим

$$\rho=\rho_0=\text{const};\quad p_1=-p_2=2\mu'/(\xi-\mu) \tag{18}$$

$$(\mu p_1)'+\mu p_1^2=K_1;\qquad (\xi p_2)'+\xi p_2^2=K_2 \tag{19}$$

$$[(\xi+\mu)p_1]'=(\xi-\mu)p_1^2;\qquad [(\xi+\mu)p_2]'=-(\xi-\mu)p_2^2 \tag{20}$$

$$(\mu p_1)'+\mu p_1^2=(\xi p_2)'+\xi p_2^2 \tag{21}$$

Упростим (18)—(21), тогда получим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$2\mu'=(\xi-\mu)p_1 \tag{22}$$

$$(\xi p_1)'-\xi p_1^2=-K_2 \tag{23}$$

$$2(\mu''+K_1)=(\xi+\mu)p_1^2 \tag{24}$$

$$2\mu' p_1=[(\xi+\mu)p_1]' \tag{25}$$

Интегрируя систему уравнений (24), (25), имеем

$$[(\xi+\mu)p_1]^2=4(\mu'^2+2C_1\mu+2C_2) \tag{26}$$

где $K_1=2C_1$, C_2—произвольная постоянная интегрирования.

Исключив из (26) p_1 по формуле (22), получим

$$2\xi\mu\mu'^2(\xi-\mu)^{-2}=C_1\mu+C_2;\quad |C_1|+|C_2|\neq 0 \tag{27}$$

Из уравнения (27) определим

$$\xi=\frac{\mu}{C_1\mu+C_2}\left[\mu'^2+C_1\mu+C_2+\mu'\sqrt{\mu'^2+2C_1\mu+2C_2}\,\right] \tag{28}$$

Подставив значения p_1 и ξ из (22) и (28) в (23), получим для μ следующее дифференциальное уравнение:

$$(\mu''+C_1)\left(1+\frac{\mu'}{\sqrt{\mu'^2+2C_1\mu+2C_2}}\right)=C_1+\frac{C_2}{\mu} \tag{29}$$

Уравнение (29) в случае $C_1\neq 0$ и $C_2=0$ можно привести к виду

$$d(\mu'-C_1 z+\sqrt{\mu'^2+2C_1\mu})=0 \tag{30}$$

Из выражения (30) найдем первый интеграл

$$\mu' - C_1 z + \sqrt{\mu'^2 + 2C_1\mu} = G_1 \tag{31}$$

где G_1—произвольная постоянная.

Упростив (31), имеем следующее линейное уравнение:

$$\mu' + \frac{C_1\mu}{C_1 z + G_1} = \frac{1}{2}(C_1 z + G_1) \tag{32}$$

Общее решение уравнения (32) имеет вид

$$\mu = (\mu_0 - C_0)/Z + C_0 Z^2; \quad (C_0 \leqslant \mu_0) \tag{33}$$

В (33) приняты следующие обозначения:

$$\mu(z_0) = \mu_0; \quad \mu'(z_0) = \mu_0'; \quad Z = (z + z_1)/(z_0 + z_1)$$

$$z_1 = G_1/C_1; \qquad C_0 = \frac{1}{3}\left[\mu_0 + (z_0 + z_1)\mu_0'\right]$$

Из (22) и (18) определяются ξ, p_1 и p_2:

$$\xi = 3C_0 Z^2; \qquad p_1 = -p_2 = \frac{2}{z + z_1}$$

При условии $\psi_1(z_0) = 1$ и $\psi_2(z_0) = 1$ из уравнений (4) получим

$$\psi_1(z) = Z^2; \qquad \psi_2(z) = Z^{-2}$$

В этом случае независимые скалярные уравнения движения (9)—(11) примут вид

$$L_1(\Phi_1^*) = \Delta\Phi_1^* + \frac{2\gamma^{-1}(\gamma+3)Z^3 - 2a}{Z(Z^3+2a)}\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial Z} + \frac{6\gamma^{-1}Z^3}{Z^2(Z^3+2a)}\Phi_1^* - \frac{1}{3Z^2}\frac{\partial^2\Phi_1^*}{\partial\zeta^2} = 0 \tag{34}$$

$$L_2(\Phi_2^*) = \Delta\Phi_2^* - \frac{2[(\gamma-1)Z^3 + 2a(\gamma+2)]}{Z(Z^3+2a)}\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial Z} + \frac{2\gamma(Z^3+8a)}{Z^2(Z^3+2a)}\Phi_2^* - \frac{Z}{Z^3+a}\frac{\partial^2\Phi_2^*}{\partial\zeta^2} = 0 \tag{35}$$

$$L_3(\Phi_3^*) = \Delta\Phi_3^* + \frac{2(Z^3-a)}{Z(Z^3+2a)}\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial Z} - \frac{Z}{Z^3+a}\frac{\partial^2\Phi_3^*}{\partial\zeta^2} = 0 \tag{36}$$

где

$$\Phi_i^* = \Phi_i/(z_0 + z_1)^2; \quad i = 1, 2, 3; \quad a = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0}{C_0} - 1\right); \quad \zeta = \sqrt{\frac{\mu_0}{C_0}}\frac{t}{z_0 + z_1}$$

При $C_0 = \mu_0$ ($\gamma = 3$) уравнения (34)—(36) приобретают простой вид.

Аналогично в случае $C_1 = 0$ и $C_2 \neq 0$ решение уравнения (29) может быть получено в параметрическом виде.

ON THE PROPAGATION OF THE AXISYMMETRICAL WAVES IN THE STRATIFIED NONHOMOGENEOUS MEDIUM

S. G. SAHAKIAN

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում քննարկվում է առանցքասիմետրիկ, առաձգական ալիքների տարածումը անվերջ, անհամասեռ միջավայրում։ Օգտագործելով պոտենցիալների եղանակը՝ Լամեի վեկտորական ալիքային հավասարումը տրոհվում է երեք՝ իրարից անկախ սկալյար դիֆերենցիալ երկրորդ կարգի հավասարումների։ Ստացվել են ալիքների տարածման իրարից անկախ սկալյար հավասարումներ մի քանի անհամասեռ առաձգական միջավայրերի համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
2. *Hook J. F.* Separation of the Vector Wave Equation of Elasticity for Inhomogeneous Media.—J. Acoust. Soc. Am., v. 33, No. 3, 1961, p. 302—313.
3. *Hook J. F.* Contributions to a Theory of Separability of the Vector Wave Equation of Elasticity for Inhomogeneous Media.—J. Acoust. Soc. Am., 1962, v. 34, No 7, pp. 946—953.
4. *Hook J. F.* Determination of Inhomogeneous Media for which the vector wave Equation of Elasticity is Seperable. Bull. Seism. Soc. Am., 1965, v. 55, No. 6, pp. 975—987.
5. *Саакян С. Г.* Разделение векторного волнового уравнения для неоднородных упругих сред. Докл. АН СССР, 1983, т. 269, №3, с. 565—567.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
13.VI.1986