

УДК 532.516

О РАЗВИТИИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ  
 МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ДВИЖУЩИМИСЯ  
 ПЛОСКОСТЯМИ

БАБАДЖАНИАН Г. А. МНАЦАКАНИАН Р. Ж.

1. За последние годы опубликован ряд работ [1], [2], [3], в которых рассматривается взаимодействие потока жидкости или газа с подвижными поверхностями. Имеется много актуальных приложений этих исследований в современной технике.

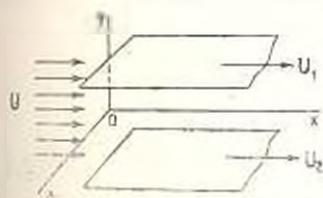
Скольжение поверхностей относительно обтекающего потока имеет место в различных процессах, так например, при непрерывной обработке листовых материалов в металлургии, в химической технологии, при пленочном или завесном охлаждении и т. д.

В большинстве вышеперечисленных работ теоретические исследования закономерности движения у подвижных поверхностей проводились в приближении пограничного слоя. Эти исследования ограничивались, в основном, для стабилизированной области течения.

Изучение развития течения жидкости или газа между подвижными поверхностями имеет большое теоретическое и практическое значение.

Рассмотрим задачу о развитии течения жидкости между параллельными движущимися плоскостями, простирающимися в направлениях осей  $x$  и  $z$  до бесконечности (фиг. 1). Движение плоскостей происходит в своих плоскостях. Обе плоскости движутся или по положительному или по отрицательному направлению оси  $Ox$  с заданными постоянными скоростями  $U_1$  и  $U_2$ . Между плоскостями движется жидкость, для которой на входе в канал формулируется плоский однородный профиль скорости.

Если предположить вязкую жидкость несжимаемой, движение ее ламинарным, стационарным, изотермическим и плоскопараллельным, то при отсутствии массовых сил приближенные уравнения с частичным учетом слагаемых от вязкости и ускорения будут иметь вид [4]



Фиг. 1

$$U \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

В этой системе уравнений  $U$  есть средняя расходная скорость основного потока по сечению в начале трубы,  $v_x$

и  $v_y$  — соответствующие скорости по осям  $OX$  и  $OY$ ,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Пусть расстояние между плоскостями будет  $2h$ .

Если начало оси  $OY$  возьмем на средней линии между плоскостями, то граничные условия для задачи о развитии течения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad v_x=U=\text{const}, \quad p=p_0 \\ \text{при } y=h \quad x>0 \quad v_x=U_1, \quad v_y=0 \\ \text{при } y=-h \quad x>0 \quad v_x=U_2, \quad v_y=0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $p_0$  — значение давления в начале трубы.

Если ввести новые переменные

$$z = \frac{x}{h}, \quad \zeta = \frac{y}{h}, \quad u = \frac{v_x - U}{U}, \quad v = \frac{v_y}{U}, \quad p = \frac{p - p_0}{\rho U^2}$$

то система уравнений (1.1) и граничные условия (1.2) примут следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{при } z=0 \quad u=0, \quad p=0$$

$$\text{при } y=1 \quad z>0 \quad u = \frac{U_1 - U}{U}, \quad v=0 \quad (1.4)$$

$$\text{при } y=-1 \quad z>0 \quad u = \frac{U_2 - U}{U}, \quad v=0$$

В системе уравнений (1.3)  $\text{Re} = Uh/\nu$  — число Рейнольдса.

2. Уравнение (1.3) при граничных условиях (1.4) решаем с помощью операционного исчисления. Если воспользоваться функциональным преобразованием Лапласа, из (1.3) и (1.4) для искомых функций  $v_x$ ,  $v_y$  и  $p$  получим следующие значения:

$$\begin{aligned} v_x = \frac{3U}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) + \frac{U_1 + U_2}{4} \left(\frac{3y^2}{h^2} - 1\right) + \frac{U_1 - U_2}{2h} y + \\ + (U_1 + U_2 - 2U) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left(1 - \frac{\cos \mu_n y/h}{\cos \mu_n}\right) \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\text{Re}h} x\right) + \\ + \frac{U_2 - U_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \pi n y/h}{n} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}h} x\right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} v_y = \frac{(U_1 + U_2 - 2U)}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{h} - \frac{\sin \mu_n y/h}{\sin \mu_n}\right) \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\text{Re}h} x\right) - \\ - \frac{U_1 - U_2}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n \cos \pi n y/h - 1] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}h} x\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$p = p_0 + \delta U^2 \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U}\right) \left[-\frac{3x}{\text{Re}h} - \frac{1}{5} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\text{Re}h} x\right)\right] \quad (2.3)$$

где  $\mu_n$  — простые корни уравнения  $\operatorname{tg} \mu = \mu$ .

Найдем значение силы трения

$$\begin{aligned} \tau = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \mu \left[ -\frac{3U}{h^2} y + \frac{3}{2} \frac{U_1 + U_2}{h^2} y + \frac{U_1 - U_2}{2h} + \right. \\ \left. + (U_1 + U_2 - 2U) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n y/h}{h \sin \mu_n} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \frac{U_1 - U_2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \pi n y/h \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) - \frac{U_1 + U_2 - 2U}{\operatorname{Re}^2 h} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{h} - \frac{\sin \mu_n y/h}{\sin \mu_n}\right) \mu_n^2 \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \right. \\ \left. + \frac{\pi^2 (U_1 - U_2)}{\operatorname{Re}^2 h} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [(-1)^n \cos \pi n y/h - 1] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) \right] \end{aligned}$$

3. Проведем анализ полученных результатов.

I. Если в формулах (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4) подставить  $U_1 = U_2 = 0$ , получим результаты работы [4].

II. На бесконечном удалении от начала трубы, то есть для стабилизированного участка течения значения искомых величин будут:

$$v_{x \rightarrow \infty} = \frac{3U}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) - \frac{U_1 + U_2}{4} \left(1 - \frac{3y^2}{h^2}\right) + \frac{U_1 - U_2}{2h} y, \quad v_{y \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.1)$$

$$p_x = p_H - \rho U^2 \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U}\right) \left(\frac{3x}{\operatorname{Re} h} + \frac{1}{5}\right) \quad (3.2)$$

$$\tau_x = \mu \left(-\frac{3U}{h^2} y - \frac{3}{2} \frac{U_1 + U_2}{h^2} y + \frac{U_1 - U_2}{2h}\right) \quad (3.3)$$

III. Из формул (3.1), (3.2) и (3.3) видно, что результаты, полученные для стабилизированного участка в случае, когда исходные уравнения движения принимаются в виде (1.1), отличаются (уточняются) от результатов для этого же участка, когда за исходные уравнения движения принимались уравнения Стокса [5].

IV. Из (2.4) можно найти силы трения на стенках

$$\begin{aligned} \tau_{y=h} = \mu \left[ -\frac{3U}{h} + \frac{3}{2} \frac{U_1 + U_2}{h} + \frac{U_1 - U_2}{2h} + \right. \\ \left. + \frac{U_1 + U_2 - 2U}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \frac{U_1 - U_2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) \right] \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{y=-h} = \mu \left[ \frac{3U}{h} - \frac{3}{2} \frac{U_1 + U_2}{h} + \frac{U_1 - U_2}{2h} - \right. \\ \left. - \frac{U_1 + U_2 - 2U}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \frac{U_1 - U_2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) \right] \quad (3.5) \end{aligned}$$

Для стабилизированного участка силы трения на стенках будут

$$\tau_{y=h} = \frac{\mu}{h} (2U_1 + U_2 - 3U), \quad \tau_{y=-h} = \frac{\mu}{h} (-U_1 - 2U_2 + 3U) \quad (3.6)$$

V. Из формул (3.4), (3.5) получим значение силы трения для неподвижных стенок, если подставить  $U_1=U_2=0$

$$\tau_{y=h} = -\frac{\mu U}{h} \left[ 3 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{v_n^2}{\text{Re}} x\right) \right] \quad (3.7)$$

$$\tau_{y=-h} = \frac{\mu U}{h} \left[ 3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{v_n^2}{\text{Re}h} x\right) \right] \quad (3.8)$$

Из (3.7) и (3.8) видно, что в случае неподвижных стенок значение силы трения в начальном участке больше значения силы трения в стабилизированном участке.

VI. При подвижных стенках значение силы трения, как в стабилизированном участке, так и в начальном участке, зависят от значений скоростей стенок. Так, например, если  $2U_1 - U_2 = 3U$ , то значение силы трения в стабилизированном участке на верхней стенке равно нулю, а если  $U_1 + 2U_2 = 3U$ , то на нижней стенке равно нулю. Полученные результаты показывают, что выбором скоростей основного потока и плоскостей, можно изменить распределения скоростей, давлений и силы трения в потоке и на стенках.

## ON THE DEVELOPMENT OF THE VISCOUS LIQUID FLOW BETWEEN PARALLEL MOVING PLANES

G. A. BABADJANYAN, R. ZH. MNATSAKANYAN

### ՀԱՐՔՎՈՂ ԶՈՒԳԱԼՆԵՐ ԶԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵՋԵՎ ՄԱՍՈՒՅՐԿ ԸՆԿՈՒԿՈՒ ՀԱՐՔՄԱՆ ԶԱՐԳԱՅՈՒՄԸ

Գ. Ա. ԲԱԲԱԶՅԱՆԱՆ, Թ. Ժ. ՄՆԱՏԱԿԱՆՅԱՆ

#### Ա Ն Փ Ո Փ Ո Ս Տ Վ

Կտնված են արագության, ճնշման և շիժան ուժի փոփոխման օրենքները սկզբնական և հաստատված հատվածներում:

Ցույց է տրված, որ հիմնական հոսքի և շարժվող հարթությունների արագությունների ընտրությամբ կարելի է դեկավարել արագությունների, ճնշման և շիժան ուժի բաշխումը հոսանքում և պատերի վրա:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Актышев И. А., Жубрин С. В., Мотулевич В. П., Анализ течения в канале с движущейся стенкой. — ИФЖ, 1985, т. 48, № 4, с. 592—597.
2. Бектурганов Е., Джаугаштин К. Е., Сакинов З. Б., Ярин А. Т. Струйное обтекание движущейся поверхности. — Изв СО АН СССР, сер техн наук, 1981, № 3, вып 1, с. 33—41.

3. Черный Г. Г. Пограничный слой на движущейся поверхности. — В кн.: Избранные проблемы прикладной механики М.: Наука, 1974, с. 99—104.
4. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений М.: Гостехиздат, 1951, 420 с.
5. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости М.: Гостехиздат, 1955, 519 с.

Ереванский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
8.XII 1986