

УДК 539.3

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕБРИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

БЕЛУБЕКЯН Э. В., ДАРБИНЯН А. Э.

На основе уточненной теории изгиба пластин [1] решается задача оптимизации длинной прямоугольной пластинки, изготовленной из композиционного материала, усиленной ребрами жесткости, под действием поперечной нагрузки. Принимая в качестве критерия оптимальности максимум несущей способности при неизменном весе, определяются оптимальные геометрические параметры конструкции при ограничении на ее прочность.

Рассматриваемая задача для изотропного и ортотропного материалов на основе классической теории решалась в работах [2, 3].

1. Пусть шарнирно опертая вдоль продольных кромок ($y=0$ и $y=b$) длинная пластинка ширины b подкреплена равноудаленными ребрами жесткости и подвергается действию поперечной нагрузки $q(y)$. Предполагается, что конструкция изготовлена из монослоев композиционного материала, в общем случае, имеющих различные упругие характеристики в ортогональных направлениях, что позволяет считать материал ортотропным.

Ставится задача определения значений: высоты ребра h_1 , отношения ширины ребра к его высоте 2α , толщины пластинки h_2 , расстояния между ребрами a , обеспечивающих наибольшую несущую способность пластинки при сохранении ее веса и ограничении на прочность.

Ввиду равноудаленности ребер решается задача прочности ортотропной пластинки размерами $a \times b$, шарнирно опертой вдоль кромок $y=0$ и $y=b$ и опертой вдоль кромок $x=\pm a/2$ на упругие балки.

Согласно уточненной теории изгиба пластин [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов, задача сводится к определению потенциальной функции $\Phi(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$\left[D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{22} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] \Phi - \frac{12}{h_2^3} \frac{h_2^2}{10} \left\{ a_{44} D_{11} D_{66} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \right. \\ \left. + [a_{11}(D_{11} D_{22} - 2D_{12} D_{66} - D_{12}^2) + a_{22} D_{11} D_{66}] \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + [a_{22}(D_{11} D_{22} - \right. \\ \left. - 2D_{12} D_{66} - D_{12}^2) + a_{11} D_{22} D_{66}] \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} \right\} \Phi = \frac{144}{h_2^3} q \quad (1.1)$$

и граничным условиям:

— шарнирного опирания:

$$w=0, M_y=0, \varphi=0 \text{ при } y=0 \text{ и } y=b \quad (1.2)$$

— симметрии:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0, N_x=0, H=0 \text{ при } x=0 \quad (1.3)$$

— упругого опирания на ребра жесткости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, E_1 J \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = - \left(N_x + \frac{\partial H}{\partial y} \right) + zh_1 q \\ \frac{h^2}{12} \varphi &= - \frac{1}{A} \left(E_1 J \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + H \right) \text{ при } x = \frac{a}{2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $D_{ik} = \frac{B_{ik} h_i^3}{12}$, $J = \frac{a h_1^3}{12}$, $A = a h_1^3$, $a_{41} = \frac{1}{G_{23}}$, $a_{35} = \frac{1}{G_{13}}$, B_{ik} — упругие характеристики монослоя композита по осям x и y пластинки, E_1 — модуль упругости композита по направлению ребра, G_{13} , G_{23} — модули сдвига по направлениям yz и xz .

Внутренние усилия M_x , M_y , H , N_x , N_y по известным формулам [1] выражаются через функции прогибов w и поперечного сдвига φ и ψ , которые в свою очередь выражаются через функцию $\Phi(x, y)$ по формулам:

$$\begin{aligned} w &= \left\{ \frac{h_1^3}{100} a_{41} a_{35} \left[D_{11} D_{66} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (D_{11} D_{22} - 2D_{12} D_{66} - D_{12}^2) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \right. \\ &+ \left. D_{22} D_{66} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] - \frac{h_2^3}{120} \left[(a_{35} D_{11} + a_{41} D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2} + (a_{41} D_{22} + a_{35} D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial y^2} \right] + \frac{h_1^3}{144} \Big\} \Phi \\ \varphi &= \left\{ \frac{h_1^3}{10} a_{14} \left[D_{11} D_{66} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (D_{11} D_{22} - 2D_{12} D_{66} - D_{12}^2) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \right. \right. \\ &+ \left. D_{22} D_{66} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right] - \frac{h_2^3}{12} \left[D_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right] \Big\} \Phi \\ \psi &= \left\{ \frac{h_2^3}{10} a_{35} \left[D_{22} D_{66} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (D_{11} D_{22} - 2D_{12} D_{66} - D_{12}^2) \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x^2} + \right. \right. \\ &+ \left. D_{11} D_{66} \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} \right] - \frac{h_2^3}{12} \left[D_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right] \Big\} \Phi \end{aligned} \quad (1.5)$$

Третье из граничных условий (1.4) выражает равенство деформаций поперечного сдвига e_{yz} пластинки и балки на линии $x=a/2$.

$z=0$ с учетом того, что для пластинки $e_{yz}|_{z=0} = a_{11} \frac{h_1^3}{8} \psi$, а для балки

$$e_{yz}|_{z=0} = - \frac{3}{2} \frac{a_{41}}{A} \left(E J \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + H \right)$$

Разлагая функцию нагрузки в ряд Фурье

$$q = \sum_1^{\infty} q_k \sin \lambda_k y, \quad \lambda_k = \pi k / b$$

решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), представляется в виде

$$\Phi = \sum_1^{\infty} \Phi_k(x) \sin \lambda_k y + \sum_1^{\infty} \frac{144 q_k \sin \lambda_k y}{h_2^3 k^3 \left(D_{22} \lambda_k^2 + \frac{6}{5 h_2} a_{55} D_{22} D_{66} \right)} \quad (1.6)$$

Подстановкой (1.6) в уравнение (1.1) для определения функции $\Phi_k(x)$ получается однородное дифференциальное уравнение

$$\Phi_k^{(VI)}(x) + C_1 \Phi_k^{(IV)}(x) + C_2 \Phi_k''(x) + C_3 \Phi_k(x) = 0 \quad (1.7)$$

где

$$C_1 = - \frac{D_{11} + \frac{6}{5 h_2} (a_{44} D_4 + a_{55} D_{11} D_{66}) \lambda_k^2}{\frac{6}{5 h_2} a_{11} D_{11} D_{66}}$$

$$C_2 = \frac{D_3 \lambda_k^2 + \frac{6}{5 h_2} (a_{55} D_4 + a_{11} D_{22} D_{66}) \lambda_k^4}{\frac{6}{5 h_2} a_{44} D_{11} D_{66}}$$

$$C_3 = - \frac{D_{22} \lambda_k^4 + \frac{6}{5 h_2} a_{55} D_{22} D_{66} \lambda_k^6}{\frac{6}{5 h_2} a_{11} D_{11} D_{66}}$$

$$D_3 = 2(D_{12} + 2D_{66}), \quad D_4 = D_{11} D_{22} - 2D_{12} D_{66} - D_{12}^2$$

В зависимости от корней характеристического уравнения (1.7) получаются 8 вариантов представления функции $\Phi_k(x)$, постоянные интегрирования и которых определяются удовлетворением условий (1.3) и (1.4).

2. Здесь для простоты приводится решение задачи для случая трансверсально-изотропной пластинки, то есть когда монослой, из которых составлен пакет пластинки, представляют собой композиты с хаотически армированными волокнами.

В этом случае, принимая

$$D_{11} = D_{22} = D = \frac{E h_2^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_{12} = \nu D, \quad D_{66} = \frac{1-\nu}{2} D, \quad a_{11} = a_{55} = \frac{1}{G}$$

для функции ω , φ , ψ получается

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{D} \sum_1^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k^3} \sin \lambda_k y + \sum_1^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \lambda_k x + B_k x \operatorname{sh} \lambda_k x) \sin \lambda_k y \\ \varphi &= - \frac{2E}{1-\nu^2} \sum_1^{\infty} B_k \lambda_k^2 \operatorname{sh} \lambda_k x \sin \lambda_k y - \frac{12}{h_2^3} \sum_1^{\infty} C_k \lambda_k^3 \operatorname{sh} \mu_k x \sin \lambda_k y \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\psi = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_1^{\infty} \frac{q_k}{D \lambda_k^3} \cos \lambda_k y - \frac{2E}{1-\nu^2} \sum_1^{\infty} B_k i_k \operatorname{ch} \lambda_k x \cos \lambda_k y - \frac{12}{h^3} \sum_1^{\infty} C_k \mu_k \operatorname{ch} \mu_k x \cos \lambda_k y$$

Здесь приняты обозначения

$$A_k = -\frac{q_k}{D} \frac{\alpha h_1}{\lambda_k^3} \frac{a_2 \lambda_1}{a_1 + a_2}, \quad B_k = \frac{q_k}{D} \frac{\alpha h_1}{\lambda_k^3} \frac{a_2}{a_1 + a_2}, \quad C_k = q_k \frac{\alpha h_1}{i_k} \left(a_3 - 2 \frac{a_2 a_4}{a_1 + a_2} \right)$$

$$a_3 = \frac{EJ}{D} \frac{i_k}{2} (\lambda_k a + \operatorname{sh} \lambda_k a) + 2 \operatorname{sh}^2 \frac{\lambda_k a}{2} \left(1 - 2 \frac{i_k^2}{\delta^2} \right) \\ \operatorname{sh} \lambda_k \frac{a}{2}$$

$$a_2 = 4 \frac{i_k^2}{\delta^2} \operatorname{sh} \mu_k \frac{a}{2} \frac{A_{1k} \operatorname{ch} \lambda_k \frac{a}{2} + h_2 \operatorname{sh} \lambda_k \frac{a}{2}}{A_{1k} \operatorname{ch} \mu_k \frac{a}{2} + h_2 \operatorname{sh} \mu_k \frac{a}{2}}$$

$$a_3 = (1-\nu^2) \frac{h_1^3}{h_2^3} - 1 + (h_1 - h_2) \frac{2 \frac{\lambda_k^2}{\delta^2} \operatorname{sh} \mu_k \frac{a}{2}}{A_{1k} \operatorname{ch} \mu_k \frac{a}{2} + h_2 \operatorname{sh} \mu_k \frac{a}{2}}$$

$$a_4 = \frac{\operatorname{sh} \lambda_k \frac{a}{2} + \lambda_k \frac{a}{2} \operatorname{ch} \lambda_k \frac{a}{2}}{\operatorname{sh} \lambda_k \frac{a}{2}}, \quad a_5 = \frac{h_1 - h_2}{A_{1k} \operatorname{ch} \mu_k \frac{a}{2} + h_2 \operatorname{sh} \mu_k \frac{a}{2}}$$

$$a_6 = 4 \frac{\delta^2}{i_k^2} \frac{a_2}{\operatorname{sh} \mu_k \frac{a}{2}}, \quad \lambda^2 = \frac{10}{h^2} \frac{G'}{G}, \quad \mu_k = \lambda_k \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{i_k^2}}$$

В общем случае условие прочности для пластинки из ортотропного композиционного материала принимается в виде

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{B1}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{B2}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\tau_{B0}} \right)^2 - \frac{\sigma_{11} \sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2} \leq 1 \quad (2.2)$$

где σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} — компоненты напряжений в наиболее опасных точках пластинки, σ_{B1} , σ_{B2} , τ_{B0} — прочностные характеристики композита. В случае трансверсально-изотропной пластинки $\sigma_{B1} = \sigma_{B2} = \sigma_B$, а напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_{11} = -2B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{z}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \frac{B}{G'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ \sigma_{22} = -zB \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{z}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \frac{B}{G'} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (2.3) \\ \tau_{12} = -2zG \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{z}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \frac{G}{G'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

Наиболее опасными для пластинки будут точки с координатами

$$x=0, y=\frac{b}{2}, z=\frac{h_2}{2} \text{ и } x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=\frac{h_2}{2}$$

Условие прочности ребра записывается в виде

$$\sigma_{y \max} \leq \sigma_p \quad (2.4)$$

где $\sigma_{y \max}$ — наибольшее напряжение в ребре, определяемое по формуле

$$\sigma_{y \max} = -E \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \text{ при } x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2} \quad (2.5)$$

Таким образом, вычислив напряжения в указанных наиболее опасных точках пластинки по формулам (2.3) и ребра по формуле (2.5), из условий прочности (2.2) и (2.4) получим три значения параметра нагрузки q_{01} , q_{02} и q_{03} .

Допускаемая несущая способность будет

$$q_0 = \min\{q_{01}, q_{02}, q_{03}\}$$

Поставленная задача оптимизации сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

найти

$$Q = \max_x q_0, \quad \bar{x} = \{\bar{h}_1, \bar{a}, \bar{h}_2, \bar{a}\} \quad (2.6)$$

при ограничениях:

$$\bar{a}(\bar{h}_0 - \bar{h}_2) = 2\bar{h}_1(\bar{h}_1 - \bar{h}_0) \quad (2.7)$$

$$\bar{h}_0 \leq \bar{h}_1 \leq 0,2; \quad \bar{h}_0 \leq \bar{h}_2 \leq \bar{h}_1; \quad \bar{a} \geq 5\bar{h}_2; \quad \bar{a} \geq 0,1 \quad (2.8)$$

Здесь $q_0 = q_0/\sigma_p$ — целевая функция, \bar{x} — вектор управления, $\bar{h}_1 = h_1/b$, $\bar{h}_2 = h_2/b$, $\bar{a} = a/b$, $\bar{h}_0 = h_0/b$, h_0 — толщина сплошной пластинки заданного веса.

Ограничение (2.7) соответствует условию постоянства веса конструкции. Ограничения (2.8) обусловлены пределами применимости использованной теории изгиба пластины и балок. Для $\bar{\delta}$ принимается: $\bar{\delta} = 0,01$ при $\bar{a} \geq b$ и $\bar{\delta} = 0,01\bar{a}$ при $\bar{a} < b$. Задача решается при помощи комплексного метода случайного поиска [4].

Числовые результаты получены для различных случаев анизотропии материала G/G' и приведенной толщины гладкой пластинки \bar{h}_0 . В расчетах принято $\alpha = 0,1$. Значения оптимальных параметров конструкции и соответствующие значения параметра несущей способности Q приведены в табл. 1. Случай $G/G' = 1$ соответствует изотропной пластинке, рассчитанной с учетом поперечных сдвигов.

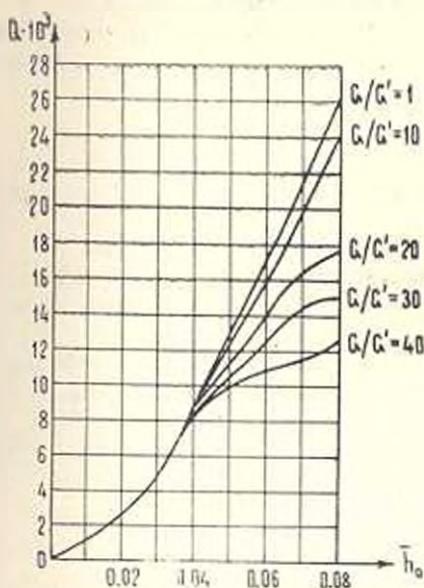
На графике (фиг. 1) приведена зависимость несущей способности оптимальной конструкции в зависимости от приведенной толщины соответствующей гладкой пластинки \bar{h}_0 для различных значений G/G' . Как видно из графика, для сравнительно малых толщин ($\bar{h}_0 \leq 0,04$)

влияние анизотропии практически не сказывается на величине Q . При увеличении же \bar{h}_0 значения Q существенно уменьшаются с увеличением значения G/G' . Очевидно, что в этих случаях учет поперечных сдвигов при расчете пластины необходим. Результаты расчета изотропной пластинки по классической теории здесь не приведены, так как они несущественно отличаются от случая $G/G'=1$.

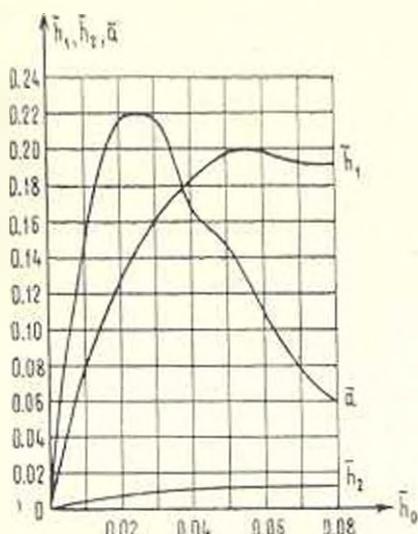
Таблица 1

G/G'	\bar{h}_0	\bar{h}_1	\bar{h}_2	\bar{a}	Q
1	0.01	0.0751	0.00381	0.1406	0.000846
	0.02	0.123	0.0071	0.2180	0.002501
	0.03	0.164	0.0100	0.2175	0.00497
	0.04	0.181	0.00998	0.1698	0.00830
	0.05	0.190	0.00970	0.1360	0.0131
	0.06	0.200	0.0107	0.1129	0.0170
	0.07	0.200	0.0100	0.0867	0.0213
	0.08	0.200	0.0101	0.068	0.0263
10	0.01	0.0750	0.00300	0.1405	0.000846
	0.02	0.1231	0.00700	0.2179	0.00250
	0.03	0.1638	0.0100	0.2174	0.00436
	0.04	0.183	0.0105	0.1650	0.0085
	0.05	0.198	0.0107	0.1469	0.0130
	0.06	0.198	0.0109	0.1129	0.0155
	0.07	0.190	0.0110	0.076	0.0199
	0.08	0.190	0.0119	0.0597	0.0243
20	0.01	0.0750	0.00305	0.1406	0.000849
	0.02	0.1250	0.00730	0.2201	0.002401
	0.03	0.1640	0.0100	0.2178	0.00494
	0.04	0.1780	0.0101	0.1671	0.0082
	0.05	0.200	0.01080	0.151	0.0126
	0.06	0.185	0.0121	0.1301	0.0131
	0.07	0.186	0.0121	0.0683	0.0166
	0.08	0.191	0.01402	0.065	0.0176
40	0.01	0.0751	0.00303	0.1406	0.000844
	0.02	0.127	0.00730	0.2200	0.00230
	0.03	0.1638	0.00990	0.2152	0.00499
	0.04	0.1720	0.0100	0.1686	0.00800
	0.05	0.192	0.0115	0.1541	0.0101
	0.06	0.195	0.014	0.121	0.0110
	0.07	0.200	0.0180	0.0861	0.0116
	0.08	0.195	0.016	0.0596	0.0120

На графике (фиг. 2) для одного из случаев анизотропии материала $G/G'=10$ показаны зависимости оптимальных геометрических характеристик конструкции от приведенной толщины гладкой пластинки \bar{h}_0 . Здесь характерно, что с увеличением \bar{h}_0 вначале увеличиваются все геометрические параметры пластинки, а затем толщины ребер \bar{h}_1 и пластинки \bar{h}_2 устанавливаются, приближаясь к значениям $\bar{h}_1=0,2$ и $\bar{h}_2=0,01$, постоянство же веса конструкции обеспечивается уменьшением межреберного расстояния \bar{a} .



Фиг. 1



Фиг. 2

Следует отметить, что ввиду двойственности поставленной задачи оптимального проектирования, по полученным результатам можно решить обратную задачу, то есть по заданной нагрузке определить конструкцию минимального веса. Для этого из графика на фиг. 1 по заданному параметру несущей способности Q определяется соответствующая толщина гладкой пластинки \bar{h}_0 , через которую по графику на фиг. 2 определяются оптимальные параметры конструкции \bar{h}_1 , \bar{h}_2 и \bar{a} .

ANALYSIS OF AN OPTIMAL RIBBED PLATE OF COMPOSITE MATERIAL WITH REGARD TO TRANSVERSE SHEARS

E. V. BELYBEKIAN, A. Z. DARBINIAN

ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԿՈՎԱՎՈՐՎԱԾ ՕՊՏԻՄԱԼ ՍԱԼԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ, ՈՐՏԵՂ ՀԱՇՎԻ Է ԱՌՆՎԱԾ ԸՆԴՆԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԵՐԸ

Է. Վ. ԲԵԼՅԵԿԻԱՆ, Ա. Զ. ԴԱՐԲԻՆԻԱՆ

Ո. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Սալերի ծոման ճշգրտված տեսության հիման վրա դիտարկվում է կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված և կոշտության կողերով ուժեղացված նորմալ բեռի ազդեցության սակ դտնվող երկար ուղղանկյուն սալի նախազոման խընդիրը:

Հաշվի առնելով կողերի և նրանց միջև գտնվող սալերի ամրության վրա
դրված սահմանափակումները, որոշվում են կոնստրուկցիայի երկրաչափական
պարամետրերը, որոնք ապահովում են նրա մաքսիմալ կրողունակությունը
անփոփոխ կշռի դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 534 с.
2. Белубекян Э. В., Дарбинян А. Э. Проектирование оптимальной длинной ребристой пластинки В межвузовском сб.: Инженерные проблемы строительной механики. Ереван: 1985, с. 77—81.
3. Белубекян Э. В., Дарбинян А. Э. Оптимальное ребрирование длинной пластинки, изготовленной из композиционного материала.—Докл. АН Арм. ССР, 1986, т. 32, № 5, с. 214—217.
- 1 Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование М.: Мир, 1975. 266 с.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
14.1.1987