

УДК 539.376

# ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

ЦВЕЛОДУБ Н. К)

1. Рассмотрим односвязное тело объема  $v$  с поверхностью  $S$ , для которого полные деформации  $\epsilon_{kl}$  складываются из упругих, подчиняющихся закону Гука, и деформаций ползучести  $\epsilon_{kl}^p$

$$\epsilon_{kl} = \sigma_{klmn} \sigma_{mn} + \epsilon_{kl}^p \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

где  $\sigma_{kl}$  — компоненты тензора напряжений,  $\sigma_{klmn} = \sigma_{mnlk}$  — компоненты тензора упругих податливостей, суммирование по повторяющимся индексам производится от 1 до 3. Компоненты полной деформации предполагаются малыми и выражающимися через компоненты вектора перемещений известными соотношениями Коши,

Материал тела считаем неупрочняющимся в процессе ползучести, так что скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\gamma}_{kl}$  (точка здесь и в дальнейшем обозначает дифференцирование по времени) являются функциями только напряжений

$$\dot{\gamma}_{kl} = \dot{\gamma}_{kl}(\sigma_{mn}) \quad (k, l, m, n = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

Функции (1.2) предполагаются дифференцируемыми и для бесконечно малых приращений  $\delta\sigma_{kl}$  и соответствующих им приращений  $\delta\dot{\gamma}_{kl}$ , удовлетворяющими неравенству

$$\delta\sigma_{kl} \delta\dot{\gamma}_{kl} \geq 0 \quad (1.3)$$

выражающему известный постулат устойчивости Друккера для вязких деформаций.

Сформулируем задачу о деформировании исходного тела в заданное: какие перемещения нужно мгновенно сообщить поверхности тела (считаем, что массовые силы отсутствуют) в момент времени  $t=0$ , чтобы, оставляя их фиксированными в течение времени  $t_0$ , в момент  $t=t_0$  после снятия внешних нагрузок и соответствующей упругой разгрузки получить заданные значения остаточных перемещений  $u_k = u_{k\text{ост}}$  на  $S$ ? При этом предполагаем, что при  $t < 0$  тело находилось в естественном недеформированном состоянии.

Можно доказать, что если решение такой релаксационной задачи для тела, определяющие уравнения деформирования которого имеют вид (1.1), (1.2) с дополнительным ограничением (1.3), существует, то для сжимаемого при ползучести тела ( $\gamma_{kk} \neq 0$ ) оно будет единственным по напряжениям при  $0 \leq t \leq t_0$ ; соответствующие перемещения могут

33

отличаться только на величину смещения тела как жесткого целого. Для несжимаемого при ползучести тела ( $\gamma_{kk}=0$ ) два решения для поля напряжений при  $0 \leq t \leq t_*$  могут отличаться только на величину произвольного постоянного во всем объеме и во времени гидростатического давления, причем этого произвола не будет, если на части поверхности известны внешние нагрузки или одна из диагональных компонент тензора напряжений (как, например, в случае плоского напряженного состояния).

Доказательство этого утверждения вполне аналогично представленным в [1, 2] для подобных задач, поэтому здесь не приводится.

2. Рассмотрим частный случай указанной релаксационной задачи, когда тело представляет собой изотропную толстую пластинку и можно говорить о плоском напряженном состоянии. Как отмечалось выше, решение такой задачи будет единственным. Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы плоскость  $Oxy$  совпала с срединной плоскостью пластинки. В качестве (1.2) возьмем общепринятые однородные степени  $n$  функции [3]. Тогда для скоростей полных деформаций будем иметь

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_x - \nu \dot{\sigma}_y) + B \sigma_1^{n-1} \frac{2\sigma_x - \sigma_y}{2}; \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_y - \nu \dot{\sigma}_x) + B \sigma_1^{n-1} \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{2} \quad (2.1)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{xy} + B \sigma_1^{n-1} \frac{3}{2} \sigma_{xy}$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $B, n$  — константы ползучести,  $\sigma_1 = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_{xy}^2}$  — интенсивность напряжений. В дальнейшем считаем, что  $n > 1$ , что обеспечивает выполнимость (1.3) [1, 2].

Предположим, что после деформирования в течение времени  $t_*$  и последующего снятия внешних нагрузок перемещения  $u_x, u_y$  точек границы  $L$  должны иметь вид:

$$u_x = c[x + \delta u_{x1}(x, y) + \delta^2 u_{x2}(x, y) + \dots], \quad u_y = c[y + \delta u_{y1}(x, y) + \delta^2 u_{y2}(x, y) + \dots] \quad (2.2)$$

где  $c, \delta$  — константы,  $0 < \delta < 1$ , то есть могут быть представлены в виде рядов по степеням малого параметра  $\delta$ . Для определенности положим  $c > 0$ .

Для решения этой задачи может быть применен метод возмущений [4]. Так при  $\delta = 0$  условия (2.2) соответствуют однородному деформированному состоянию, вызванному равномерным растяжением по осям  $x$  и  $y$ . Решение для этого нулевого приближения может быть получено в замкнутом виде.

Действительно, при  $0 \leq t \leq t_*$  положим:  $u_x = c_0 x, u_y = c_0 y$  на  $L$ , где  $c_0 > 0$  — неизвестная константа. Тогда, очевидно, в пластине будем иметь однородное напряженно-деформированное состояние:  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = c_0$ ,

$\varepsilon_{xy} = 0$ ,  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0(t)$ ,  $\sigma_{xy} = 0$  при  $0 < t < t_*$ , причем при  $t = 0$   $\sigma_0(0) = \frac{E}{1-\nu} c_0$ . Функцию  $\sigma_0 = \sigma_0(t)$  определяем из условия:  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ , то есть, как следует из (2.1),  $\frac{1-\nu}{E} \sigma_0 + \frac{B}{2} \sigma_0^n = 0$ , откуда с учетом начального условия получим

$$\sigma_0(t) = \frac{E}{1-\nu} \left[ c_0^{1-n} + \frac{B(n-1)}{2} \left( \frac{E}{1-\nu} \right)^n t \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (2.3)$$

При  $t = t_*$  после снятия внешних нагрузок для остаточных деформаций будем иметь  $\varepsilon_{x02} = \varepsilon_{y02} = c_0 - \frac{1-\nu}{E} \sigma_0(t_*)$ . Эта величина в силу граничных условий (2.2) для нулевого приближения должна равняться  $c$ , следовательно, из (2.3) найдем

$$c_0 - \left[ c_0^{1-n} + \frac{B(n-1)}{2} \left( \frac{E}{1-\nu} \right)^n t_* \right]^{\frac{1}{1-n}} = c \quad (2.4)$$

Легко видеть, что уравнение (2.4) относительно  $c_0$  имеет только один корень, причем  $c < c_0 < c + \left[ \frac{B(n-1)}{2} \left( \frac{E}{1-\nu} \right)^n t_* \right]^{\frac{1}{1-n}}$ .

Для нахождения последующих приближений все напряжения, перемещения и деформации при  $0 < t < t_*$  представляем в виде рядов по степеням  $\delta$ . Используя обычную методику [4], из (2.1) для скоростей полных деформаций  $k$ -ого приближения получим

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{xk} &= \frac{\partial \dot{u}_{xk}}{\partial x} = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_{xk} - \nu \dot{\sigma}_{yk}) + \frac{B\sigma_0^{n-1}}{4} (n+3)(\sigma_{xk} - \nu_1 \sigma_{yk}) + \eta_{x0k} \\ \dot{\varepsilon}_{yk} &= \frac{\partial \dot{u}_{yk}}{\partial y} = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_{yk} - \nu \dot{\sigma}_{xk}) + \frac{B\sigma_0^{n-1}}{4} (n+3)(\sigma_{yk} - \nu_1 \sigma_{xk}) + \eta_{y0k} \\ \dot{\varepsilon}_{xyk} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_{yk}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_{xk}}{\partial y} \right) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xyk} + \frac{B\sigma_0^{n-1}}{4} (n+3)(1+\nu_1) \sigma_{xyk} + \eta_{xy0k} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\nu_1 = \frac{3-n}{3+n} \left( -1 < \nu_1 < \frac{1}{2} \right)$ ,  $\eta_{x0k}$ ,  $\eta_{y0k}$ ,  $\eta_{xy0k}$  — функции координат и времени, зависящие от компонент напряжений не выше  $k-1$  приближения. Так для первого приближения  $\eta_{x01} = \eta_{y01} = \eta_{xy01} = 0$ , для второго

$$\begin{aligned} \eta_{x02} &= \frac{B\sigma_0^{n-2}}{16} (n-1) [(n+9)\sigma_{x1}^2 + (n-3)\sigma_{y1}(\sigma_{x1} + 2\sigma_{y1}) - 12\sigma_{xy1}^2] \\ \eta_{y02} &= \frac{B\sigma_0^{n-2}}{16} (n-1) [(n+9)\sigma_{y1}^2 + (n-3)\sigma_{x1}(\sigma_{x1} + 2\sigma_{y1}) + 12\sigma_{xy1}^2] \\ \eta_{xy02} &= \frac{3B\sigma_0^{n-2}}{4} (n-1) \sigma_{xy1}(\sigma_{x1} - \sigma_{y1}) \end{aligned}$$

В дальнейшем индексы „k" в (2.5) всюду опустим, считая функции  $\eta_{10}$ ,  $\eta_{x0}$ ,  $\eta_{xy0}$  известными для каждого рассматриваемого приближения.

Получим общие выражения для напряжений и перемещений при  $0 \leq t < t_*$ . Для этого введем функцию напряжений  $\Phi = \Phi(x, y, t)$ , так что [5]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5), (2.6) в известное уравнение совместности скоростей деформаций и учитывая (2.3), получим

$$\Delta \Delta \Phi - (a + bt)^{-1} \Delta \Delta \Phi = F_0(x, y, t) \quad (2.7)$$

где  $\Delta \Delta$  — бигармонический оператор,  $a = \frac{4c_0^{1-n}(1-\nu)^{n-1}}{Bl^{2n}(n+3)}$ ,  $b = \frac{2(n-1)}{(1-\nu)(n+3)}$ ,

$$F_0 = E \left( 2 \frac{\partial^2 \eta_{xy0}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \eta_{y0}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta_{x0}}{\partial y^2} \right).$$

Интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение (2.7) (относительно  $\Delta \Delta \Phi$ ) по времени и учитывая, что при  $t=0$   $\Delta \Delta \Phi = 0$  (что соответствует упругому распределению напряжений), найдем

$$\Delta \Delta \Phi = (a + bt)^{-1/b} \int_0^t (a + bt)^{1/b} F_0 dt \quad (2.8)$$

Предполагая, что функции  $\eta_{x0}$ ,  $\eta_{y0}$ ,  $\eta_{xy0}$  при любом  $0 \leq t < t_*$  являются аналитическими в занятой пластиной области плоскости и переходя к комплексным переменным  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ , (2.8) можно представить в форме

$$16 \frac{\partial^4 V}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = -E(a + bt)^{-1/b} \int_0^t (a + bt)^{1/b} \left( \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 l}{\partial z \partial \bar{z}} \right) dt \quad (2.9)$$

$$\text{где } V(z, \bar{z}, t) = \Phi \left( \frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}, t \right), \quad \epsilon = \int_0^t (\eta_{y0} - \eta_{x0} + 2i\eta_{xy0}) dt, \quad \bar{\epsilon} =$$

$$= \int_0^t (\eta_{y0} - \eta_{x0} - 2i\eta_{xy0}) dt, \quad l = \int_0^t (\eta_{x0} + \eta_{y0}) dt. \quad (\text{При указанной замене все}$$

аналитические функции переменных  $x$  и  $y$  аналитически продолжаются в область комплексных значений при подстановке:  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ,

$y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ , при этом  $z$  и  $\bar{z}$  считаются независимыми комплексными

переменными. Законность такой замены и соответствующих операций доказана в [6]).

Общее решение (2.9) запишем в виде

$$V = V_0(z, \bar{z}, t) + V_1(z, \bar{z}, t) + V_2(z, \bar{z}, t) \quad (2.10)$$

где  $V_0 = -\frac{E}{16} (a+bt)^{-1/2} \int_0^t (a+bt)^{1/2} (\dot{F} + \bar{\dot{F}} + 2\dot{a}) dt$ ,  $F = \int_0^t \left( \int_0^{\bar{z}} z dz \right) dz$

$\bar{F} = \int_0^{\bar{z}} \left( \int_0^z \bar{z} d\bar{z} \right) d\bar{z}$ ,  $Q = \int_0^z \left( \int_0^{\bar{z}} t d\bar{z} \right) dz$ , а функции  $V_1$  и  $V_2$  — бигармоничны, то есть  $V_i = \frac{1}{2} [z\varphi_i(z, t) + \bar{z}\bar{\varphi}_i(\bar{z}, t) + \chi_i(z, t) + \bar{\chi}_i(\bar{z}, t)]$  ( $i=1, 2$ )

[5], причем последние выбираются таким образом, что сумма  $V_0 + V_1$  соответствует решению, дающему нулевые нагрузки на  $L$  в любой момент  $t$ :  $0 \leq t \leq t_*$ , а  $V_2$  — решению задачи теории упругости с заданными граничными условиями, зависящими от времени. Введем обозначения:  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ,  $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2$ , где  $\varphi_i = \chi_i$  ( $i=1, 2$ ), штрих обозначает дифференцирование по  $z$ .

Компоненты напряжений определяются из соотношений (2.6), которые в переменных  $z, \bar{z}$  можно записать как

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 4 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (2.11)$$

Определим компоненты перемещений и их скоростей при  $0 \leq t \leq t_*$ , для чего из первого уравнения (2.5) вычтем второе и прибавим третье, умноженное на  $2i$ . Получившееся равенство с введением комплексного перемещения  $\bar{w} = u_x + iu_y$  и с учетом (2.3), (2.11) можно представить в виде

$$2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{4(1-\nu)}{E} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{4(1-\nu_1)}{E(a+bt)} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{2}$$

откуда

$$\bar{w} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} - \frac{2(1+\nu_1)}{E(a+bt)} \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \int_0^{\bar{z}} z d\bar{z} + f_1(z, t) \quad (2.12)$$

Неизвестную функцию  $f_1 = f_1(z, t)$ , входящую в (2.12), определим из условия удовлетворения сумме первых двух уравнений (2.5), которую можно записать в форме

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = \frac{4(1-\nu)}{E} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{4(1-\nu_1)}{E(a+bt)} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} + i \quad (2.13)$$

Подставляя (2.12) и аналогичное представление для  $\bar{w}$  в (2.13) и учитывая выражение (2.10) для  $V$ , получим  $f_1 = \frac{4}{E} \left( \dot{\varphi} + \frac{\varphi'}{a+bt} \right) =$

$= - \left[ f_1 - \frac{4}{E} \left( \bar{\varphi} + \frac{\bar{\varphi}}{a+bt} \right) \right]$ , что возможно только при  $f_1 = \frac{4}{E} \left( \varphi + \frac{\varphi}{a+bt} \right) = ic_1(t)$ ,  $c_1(t)$  — действительная функция, откуда  $f_1(z, t) = \frac{4}{E} \left( \varphi + \frac{\varphi}{a+bt} \right) + ic_1(t)z + c_2(t)$ ,  $c_2(t)$  — комплексная функция. Отбрасывая в выражении для  $f_1$  члены  $ic_1z + c_2$ , дающие только жесткое смещение, и учитывая (2.10), (2.12), после некоторых упрощений найдем

$$\begin{aligned}
 w = & - \frac{2(\nu_1 - \nu)}{E} (a+bt)^{-1/2} \frac{\partial V_0}{\partial z} + \frac{1+\nu}{8} \frac{\partial}{\partial z} (F - \alpha \bar{F} + 2\alpha) + \\
 & + \frac{1+\nu}{E} (\alpha \bar{\varphi} - z \bar{\varphi}' - \bar{\varphi}) + \frac{1+\nu_1}{E(a+bt)} (\alpha_1 \bar{\varphi} - z \bar{\varphi}' - \bar{\varphi}), \quad \alpha = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \alpha_1 = \frac{3-\nu_1}{1+\nu_1}
 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Интегрируя (2.14) по времени от 0 до  $t$  и приводя некоторые выкладки, получим

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{\nu_1 - \nu}{8} (a+bt)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^t (a+bt)^{1/2-1} (F + \bar{F} + 2\alpha) dt + \frac{1+\nu}{8} \frac{\partial}{\partial z} \times \\
 & \times (F - \alpha \bar{F} + 2Q) + \frac{1+\nu}{E} (\alpha \bar{\varphi} - z \bar{\varphi}' - \bar{\varphi}) + \frac{1+\nu_1}{E} \int_0^t \frac{\alpha_1 \bar{\varphi} - z \bar{\varphi}' - \bar{\varphi}}{a+bt} dt
 \end{aligned} \quad (2.15)$$

В (2.15) учтено, что при  $t=0$   $F = \bar{F} = Q = 0$ .

После разгрузки при  $t=t_*$  будем иметь выражения для остаточных напряжений и перемещений, получающиеся из (2.10), (2.11), (2.15) путем вычитания членов, соответствующих значениям функций  $\varphi_2 = \varphi_2(z, t)$  и  $\bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_2(z, t)$  в этот момент времени. Так для остаточных перемещений найдем

$$\begin{aligned}
 w_{\text{ост}} = & g_1(z, \bar{z}) + \frac{1+\nu_1}{E} \int_0^{t_*} \frac{\alpha_1 \bar{\varphi}_2 - z \bar{\varphi}_2' - \bar{\varphi}_2}{a+bt} dt \\
 g_1(z, \bar{z}) = & \frac{\nu_1 - \nu}{8} (a+bt_*)^{-1/2} \int_0^{t_*} (a+bt)^{1/2-1} \frac{\partial}{\partial z} (F + \bar{F} + 2Q) dt + \frac{1+\nu}{8} \frac{\partial}{\partial z} \times \\
 & \times (F - \alpha \bar{F} + 2Q)|_{t=t_*} + \frac{1+\nu}{E} (\alpha \bar{\varphi}_1 - z \bar{\varphi}_1' - \bar{\varphi}_1)|_{t=t_*} + \frac{1+\nu_1}{E} \int_0^{t_*} \frac{\alpha_1 \bar{\varphi}_1 - z \bar{\varphi}_1' - \bar{\varphi}_1}{a+bt} dt
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из общих соотношений (2.10), (2.14), (2.16) очевидна последовательность решения исходной релаксационной задачи для любого приближения. По известным значениям  $\varepsilon = \varepsilon(z, \bar{z}, t)$ ,  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(z, \bar{z}, t)$ ,  $\dot{I} = \dot{I}(z, \bar{z}, t)$  находятся  $\dot{F}$ ,  $\dot{\bar{F}}$ ,  $\dot{Q}$ ,  $F$ ,  $\bar{F}$ ,  $Q$ , являющиеся функциями тех

же переменных  $z$ ,  $\bar{z}$  и  $t$ , а следовательно, из (2.10) и  $V_0 = V_0(z, \bar{z}, t)$ . Затем на  $L$  вычисляется значение  $f = \frac{\partial V_0}{\partial x} + i \frac{\partial V_0}{\partial y} = 2 \frac{\partial V_0}{\partial \bar{z}}$ , которое компенсируется выбором функций  $\varphi_1 = \varphi_1(z, t)$  и  $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_1(\bar{z}, t)$ . Эта задача рассмотрена в [5]. После того, как найдены  $\varphi_1$  и  $\bar{\varphi}_1$ , для функций

$$\varphi_2(z) = \int_0^t \frac{\varphi_2(z, t)}{a+bt} dt, \quad \bar{\varphi}_2(\bar{z}) = \int_0^t \frac{\bar{\varphi}_2(\bar{z}, t)}{a+bt} dt \quad (2.17)$$

из (2.16) получим на  $L$ :  $\frac{1+\nu}{E} (x_1 \varphi_2 - z \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_2) = w_{\text{вн}} - g_1$ , где правая часть этого равенства известна. Подобная задача нахождения  $\varphi_2$  и  $\bar{\varphi}_2$  также рассмотрена в [5].

Кроме того, поскольку при  $0 \leq t < t_*$   $w=0$  на  $L$ , из (2.14) найдем:

$$x \bar{\varphi}_2 - z \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_2 + \frac{A}{a+bt} (x_1 \varphi_1 - z \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1) = g_1(z, \bar{z}, t)|_L$$

$$g_1(z, \bar{z}, t) = \frac{2(\nu_1 - \nu)}{1 + \nu} (a+bt)^{-1} \frac{\partial V_0}{\partial \bar{z}} - \frac{E}{8} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\dot{F} - x \dot{F} + 2Q) -$$

$$- (x \bar{\varphi}_1 - z \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1) - \frac{A}{a+bt} (x_1 \varphi_1 - z \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1), \quad A = \frac{1+\nu_1}{1+\nu} \quad (2.18)$$

Граничное условие (2.18) с дополнительными соотношениями (2.17) служит для нахождения функций  $\varphi_2 = \varphi_2(z, t)$  и  $\bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_2(\bar{z}, t)$ .

Не останавливаясь на простых, но громоздких выкладках, основанных на использовании полученных выше зависимостей и общих приемов [5], в качестве примера приведем решение задачи о круглой пластинке единичного радиуса, которая в момент  $t=t_*$  после снятия внешних нагрузок должна иметь остаточные радиальное и окружное перемещения на границе  $L$ :  $u_r = c + b_2 \cos 3\theta$ ,  $u_\theta = b_1 \sin 3\theta$ .

Решение для нулевого приближения дается формулами (2.3), (2.4), то есть при  $0 \leq t < t_*$  следует задать на  $L$  перемещения:  $u_r = c_0$ ,  $u_\theta = 0$ , при этом радиальное напряжение  $\sigma_r = \sigma_0(t)$ .

Для первого приближения будем иметь:

$$V_0 = \varphi_1 = \bar{\varphi}_1 = 0, \quad \varphi_2(z, t) = \frac{E}{1+\nu} \frac{D_1}{z} (a+bt)^{-\frac{A}{b}} z^{\frac{A}{b}}, \quad \bar{\varphi}_2(\bar{z}, t) =$$

$$= - \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{4D_2}{z} (a+bt)^{-\frac{A}{b}} + D_3 (a+bt)^{-\frac{A}{b}} \right] z^2$$

$$D_1 = \frac{a+b}{2} \left[ a^{-\frac{A}{b}} - (a+bt_*)^{-\frac{A}{b}} \right]^{-1}, \quad D_2 = \frac{a-b}{2} \left[ a^{-\frac{A}{b}} - (a+bt_*)^{-\frac{A}{b}} \right]^{-1}$$

Отсюда следует, что на границе до момента разгрузки при  $t=t_*$  надо фиксировать перемещения  $u_r + i u_\theta = a^{-\frac{A}{b}} \frac{E}{1+\nu} D_1 z^1 + a^{-\frac{A}{b}} D_2 z^2$ ,

при этом внешние нагрузки на  $L$  при  $0 < l < L$  определяются следующим образом:  $\sigma_z = \sigma_{z0} = \frac{E}{1 + \nu} \left[ \frac{4D_1}{z} (a + bt) \frac{\lambda}{b} \frac{1}{z} z^{-3} - 2D_2(a - bt) \frac{\lambda}{b} z^{-3} \right]$ ,  $\sigma_{\theta} = e^{i\theta}$ .

Получение второго и последующих приближений не вызывает никаких принципиальных затруднений, однако соответствующие выражения очень громоздки, поэтому здесь не приводятся.

## ON AN INVERSE PROBLEM IN THE CREEP THEORY

I. Yu. TSVELODUB

### ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՒ ՀԱԿԱԿԱՐԳ ԿՆՏՐՈՒՄԻ ՈՐԱՌՆԵ

Ի. ՅՈՒ. ԾՎԵԼՈՒԴՈՒԲ

Ո. մ փ ո փ ու լ մ

Ապացուցված է սողքի տեսության հակադարձ ռեկապտցիայի խնդրի լուծման միակության թեորեմը: Գրգռումների մեթոդով բարակ սալի համար ստացված է ալդ խնդրի ընդհանուր լուծումը, երբ սալի վերջնական զիջակր քիչ է տարրերվում համասեռ ղեֆորմացվածքից:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Цвелодуб И. Ю. Обратная задача теории ползучести для неупрочняющегося тела. — Динамика сплошной среды: Сб. статей. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1981. вып. 66. с. 126—137.
2. Цвелодуб И. Ю. Некоторые обратные задачи изгиба пластины при ползучести. — Изв. АН СССР. МТТ, 1985. № 5. с. 126—134.
3. Работкин Ю. Н. Ползучесть элементов конструкции. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. Иалева Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1968. 707 с.
6. Векуа Н. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.—Л.: ОГИИЗ 1948. 296 с.

Институт гидродинамики  
им. М. А. Лаврентьева СО АН СССР

Поступила в редакцию  
17.IX.1984