ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XL, № 4, 1987 Механика

УДК 539.3

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

КАХКЦЯН В. М.

Рассматривается задача колебаний анизотропной цилиндрической оболочки, изготовленной из композиционного материала.

1. Как известно [1], в случае пластин и оболочек из композиционных материалов точность гипотезы недеформируемых нормалей определяется не только значением отношений геометрических параметров h/c, а также величинами B_{ik} a_{pq} ($i, k=1, 2, 6$; $p, q=4, 5$), где h—толщина, c—характерный размер пластинки или оболочки в плане, B_{ik}—коэффициенты упругости

$$B_{11}=(a_{22}a_{66}-a_{26}^2)\Omega_0^{-1}, \quad B_{22}=(a_{11}a_{66}-a_{16}^2)\Omega_0^{-1}$$
$$B_{12}=(a_{16}a_{26}-a_{12}a_{66})\Omega_0^{-1}, \quad B_{66}=(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\Omega_0^{-1} \qquad (1.1)$$
$$B_{16}=(a_{12}a_{26}-a_{22}a_{16})\Omega_0^{-1}, \quad B_{26}=(a_{12}a_{16}-a_{11}a_{26})\Omega_0^{-1}$$
$$\Omega_0=(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)a_{66}+2a_{12}a_{16}a_{26}-a_{11}a_{26}^2-a_{22}a_{16}^2$$

a_{pq} —коэффициенты деформации, причем a_{44}, a_{45}, a_{55} характеризуют деформации поперечного сдвига

$$e_{13}=a_{45}\sigma_{23}+a_{55}\sigma_{13}, \quad e_{23}=a_{44}\sigma_{23}+a_{45}\sigma_{13} \qquad (1.2)$$

e_{ik}, σ_{ik} —соответственно, деформации и напряжения. Ниже решается задача колебаний анизотропных оболочек на основе уточненной теории [1] и оценивается влияние деформаций поперечных сдвигов на первую (основную) частоту собственных колебаний.

Уравнения колебания цилиндрической оболочки радиуса R, длины l, толщины h, изготовленной из анизотропного материала, на основе уточненной теории [1, 2] получаются в виде

$$A_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}+2A_{16}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^3\partial\beta}+(A_{66}-2A_{12})\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}-2A_{26}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha\partial\beta^3}+A_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\beta^4}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}=0$$

$$J_5\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+J_6\frac{\partial\psi}{\partial\beta}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}=-q+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+3D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^3\partial\beta}+(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}-$$
$$-J_5(B_{11}a_{45}+B_{16}a_{55})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}-J_5(B_{16}a_{45}+2B_{16}a_{55}+B_{66}a_{45})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}-$$

$$-J_3(B_{26}a_{45}+B_{66}a_{55})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}-J_4(B_{11}a_{45}+B_{16}a_{44})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}-J_4(B_{12}a_{44}+$$

$$+2B_{16}a_{45}+B_{66}a_{44})\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}-J_4(B_{26}a_{44}+B_{66}a_{45})\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}+J_5\varphi=0 \qquad (1.3)$$

$$D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}+3D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2}+(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta}+D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}-$$

$$-J_3(B_{16}a_{55}+B_{66}a_{45})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}-J_3(B_{12}a_{55}+2B_{26}a_{45}+B_{66}a_{55})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}-$$

$$-J_3(B_{22}a_{45}+B_{26}a_{55})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}-J_4(B_{16}a_{45}+B_{66}a_{44})\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}-J_4(B_{12}a_{45}+2B_{26}a_{44}+$$

$$+B_{66}a_{45})\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}-J_4(B_{66}a_{45}+B_{26}a_{55})\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}+J_6\psi=0$$

Отметим, что в (1.3) влиянием тангенциальных сил инерции и инерции вращения пренебрегается. Здесь $\Phi(\alpha, \beta, t)$—функция усилий, $w(\alpha, \beta, t)$—прогиб, $\varphi(\alpha, \beta, t)$. $\psi(\alpha, \beta, t)$—функции поперечных сдвигов, α—координата по образующей, β—по дуге поперечного сечения,

$$C_{ik}=B_{ik}h,\ D_{ik}=B_{ik}h^3/12,\quad J_3=\int_{-h/2}^{h/2}J_{01}(\gamma)\gamma d\gamma,\ J_4=\int_{-h/2}^{h/2}J_{02}(\gamma)\gamma d\gamma$$

$$J_5=\int_{-h/2}^{h/2}f_1(\gamma)d\gamma,\quad J_6=\int_{-h/2}^{h/2}f_2(\gamma)d\gamma$$

$f_1(\gamma)$, $f_2(\gamma)$ определяют закон изменения касательных напряжений σ_{13}, σ_{23} по толщине,

$$A_{11}=(C_{11}C_{66}-C_{16}^2)\Omega^{-1},\quad A_{22}=(C_{22}C_{66}-C_{26}^2)\Omega^{-1}$$

$$A_{12}=(C_{12}C_{66}-C_{16}C_{26})\Omega^{-1},\quad A_{66}=(C_{11}C_{22}-C_{12}^2)\Omega^{-1}$$

$$A_{16}=(C_{11}C_{26}-C_{12}C_{16})\Omega^{-1},\quad A_{26}=(C_{22}C_{16}-C_{12}C_{26})\Omega^{-1}$$

$$\Omega=(C_{11}C_{22}-C_{12}^2)C_{66}+2C_{12}C_{16}C_{26}-C_{11}C_{26}^2-C_{22}C_{16}^2$$

Как показано в [1—3], без существенных погрешностей можно принять

$$f_1(\gamma)=f_2(\gamma)=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\gamma^2\right)$$

тогда

$$J_{01}(\gamma)=J_{02}(\gamma)=\frac{\gamma}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{\gamma^2}{3}\right),\quad J_3=J_4=\frac{h^3}{120},\ J_5=J_6=\frac{h^3}{12}$$

пусть

$$w=w_{mn}(t)\exp(-i(\lambda_m\alpha+\mu_n\beta)),\quad \Phi=\Phi_{mn}(t)\exp(-i(\lambda_m\alpha+\mu_n\beta))$$
$$\varphi=\varphi_{mn}(t)\exp(-i(\lambda_m\alpha+\mu_n\beta)),\quad \psi=\psi_{mn}(t)\exp(-i(\lambda_m\alpha+\mu_n\beta)) \qquad (1.4)$$
$$\lambda_m=m\pi/l,\quad \mu_n=n/R$$

где m—число полуволн по образующей, n—число волн по окружности поперечного сечения. В случае оболочек из ортотропного материала функции $\exp(-i(\lambda_m\alpha+\mu_n\beta))$ являются собственными функциями задачи свободных колебаний шарнирно опертой по торцам цилиндрической оболочки. В силу (1.4), из системы (1.3) для частот собственных колебаний оболочки получается

$$\omega_{mn}=\frac{1}{\sqrt{\rho h}}\left\{\left[D_{11}\lambda_m^4+4D_{16}\lambda_m^3\mu_n+2(D_{12}+2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2+\right.\right.$$
$$+4D_{26}\lambda_m\mu_n^3+D_{22}\mu_n^4\Big]\frac{1+\Delta_{1mn}}{1+\Delta_{2mn}}+\frac{\lambda_m^4}{R^2}\left[A_{11}\lambda_m^4+2A_{16}\lambda_m^3\mu_n+\right. \qquad (1.5)$$
$$\left.\left.+(A_{66}-2A_{12})\lambda_m^2\mu_n^2+2A_{26}\lambda_m\mu_n^3+A_{22}\mu_n^4\right]^{-1}\right\}^{1/2}$$

где введены обозначения

$$\Delta_{1mn}=\left[h^2(b_{1mn}a_{3mn}-a_{2mn}b_{3mn})\lambda_m+(a_{1mn}b_{3mn}-b_{2mn}a_{3mn})\mu_n\right]\times$$
$$\times\left[10(D_{11}\lambda_m^4+4D_{16}\lambda_m^3\mu_n)+2(D_{12}+2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2+4D_{26}\lambda_m\mu_n^3+D_{22}\mu_n^4\right]^{-1}$$

$$\Delta_{2mn}=\frac{h^2}{10}(a_{1mn}+b_{1mn})+\frac{h^4}{100}(a_{1mn}b_{1mn}-a_{2mn}b_{2mn})$$

$$a_{1mn}=(B_{11}a_{55}+B_{16}a_{45})\lambda_m^2+(B_{12}a_{45}+2B_{16}a_{55}+B_{66}a_{45})\lambda_m\mu_n+(B_{26}a_{55}+B_{66}a_{45})\mu_n^2$$

$$a_{2mn}=(B_{11}a_{45}+B_{16}a_{11})\lambda_m^2+(B_{12}a_{11}+2B_{16}a_{45}+B_{66}a_{11})\lambda_m\mu_n+(B_{26}a_{45}+B_{66}a_{45})\mu_n^2$$

$$a_{3mn}=D_{11}\lambda_m^3+3D_{16}\lambda_m^2\mu_n+(D_{12}+2D_{66})\lambda_m\mu_n^2+D_{26}\mu_n^3$$

$$b_{1mn}=(B_{16}a_{55}+B_{66}a_{44})\lambda_m^2+(B_{12}a_{45}+2B_{26}a_{44}+B_{66}a_{15})\lambda_m\mu_n+(B_{22}a_{11}+B_{26}a_{45})\mu_n^2$$

$$b_{2mn}=(B_{16}a_{55}+B_{66}a_{15})\lambda_m^2+(B_{22}a_{55}+2B_{26}a_{45}+B_{66}a_{25})\lambda_m\mu_n+(B_{22}a_{15}+B_{26}a_{25})\mu_n^2$$

$$b_{1mn}=D_{16}\lambda_m^3+3D_{26}\lambda_m^2\mu_n+(D_{12}+2D_{66})\lambda_m\mu_n^2+D_{22}\mu_n^3$$

При $\Delta_{1mn}=\Delta_{2mn}=0$ получается значение собственной частоты оболочки, определенной на основе классической теории анизотропных оболочек [2,4]

$$\omega_{mn}=\frac{1}{\sqrt{\rho h}}\left\{D_{11}\lambda_m^4+4D_{16}\lambda_m^3\mu_n+2(D_{12}+2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2+4D_{26}\lambda_m\mu_n^3+D_{22}\mu_n^4+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda_m^4}{R^2}\left[A_{11}\lambda_m^4+2A_{16}\lambda_m^3\mu_n+(A_{66}-2A_{12})\lambda_m^2\mu_n^2+2A_{26}\lambda_m\mu_n^3+A_{22}\mu_n^4\right]^{-1}\right\}^{1/2} \qquad (1.6)$$

2. Рассмотрим оболочку, изготовленную из элементарных слоев ортотропного композиционного материала типа боропластика [5]

$$B_{12}^0=0{,}0178B_{11}^0,\quad B_{22}^0=0{,}0635B_{11}^0,\quad B_{66}^0=0{,}0223B_{11}^0,\quad a_{11}^0=49{,}9/B_{11}^0,\quad a_{55}^0=44{,}8/B_{11}^0$$

уложенных под углом φ относительно образующей оболочки. Коэффициенты B_{1k} и a_{1k} для любого φ определяются формулами поворота [1]. Ставится следующая задача:
для заданных l/R и l/h найти

$$\omega_1^* = \max_{\varphi} \min_{(m,n)} \omega_1(m, n, \varphi) \tag{2.1}$$

где

$$\omega_1 = l\sqrt{12\rho}\,\omega_{mn}/\pi^2\sqrt{B_{11}^0}, \quad \varphi \in [0, 90^\circ], \quad m, n \in N \tag{2.2}$$

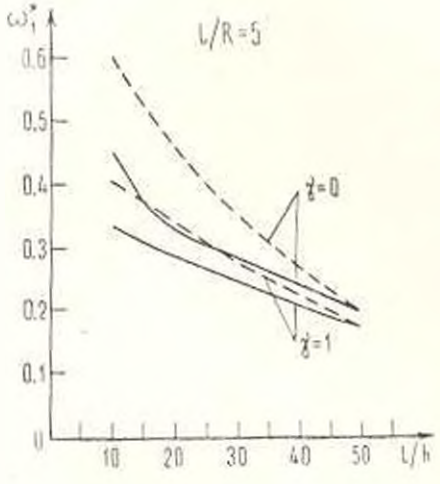
Расчеты выполнены при

$$l/R = 1, 2, 3, \ldots 6, \quad l/h = 100, 50, 25, 20, 15, 10. \tag{2.3}$$

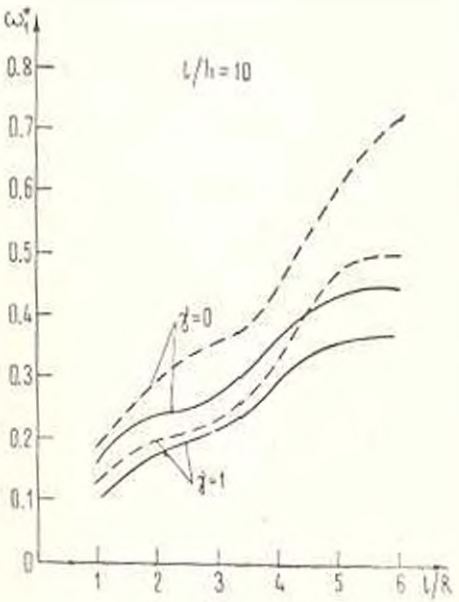
Рассматриваются два варианта организации пакета оболочки по толщине. В первом случае монослои ортотропного композиционного материала уложены под углом φ относительно образующей оболочки и пакет оболочки в целом анизотропный, а во втором случае монослои уложены поочередно под углом $\pm\varphi$ и пакет оболочки по толщине будет ортотропным. В этом случае решение (1.4) тождественно удовлетворяет граничным условиям шарнирного закрепления торцов оболочки.

Выполненные расчеты показывают:

1. Перекрестно армированная оболочка обладает большей частотой собственных колебаний по сравнению с косоармированной оболочкой (фиг. 1). Сплошные линии соответствуют данным по уточненной теории, а пунктирные — по классической. $\gamma = 0$ соответствует случаю ортотропного пакета, а $\gamma = 1$ — анизотропного.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. С уменьшением отношения l/R при фиксированном l с увеличением R поправка от учета влияния поперечных сдвигов увеличивается (фиг. 1).

3. С увеличением отношения l/R при фиксированном l с уменьшением R частоты собственных колебаний увеличиваются, увеличивается также влияние поперечных сдвигов (фиг. 2).

Таблица 1

Теория	l/R / γ	1	2	3
I	0	0,166 $m=1,\ n=4$	0,097 $m=1,\ n=4$	0,056 $m=1,\ n=4$
	1	0,188 $m=1,\ n=4$	0,069 $m=1,\ n=5$	0,046 $m=1,\ n=2$
II	0	0,153 $m=1,\ n=0$	0,086 $m=1,\ n=4$	0,054 $m=1,\ n=3$
	1	0,108 $m=1,\ n=0$	0,067 $m=1,\ n=5$	0,045 $m=1,\ n=3$

4. При фиксированном R с увеличением l частоты собственных колебаний уменьшаются. Уменьшается также поправка от учета влияния поперечных сдвигов. В табл. 1 при $R/h=10$ приведены значения $\omega_1^*=\max_{\varphi}\min_{m,n}\omega_1(m, n, \varphi)$, где $\omega_1=R\sqrt{12\rho}\,\omega_{mn}/\pi^2\sqrt{B_{11}^0}$ для ортотропной ($\gamma=0$), анизотропной ($\gamma=1$) оболочек, полученных на основе классической (I) и уточненной (II) теорий, при $l/R\geq 4$ учет поперечных сдвигов практически не меняет значения наибольшей первой частоты собственных колебаний оболочки.

Аналогичные расчеты, проведенные для оболочки, изготовленной из материала типа боралюминия [6], показывают, что с усилением матрицы уменьшается влияние учета поперечных сдвигов и способа армирования.

THE VIBRATION OF THE ANISOTROPIC SHELL WITH REGARD TO TRANSVERSE SHEARS

V. M. KAGHKTSIAN

ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՈՒԺԵՔԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՈՒՆՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Վ. Մ. ՔԱՂՔՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ անիզոտրոպ գլանային թաղանթի սեփական տատանումների խնդիրը: Ստացված են բանաձևեր սեփական տատանումների հաճախականության համար: Որպես օրինակ դի-

տարկված է կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված թաղանթ։ Կախված նյութի կառուցվածքից, թաղանթի երկրաչափությունից՝ կատարված է ընդլայնական սահքերի ազդեցության վերլուծություն. գտնված է թաղանթի նյութի օպտիմալ կառուցվածք, որի դեպքում առաջին հաճախականությունը ստանում է ամենամեծ արժեք։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 266 с.
4. *Белубекян Э. В., Гнуни В. Ц.* Оптимальные задачи колебаний анизотропных слоистых цилиндрических оболочек.—Механика полимеров, 1976, №5, с. 871—874.
5. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
6. *Портной К. И., Салибеков С. Е., Светлов И. Л. Чубаров В. М.* Структура и свойства композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1979. 255 с.

Армянский сельскохозяйственный институт

Поступила в редакцию 29.I.1987.