

УДК 531+539.3

О ВЗАИМОСВЯЗИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И О СМЫСЛЕ ВЕКТОРА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ*

ПОБЕДРА Б. Е.

Классическая теория упругости (геометрически и физически линейная) в последнее время приобрела «второе дыхание». Появились новые ее разделы, которые нашли широкое применение на практике.

На основе математической теории угловых особенностей [1—4] сделаны работы, в которых анализируются такие особенности при решении красивых задач линейной теории упругости [5—7], а также математической теории трещин [8, 9]. Широкое распространение получили контактные задачи [10—12], а также краевые задачи теории упругости с односторонними ограничениями [13—15]. При изучении всех вышеупомянутых вопросов деформации считаются малыми (геометрически линейная теория упругости), однако вектору перемещения придается смысл, который он имеет при рассмотрении больших (или конечных) деформаций. В ряде случаев это приводит к некоторым парадоксам, которые легко объяснимы и хорошо известны механикам. Однако, автор по опыту преподавания на факультете повышения квалификации механико-математического факультета Московского университета знает, что у некоторых механиков наличие этих парадоксов вызывает удивление. Учитывая, что практически ни в одном учебнике теории упругости эти вопросы в должной мере не освещены, автор отважился еще раз предостеречь механиков от возможных ошибок, связанных с неправильной трактовкой вектора перемещений в случае малых деформаций.

Далее, в последнее время появилось много работ, посвященных нелинейной теории упругости (см., например, монографии [16—19]). В силу того, что теория упругости как угодно больших деформаций достаточно сложна и в рамках этой теории в настоящее время решены лишь самые простые задачи (как правило с известной кинематикой), ряд авторов рассматривает различные виды линеаризации общих соотношений. К сожалению, имеются работы, в которых результаты решения линеаризованных уравнений применяются к задачам, где такая линеаризация незаконна. Особенно часты недоразумения, вызванные рассмотрением физически линейной теории упругости при учете геометрической нелинейности. Иногда критикуется применимость физи-

* Доклад на Всесоюзной конференции по теории упругости Тбилиси, 10 декабря 1984 г.

чески нелинейной, но геометрически линейной теории [19], с. 249. Ниже будет изложена точка зрения автора на вопрос о взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в механике деформируемого твердого тела, с которой, впрочем, некоторые читатели могут и не согласиться.

1. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве некоторая материальная точка в недеформированном состоянии описывается радиусом-вектором $\vec{r}$ с прямоугольными декартовыми координатами x_i ($i = 1, 2, 3$) [20]. В результате деформации эта же материальная точка займет положение, описываемое радиусом-вектором $\vec{R}$ с координатами y_i (фиг. 1). Вектор перемещений $\vec{u}$ определяется соотношениями [21]

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{u} \quad (y_i = x_i + u_i) \quad (1.1)$$

Обозначая запятой частную производную по соответствующей координате $\left(y_{i,j} \equiv \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$, получим из (1.1)

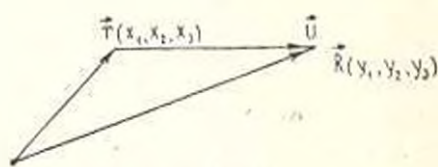
$$y_{i,j} = x_{i,j} + u_{i,j} = \delta_{ij} + u_{i,j} \quad (1.2)$$

где δ_{ij} — символы Кронекера [20]. Тензор, имеющий компоненты $y_{i,j}$, называется тензором градиента места [19] и обозначается через $\overset{o}{\nabla} \vec{R}$. На его основе может быть введена мера деформации Коши-Грина $\underline{G}$:

$$G_{ij} = y_{k,i} y_{k,j} \quad (\underline{G} = \overset{o}{\nabla} \vec{R} \cdot \overset{o}{\nabla} \vec{R}') \quad (1.3)$$

и тензор деформации Коши-Грина

$$C_{ij} = \frac{1}{2} (G_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (1.4)$$



Фиг. 1

В механике сплошной среды предполагается, что соотношения, согласно которым каждому вектору $\vec{r}$ ставится в соответствие вектор $\vec{R}$

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3) \quad (1.5)$$

должны быть разрешимы относительно координат

$$x_i = x_i(y_1, y_2, y_3) \quad (1.6)$$

что соответствует тому факту, что две различные материальные частицы в результате деформирования не могут слиться. Это требование локально записывается в виде

$$\det |y_{i,j}| \neq 0 \quad (1.7)$$

Тензор, имеющий компоненты $x_{i,j} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$, также образует тензор градиента места $\vec{r}$ [19], причем тензоры $\overset{o}{\nabla} \vec{R}$ и $\vec{r}$ взаимно обратны.

На основе тензора $\vec{\nabla} \vec{r}$ можно ввести меру деформации Альманзи

$$g_{ij} = x_{kij} x_{kij} \quad (g = \vec{\nabla} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{r}^T) \quad (1.8)$$

и тензор деформации Альманзи A

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2} (u_{ji} + u_{ji} - u_{kij} u_{kij}) \quad (1.9)$$

Иногда «на жаргоне» тензоры G и g называют метрическими, хотя в рассматриваемом евклидовом трехмерном пространстве R_3 «постоящий» метрический тензор будет единичным [20].

Кроме введенных мер деформации $\underline{G}$, $\underline{C}$, $\underline{g}$, $\underline{A}$ можно ввести много других [18, 19, 21]. Представим тензор $u_{i,j}$ (тензор дисторсии) в виде суммы симметричного ε_{ij} и антисимметричного ω_{ij} тензоров [20]

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (1.10)$$

Тогда тензор $\underline{C}$ (1.4) можно представить в виде

$$C_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{ki} + \omega_{ki})(\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}) \quad (1.11)$$

Тензор ε с шестью независимыми компонентами ε_{ij} называют тензором малых деформаций, а тензор ω с тремя независимыми компонентами — тензором поворотов.

Деформации называются малыми [16, 21], если максимальное значение $|u_{i,j}|$ по всем точкам среды и в любой момент времени намного меньше единицы

$$|u_{i,j}| \sim \delta \ll 1 \quad (1.12)$$

Как следует из (1.2), (1.7) и (1.12) в случае малых деформаций

$$\det |y_{i,j}| \sim 1 + \delta \quad (1.13)$$

2. Пусть соотношения (1.5) описывают конечный поворот всех точек среды на угол φ вокруг оси x_3 (фиг. 2). Тогда

$$y_1 = x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi$$

$$y_2 = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \quad y_3 = x_3 \quad (2.1)$$

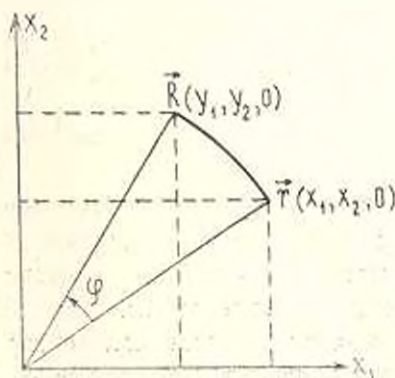
$$u_1 = x_1 (\cos \varphi - 1) - x_2 \sin \varphi$$

$$u_2 = x_1 \sin \varphi + x_2 (\cos \varphi - 1), \quad u_3 = 0 \quad (2.2)$$

Подсчитывая по формулам (1.10), имеем для этого случая отличными от нуля компоненты тензоров ε и ω :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \cos \varphi - 1 \quad (2.3)$$

$$\omega_{12} = \sin \varphi \quad (2.4)$$



Фиг. 2

Таким образом, несмотря на то, что при преобразовании (2.1) расстояния между любыми двумя частицами сохраняются (удлинения всех волокон равны нулю), компоненты ε_{11} и ε_{22} тензора малых деформаций (которые имеют физический смысл удлинений координатных волокон [21]) отличны от нуля (2.3).

Если же рассматриваются настолько малые повороты, что можно принять

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1 \quad (2.5)$$

вместо (2.1) получим

$$y_1 = x_1 - \varphi x_2, \quad y_2 = \varphi x_1 + x_2, \quad y_3 = x_3 \quad (2.6)$$

$$u_1 = -\varphi x_2, \quad u_2 = \varphi x_1, \quad u_3 = 0 \quad (2.7)$$

и все компоненты тензора малых деформаций будут тождественно равны нулю, а компонента тензора поворота $\omega_{12} = -\varphi$. Однако, при этом волокно, выходящее из начала координат и имеющее до деформации длину l , после деформации будет иметь длину $l\sqrt{1+\varphi^2}$.

Иногда для случая малых удлинений и больших поворотов (чаще всего при рассмотрении тонкостенных конструкций) в формуле (1.11) пренебрегают произведением компонент тензора ε , то есть полагают

$$C_{ij} \approx \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}(\omega_{ki}\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}\varepsilon_{ki} + \omega_{ki}\omega_{kj}) \quad (2.8)$$

Нетрудно видеть, что компоненты тензора деформаций C , подсчитанные по формулам (1.4), (2.2) тождественно равны нулю. Если же воспользоваться формулой (2.8), то они будут тождественно равны нулю, если в (2.2) положить

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad \sin \varphi \approx \varphi \quad (2.9)$$

Следовательно, формулами (2.8) можно пользоваться, когда компоненты малой деформации подсчитываются с точностью $o(\delta)$, а компоненты тензора поворотов — с точностью до $o(\delta^2)$, причем должны выполняться условия (1.12), то есть если поворот φ достаточно велик, формулы (2.8) не приемлемы.

3. Геометрически линейной теорией называется теория, использующая допущение (1.12), в результате которого можно положить в (1.11)

$$C_{ij} \approx \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.1)$$

Именно такие соотношения принимаются в классической линейной теории упругости (соотношения Коши). При этом эйлеровы координаты считаются с точностью бесконечно малых высшего порядка совпадающими с лагранжевыми [21]. Вектор перемещений можно рассматривать в этом случае как вектор, с помощью которого определяется деформированное и напряженное состояния (что чаще всего и требуется

в инженерных задачах). Придавать вектору перемещений u при малых деформациях смысл, указанный на фиг. 1, можно не всегда. В частности, нужно следить за выполнением условий (1.12), (1.13). Если условие (1.12) не выполняется, то вектор перемещения теряет свой физический смысл.

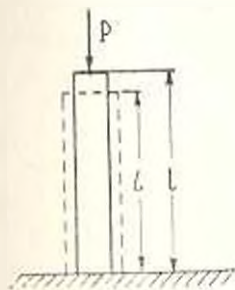
Рассмотрим некоторые примеры.

А. Пусть стержень первоначальной длины l (достаточно большой) и поперечного сечения F сжимается силой P (фиг. 3). Очевидно, его деформация будет

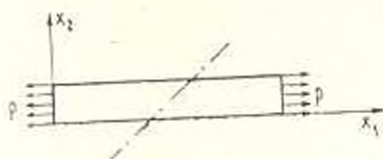
$$\epsilon = -\frac{P}{EF} \quad (3.2)$$

где E —модуль Юнга. Если, оставаясь в рамках линейной теории упругости, придать физический смысл вектору перемещений согласно фиг. 1, то длину стержня после деформации можно записать в виде

$$L = l \left(1 - \frac{P}{EF} \right) \quad (3.3)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Отсюда видно, что при $P > EF$ стержень после сжатия силой P будет иметь отрицательную длину $L < 0$. (Разумеется, при такой силе стержень нельзя считать линейно упругим). Более того, при достижении эйлеровой нагрузки стержень потеряет устойчивость [22].

Б. Пусть стержень (фиг. 4) подвергается равномерно распределенной нагрузке p . Тогда для изотропной линейно упругой среды можно записать

$$\epsilon_{11} = p = a(1 + m^2), \quad \epsilon_{22} = 0 \quad (3.4)$$

где

$$a = \frac{1}{\nu - m^2 + \nu m^2} \quad (3.5)$$

ν —коэффициент Пуассона, а m —некоторое число. Придавая физический смысл вектору перемещения, мы получим координаты точек стержня после деформации

$$y_1 = a(x_1 - m x_2), \quad y_2 = am(x_1 - m x_2), \quad y_3 = x_3 \quad (3.6)$$

В результате такой деформации материальные волокна, образующие до деформации прямые

$$x_1 - mx_2 = c, \quad c = \text{const} \quad (3.7)$$

превратятся после деформации в точки, имеющие координаты

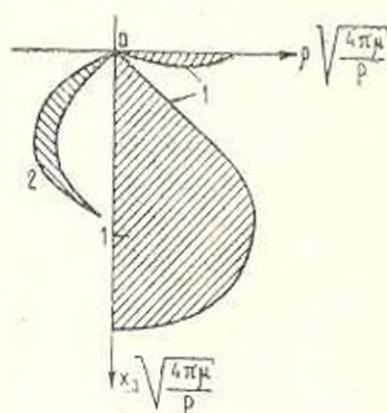
$$y_1 = ac, \quad y_2 = amc \quad (3.8)$$

В. Решение задачи Буссинеска о действии сосредоточенной силы P на границу упругого полупространства $x_3 \geq 0$ имеет вид [23]

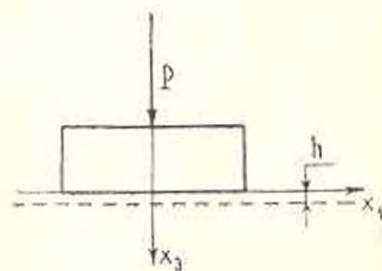
$$u_i = \frac{P}{4\pi\mu} \left[\frac{x_i x_3}{r^3} + \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \frac{\delta_{i3}}{r} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{x_i - x_3 \delta_{i3}}{r(x_3 + r)} \right] \quad (3.9)$$

где λ, μ — постоянные Ламе, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Если ввести цилиндрическую систему координат $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, φ, x_3 , то решение (3.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{P\varphi}{4\pi\mu} \left[\frac{2x_3}{r^3} - \frac{\mu}{(\lambda+\mu)(r+x_3)} \right] \\ u_3 &= \frac{P}{4\pi\mu} \left[\frac{x_3^2}{r^3} + \frac{\lambda+2\mu}{(\lambda+\mu)r} \right], \quad r = \sqrt{\rho^2 + x_3^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$



Фиг. 5.



Фиг. 6

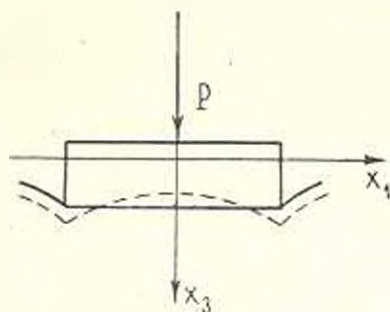
На фиг. 5 изображена «зона фiktивных деформаций» [10], представляющая собой тело вращения, которое образуется вращением плоской фиг. 1 вокруг оси Ox_3 , если $P > 0$, и фиг. 2, если $P < 0$. При этом

$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = 0,3$. «Зоной фiktивных деформаций» называется область,

в которой нарушается условие (1.7). Если некоторые точки A и B принадлежат этой зоне, причем $OA > OB$, то придавая физический смысл вектору перемещений, посчитанному по формулам (3.9) или (3.10), и вычисляя в соответствии с этим смыслом положение материальных точек A и B после деформации (обозначим это положение, соответственно A_1, B_1), мы получим после деформации $OA_1 < OB_1$.

Г. В работе [10] приводятся еще некоторые примеры появления «зон фиктивных деформаций». Например, на фиг. 6 изображено положение до внедрения кругового штампа с плоской подошвой в упругое полупространство $x_3 \geq 0$ силой P . Пунктиром изображена некоторая плоскость $x_3 = h$, достаточно близкая к плоскости $x_3 = 0$. На фиг. 7 показано как изменяется взаимное расположение плоскостей $x_3 = 0$ и $x_3 = h$ после внедрения штампа в поверхность. Из фиг. 7 видно, что почти вся плоскость контакта пронизывается поверхностью, в которую переходит плоскость $x_3 = h$.

Можно привести еще много примеров подобного рода из теории трещин, теории угловых особенностей в упругих телах и теории контактных задач. В частности, в работе [10] разъясняется парадокс, обнаруженный в [24] для плоской задачи о штампе, сцепленном с упругой полуплоскостью. При приближении к краям площадки контакта нормальное и тангенциальное напряжения бесконечное число раз меняют знак (осциллируют).



Фиг. 7

Разобранные выше примеры говорят лишь о том, что иногда существуют области, в которых вектор перемещений линейной теории упругости теряет физический смысл собственно «перемещения», но ни в коем случае не отрицают целесообразности рассмотрения таких задач.

4. Как уже было упомянуто, в случае конечных (больших) деформаций можно вводить бесчисленное число характеризующих их мер и тензоров, в то время как в случае малых деформаций рассматривается только один тензор (3.1). Аналогично, в случае малых деформаций рассматривается единственный тензор второго ранга σ , характеризующий напряженное состояние среды. В случае конечных деформаций можно вводить бесчисленное множество тензоров напряжений. Например, тензор

$$T = \rho^0 \vec{R}_i \otimes \vec{R}_i \quad (4.1)$$

где $\vec{R}_i$ —векторы базиса в деформированном состоянии, которые в недеформированном состоянии были $\vec{r}_i$

$$\vec{R}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^i}, \quad \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \quad (4.2)$$

Тензор T является симметричным и называется в [19] тензором Коши, в [16]—истинным тензором напряжений, а в [25]—тензором Лагранжа. Несимметричный тензор

$$\underline{P} = p^{(i)} \vec{r}_i \otimes \vec{R}_j = \sqrt{\frac{G}{g}} \nabla \vec{r}^i \cdot \underline{T} \quad (4.3)$$

где

$$G = \det \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^i} \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^j} \right|, \quad g = \det \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j} \right| \quad (4.4)$$

в [19] называется тензором Пиолы, в [16] — тензором обобщенных напряжений, а в [25] — тензором Лагранжа. Симметричный тензор

$$\underline{K} = \sqrt{\frac{G}{g}} p^{(i)} \vec{r}_i \otimes \vec{r}_j = \sqrt{\frac{G}{g}} \nabla \vec{r}^i \cdot \underline{T} \cdot \nabla \vec{r}^j = \underline{P} \cdot \nabla \vec{r}^j \quad (4.5)$$

называется тензором Кирхгоффа.

При написании выражения элементарной работы необходимо каждой мере деформации, рассматриваемой как обобщенное перемещение, поставить в соответствие некоторый тензор напряжений, рассматриваемый в качестве обобщенной силы. Например,

$$\delta A = \underline{P} : \delta \vec{\nabla} \vec{R}^2 \quad (4.6)$$

$$\delta a = \frac{1}{2} \underline{K} : \delta G = \underline{K} : \delta \underline{C} \quad (4.7)$$

или для мощности

$$\frac{\delta A^{(0)}}{\delta t} = \underline{T} : \underline{D}, \quad D_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \quad (4.8)$$

где v_i — компоненты вектора скорости $\vec{v}$.

Когда говорят о геометрически нелинейных и физически линейных соотношениях, то имеют в виду, что линейно связаны между собой соответствующие обобщенные силы и обобщенные перемещения. Даже из формул (4.6) — (4.8) видно, что, если эти соотношения будут линейными между одними обобщенными силами и перемещениями, то они будут, вообще говоря, нелинейными между другими обобщенными силами и перемещениями. Более того, наличие упомянутой линейной связи в «упругом» теле вовсе не означает, что существует не только квадратичный, но и вообще какой-либо упругий потенциал [19]. (Упругие тела, для которых существует такой потенциал, называются гиперупругими [18, 19, 25]).

Таким образом, в иерархии нелинейностей геометрическая нелинейность занимает более высокую ступень и уж если известно, что имеет место геометрическая нелинейность, то с необходимостью следует и наличие физической нелинейности. Пожалуй, единственным логически оправданным случаем использования понятия физической нелинейности при геометрической нелинейности является рассмотрение тонкостенных конструкций, в которых тензор малых деформаций связан линейно с тензором напряжений, но учитываются дополнительные

ные слагаемые в связи с учетом квадратичных членов, характеризующих повороты ω (1.10)

Очень странными выглядят попытки некоторых авторов обобщить нелинейную теорию упругости на вязкоупругий случай путем введения линейных интегральных операторов Вольтерры по времени. Оправдать такое введение можно, если бы этим авторам удалось описать хотя бы «нелинейную» модель, использующую «пружинки» и «поршеньки» [26] или дополнительные параметры, характеризующие реальное поведение материала [27].

5. Существуют материалы, в которых при малых деформациях проявляется нелинейная зависимость тензора напряжений от тензора деформаций. Такая нелинейность называется физической. Характерными представителями физически нелинейных материалов являются многие металлы, которые описываются теорией малых упругопластических деформаций при простом активном нагружении [28]. Эта теория нашла широкое применение на практике и дает вполне удовлетворительное согласие с результатами многих экспериментов. Геометрическая линейность такой теории позволяет пользоваться тензором малых деформаций, дать корректную постановку краевых задач (с доказательством существования и единственности решения), а также предложить эффективные методы для решения этих задач [28, 23].

В работе [19] дается критика физически нелинейной теории упругости на примере гиперупругого тела с потенциальной энергией Мурнагана. Рассмотрим этот пример для одномерного случая. И хотя в одномерном случае линейная мера деформации ε

$$\varepsilon = \frac{dx}{dx} \quad (5.1)$$

описывает произвольно большие деформации (в одномерном случае отсутствуют повороты и требуется описать только удлинение нитки), мы будем исходить из трехмерной теории, полагая, что имеется только одна компонента ε вектора перемещения, зависящая от одной координаты x .

Тогда единственная компонента тензора деформации Коши-Грина C (1.11) имеет вид:

$$C = \varepsilon^2 \frac{1}{2} \quad (5.2)$$

Для одномерного деформированного состояния упругий потенциал тела Мурнагана можно записать следующим образом:

$$W = \frac{a}{2} C^2 + \frac{b}{3} C^3 \quad (5.3)$$

где a, b — некоторые материальные постоянные.

Подсчитывая напряжение K , имеем

$$K = \frac{\partial W}{\partial C} = aC + bC^2 \quad (5.4)$$

Учитывая выражение (5.2) и сохраняя члены не более второго порядка относительно ε , получим

$$K \approx a\varepsilon + \left(\frac{a}{2} + b\right)\varepsilon^2 \quad (5.5)$$

В работе [19] предлагается для малых деформаций положить в (5.3) $C \approx \varepsilon$:

$$W \approx \frac{a}{2}\varepsilon^2 + \frac{b}{3}\varepsilon^3 \quad (5.6)$$

Тогда напряжение будет

$$K = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = a\varepsilon + b\varepsilon^2 \quad (5.7)$$

То есть отличается от (5.5) на слагаемое той же второй степени, что и учитываемые в (5.7).

Однако, подобное утверждение основано на недоразумении.

Прежде всего при линеаризации $C \approx \varepsilon$, следует записать из (5.3) вместо (5.6)

$$W(\varepsilon + \delta\varepsilon) = W(\varepsilon) + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon + \dots \quad (5.8)$$

где $\delta\varepsilon$ согласно (5.2) равно

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \quad (5.9)$$

Далее, напряжение должно быть посчитано по формуле (5.4)

$$K = \frac{\partial W}{\partial C} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial C} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial C} \left[\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} \delta\varepsilon + \frac{\partial^3 W}{\partial \varepsilon^3} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\delta\varepsilon) + \dots \right] \quad (5.10)$$

и, учитывая, что

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C} = \frac{1}{1+\varepsilon} \quad (5.11)$$

получим из (5.10), (5.9)

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{1+\varepsilon} \left[(a\varepsilon + b\varepsilon^2) + (a + 2b\varepsilon) \frac{\varepsilon^2}{2} + (a\varepsilon + b\varepsilon^2)\varepsilon + \dots \right] \approx \\ &\approx (1-\varepsilon) \left[a\varepsilon + b\varepsilon^2 + \frac{a}{2}\varepsilon^2 + a\varepsilon^3 + \dots \right] \approx a\varepsilon + \left(\frac{a}{2} + b\right)\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

что совпадает с (5.5).

Разумеется, физически нелинейная и геометрически линейная теория имеет право на существование, хотя следует проявлять необходимую осторожность при физической интерпретации вектора перемещений, что было обсуждено в первых трех пунктах.

Автор благодарен Н. Х. Арутюняну за предложение написать данную работу.

ON THE INTERRELATION BETWEEN GEOMETRICAL AND PHYSICAL NON-LINEARITY IN THE THEORY OF ELASTICITY AND ON THE SENSE OF THE DISPLACEMENT VECTOR

B. E. POBEDRIA

ԱՌԱՋԻՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԻՅՋ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԵՎ ԵՐԿՐԱԶԱՓԱԿԱՆ ՈՋ ԳԾԱՅՆՈՒԹՅԱՆ ՓՈԽԱԳԱՐՉ ԿԱՊԻ ԵՎ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵԿՏՈՐԻ ԻՄԱՍՏԻ ԻՄԱՍԻՆ

Р. Б. ПОБЕДРИА

Ա մ փ ո փ ո ի մ

Քննարկվում է այն հարցը, թե կարո՞ղ են գոյություն ունենալ երկրաչափորեն ոչ գծային, բայց ֆիզիկորեն գծային, ինչպես նաև ֆիզիկորեն ոչ գծային, բայց երկրաչափորեն գծային առաձգականության տեսություններ: Ցույց է տրվում, որ առաձգականության դասական տեսության դիպքում (երկրաչափորեն և ֆիզիկորեն գծային) առաձգականության վեկտորի սխալ մեկնարանումը կհանգեցնի որոշ պարագործիների:

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с конечными или угловыми точками.—Тр. Моск. матем. об-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
2. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи с частными производными в негладких областях.—Успехи матем. наук, 1983, т. 38, № 2, с. 3—76.
3. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений.—Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 2, с. 286—289.
4. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О принципе максимума для биармонического уравнения в области с конечными точками.—Изв. высш. учебн. завед., Математика, 1981, № 2, с. 52—59.
5. Арсенян В. А., Заргарян С. С. Численное решение плоских задач теории упругости для областей с углами.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1983, т. 36, № 1, с. 47—55.
6. Заргарян С. С. Об асимптотике решений системы сингулярных интегральных уравнений, порожденной уравнениями Ламе, в окрестности угловых точек контура.—Докл. АН АрмССР, 1983, т. 27, № 1, с. 30—34.
7. Беркун В. Б., Попов В. А. Исследование решений краевых задач теории упругости в окрестности сингулярных точек границы. Деп. в ВИНТИ 1983, № 640—83.
8. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин и острых вырезов. Инст. Проблем мех. АН СССР, Препринт № 193, 1982. 57 с.
9. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
10. Рвачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Кнел: Научная думка, 1977. 236 с.
11. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полов с упругими накладками. Ереван: изд-во ЕГУ, 1983. 260 с.
12. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.

13. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 160 с.
14. Глозински Р., Лионс Ж. Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
15. Колтунов М. А., Кравчук А. С., Майборода Н. И. Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высшая школа, 1983. 349 с.
16. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948.
17. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
18. Трусдепп К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
19. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
20. Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. 207 с.
21. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.
22. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
23. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. 344 с.
24. Абрамов В. М. Проблемы контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. Докл. АН СССР, 1937, т. 17, № 4, с. 173—178.
25. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 312 с.
26. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термомеханоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
27. Арутюнян Н. Х., Колмаковский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
28. Ильюшин А. А. Пластичность. М.—Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 376 с.

Ленинградский политехнический
институт им. М. И. Калинина

Поступила в редакцию
30.1.1985