

УДК 539.376

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ  
 СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ  
 ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

ПОРКШЕЯН В. М.

Возрастающие масштабы практического использования полимеров и композитов привели к необходимости экспериментального исследования и теоретического обоснования физических, и частности, термомеханических процессов в средах данного типа. Особый интерес вызывает изучение термовязкоупругих тонкостенных конструкций [1—6].

В настоящей работе рассмотрен случай осесимметричных циклических колебаний оболочек вращения с учетом связности тепловых и механических эффектов. Гипотеза терморологической простоты материала не привлекается; при постановке краевой задачи учитывается осциллирующая составляющая температурного поля [6].

Решение исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 14 порядка осуществляется разложением полей перемещений и температур на регулярную и погранслоиную составляющие.

Особенность исследуемой задачи состоит в том, что при построении погранслоя принципиально невозможно ввести локальную систему координат у краев оболочки, использование которой позволило бы одновременно удовлетворить всем граничным условиям. Указанная трудность преодолевается в работе построением двух существенно различных погранслоев.

1. *Постановка задачи.* Рассматривается тонкая термовязкоупругая, анизотропная, неоднородная оболочка вращения толщины  $h$  с главными радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ ;  $h \ll R_1$ ,  $R_2 < \infty$ . В качестве криволинейных координат выбираются толщиная координата  $z$ , угол  $x$ , образованный осью вращения и нормалью к срединной поверхности, и угол поворота произвольного осевого сечения оболочки  $\varphi$ :

$$|z| \leq \frac{h}{2}; \quad x_0 \leq x \leq x_1; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Используемая в настоящей работе модель термовязкоупругой среды получена на основе традиционного термодинамического анализа одного частного представления функционала свободной энергии Гельмгольца, рассмотренного в работе [7].

$$\rho \dot{\theta}(t) = \int \int \int \left[ \frac{1}{2} E^{ijkl}(r, t, \tau, \eta) \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\eta)}{\partial \tau} - \varphi^{nl}(r, t, \tau, \eta) \frac{\partial \varepsilon_{nl}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \tau} - \frac{1}{2} m(r, t, \tau, \eta) \frac{\partial \theta(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \tau} \right] d^3 \tau d^3 \eta$$

где  $f(r, t, \tau, \eta) = f[r, T(r, t-\tau), \varepsilon_{ij}(r, t-\tau), T(r, t-\eta), \varepsilon_{kl}(r, t-\eta), T(r, t), \varepsilon_{mn}(r, t), t-\tau, t-\eta]$ ,  $b(t) = T(r, t) - T(r, 0)$ ;  $r$  — радиус-вектор материальных точек.

Предлагаемая модель способна отразить ряд свойств реальных полимеров: эффекты механической и тепловой «памяти»; зависимость термомеханических характеристик материала как от предистории, так и от текущих значений деформаций и температуры. В случае гармонических колебаний около положения равновесия определяющие уравнения для тензора напряжений и энтропии, совместные со вторым законом термодинамики в форме неравенства Клаузиуса-Дюгема, имеют вид, аналогичный соотношениям Дюгамеля-Неймана в теории термоупругости, [7]:

$$\sigma^{ij} = E^{ijkl}(T, t\omega) \varepsilon_{kl} - \varphi^{ni}(T, t\omega) \theta; \quad \rho S = \varphi^{nl}(T, t\omega) \varepsilon_{nl} + m(T, t\omega) \theta \quad (1.1)$$

где  $\sigma^{ij}$  — комплексный тензор напряжений;  $S$  — удельная комплексная энтропия.

В работе [6] из принципа Лагранжа, гипотез Кирхгофа-Лява, допущения о линейном законе распределения температуры по толщине с учетом определяющих уравнений (1.1) получена следующая приведенная система уравнений движения и теплопроводности для осесимметричных деформаций:

$$\begin{aligned} a_1 u'' + a_2 u' + a_3 u + \varepsilon a_4 w''' + \varepsilon a_5 w'' + a_6 w' + a_7 w &= \varepsilon^{-1} A_1 \theta' + A_2 \theta' + \varepsilon^{-1} A_3 \theta + A_4 \theta \\ \varepsilon b_0 w''' + \varepsilon b_1 w'' + b_2 w' + b_3 w + \varepsilon^2 b_4 w''' + \varepsilon^2 b_5 w'' + \varepsilon b_6 w' + \varepsilon b_7 w &= \\ &= Q + B_1 \theta'' + \varepsilon B_2 \theta'' - B_3 \theta' + \varepsilon B_4 \theta' + \varepsilon^{-1} B_5 \theta + B_6 \theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon c_1 T'' + \varepsilon^2 c_2 T'' + \varepsilon c_3 T' + \varepsilon c_4 T' + c_5 T + \varepsilon c_6 T - c_7 = \varepsilon^2 C(u, w, u', w', w'', T, T', \theta, \theta')$$

$$\varepsilon d_1 T'' + \varepsilon^2 d_2 T'' + d_3 T' + \varepsilon d_4 T' + d_5 T - d_6 T - d_7 = \varepsilon^2 D(u, w, u', w', w'', T, T', \theta, \theta')$$

$$\varepsilon c_1 \theta'' - \varepsilon^2 c_2 \theta'' - \varepsilon c_3 \theta' + \varepsilon c_4 \theta' + c_5 \theta - \varepsilon c_6 \theta + \tilde{c}_7 = \varepsilon^2 D(u, w, u', w', w'', T, T', \theta, \theta')$$

$$\varepsilon d_1 \theta'' + \varepsilon^2 d_2 \theta'' + d_3 \theta' + \varepsilon d_4 \theta' + d_5 \theta + d_6 \theta - \tilde{d}_7 = \varepsilon^2 D(u, w, u', w', w'', T, T', \theta, \theta')$$

Граничные условия на боковых поверхностях ( $x=x_0$ ,  $x=x_1$ ) выбираются в одном из следующих сочетаний:

$$A_l + B_j - Ck + Dn, \quad l=1, 2, 3; \quad j, k, n=1, 2,$$

где

$$A \quad 1) \quad T|_{x_k} = T_k^*; \quad \theta|_{x_k} = \theta_k^*, \quad n, k=0, 1$$

$$2) \quad c_n T - c_{n+1} T' - \tilde{c}_n T|_{x_k} = q_{nk}^*$$

$$e_n \theta^0 + e_{n-1} \theta^1 + e_n \theta |_{x_k} = \bar{q}_n, \quad n, k=0, 1$$

$$3) e_n T^0 + e_{n-1} T^1 + s_n T^0 + s_{n-1} T^1 + g_n |_{x_k} = 0$$

$$e_n \theta^0 + e_{n-1} \theta^1 + s_n \theta^0 + s_{n+1} \theta^1 + \bar{g}_n |_{x_k} = 0; \quad n, k=0, 1$$

B 1)  $u|_{x_k} = u_k^*$

$$2) p_3 u' + p_2 u + p_3 w'' + p_4 w' + p_5 w + p_6 \theta^0 + p_7 \theta^1 |_{x_k} = P_k^*, \quad k=0, 1$$

C 1)  $w|_{x_k} = w_k^*$

$$2) q_1 u'' + q_2 u' + q_3 u + q_4 w'' + q_5 w' + q_6 w + q_7 \theta^0 + q_8 \theta^1 + q_9 \theta^0 + q_{10} \theta^1 + q_{11} \theta^1 |_{x_k} = P_k^*, \quad k=0, 1$$

D 1)  $w' |_{x_k} = \bar{w}_k^*$

$$2) t_1 u' + t_2 u + t_3 w'' + t_4 w' + t_5 w + t_6 \theta^0 + t_7 \theta^1 |_{x_k} = M_k^*, \quad k=0, 1$$

Здесь  $\bar{T}(x, t) = T(x) + \operatorname{Re}[\theta(x) \exp(i\omega t)]$  — абсолютная температура оболочки;  $T(x) = \bar{T} + z \bar{T} = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{T}(x, z) dz$  — усредненная за цикл колебаний

температура;  $\theta = \theta^0 + z \theta^1 + i \theta_2$  — амплитуда осциллирующей составляющей температурного поля;  $Q \exp(i\omega t)$  — суммарное нормальное давление на лицевых поверхностях ( $z = \pm \frac{h}{2}$ ) оболочки,  $Q = z^{-2} \bar{Q}$ ;  $u = u_1 +$

$+ i u_2 = \frac{\bar{u}}{h}$ ,  $\bar{u}$  — комплексное перемещение вдоль меридиана;  $w = w_1 +$

$+ i w_2 = \frac{\bar{w}}{h}$ ,  $\bar{w}$  — комплексный прогиб;  $(\cdot)' = \frac{d}{dx}$ ;  $\varepsilon = \frac{h}{R}$ ;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $K =$

$= \max(R_1, R_2)$ ;  $R_{1(2)} = R r_{1(2)}$ ;  $P(\bar{T}, \bar{T}) = P_n(\bar{T}, \bar{T}) + \varepsilon P_1(\bar{T}, \bar{T}) + \varepsilon^2 P_2(\bar{T}, \bar{T})$ ,

$P = (a_j, A_j, b_j, B_j, c_j, d_j, e_j, p_j, q_j, t_j, s_j)$ .

Коэффициенты  $P_j$  весьма громоздки; ограничимся выражениями для  $\bar{C}$ , имеющими смысл усредненной диссипации (с точностью до слагаемого  $\frac{\omega}{2} R^{k+1} m_2 |\theta^0|^2$ ), и  $\bar{D}$ :

$$\bar{C} = \frac{\omega}{2} R^{k+1} \left[ \varepsilon E_1^{2k} (\varepsilon_{2n} \varepsilon_{2k} + \varepsilon_{1n} \varepsilon_{1k}) + \varepsilon^3 E_2^{2k} (\varepsilon_{2n} \varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2n} \varepsilon_{2k}) + \right. \quad (1.3)$$

$$\left. + \varepsilon_{1n} \varepsilon_{1k} + \varepsilon_{1n} \varepsilon_{1k} \right] + \varepsilon^3 E_2^{k+1} (\varepsilon_{2n} \varepsilon_{2k} + \varepsilon_{1n} \varepsilon_{1k}) + \varphi_1^{n,j} (\theta_1 \varepsilon_{2n} - \theta_2 \varepsilon_{1n}) +$$

$$+ \varepsilon \varphi_1^{n,j} (\theta_1 \varepsilon_{2n} + R \theta_2 \varepsilon_{2n} - \theta_2 \varepsilon_{1n} - R \theta_2 \varepsilon_{1n}) + \varepsilon^2 R \varphi_1^{n,j} (\theta_1 \varepsilon_{2n} - \theta_2 \varepsilon_{1n}) -$$

$$-\frac{k}{\varphi_2^k}(\theta_2 \varepsilon_{2n} + \theta_2 \varepsilon_{1n}) - \varepsilon \frac{k+1}{\varphi_2^k}(\theta_2 \varepsilon_{2n} + R \theta_2 \varepsilon_{2n} + \theta_1 \varepsilon_{1n} + R \theta_1 \varepsilon_{1n}) - \\ - \varepsilon^2 R \varphi_2^k (\theta_2 \varepsilon_{2n} + \theta_1 \varepsilon_{1n})$$

$$D = [i\omega R^{k-1} \{ T(\varepsilon \varphi^{n_i} \varepsilon_{n_j} + \varepsilon^2 \varphi^{n_i} \varepsilon_{n_j} + m \theta + \varepsilon R m \theta) + \\ + \varepsilon R T(\varepsilon \varphi^{n_i} \varepsilon_{n_j} + \varepsilon^2 \varphi^{n_i} \varepsilon_{n_j} + m \theta + \varepsilon R m \theta) \}, k=0, 1$$

Здесь  $E^{n/k}(T, T, i\omega) = E_1^{n/k}(T, T, \omega) + i E_2^{n/k}(T, T, \omega)$  — комплексный тензор модулей материала;  $\varepsilon_{n_j} = \varepsilon_{n_j}^0 + 2\varepsilon_{n_j}^1 + i\varepsilon_{2n_j}$  — комплексный тензор деформаций;  $\varphi^{n_i}(T, T, i\omega) = \varphi_1^{n_i}(T, T, \omega) + i\varphi_2^{n_i}(T, T, \omega)$  — приведенный комплексный тензор теплового расширения;  $m(T, T, i\omega) = m_1(T, T, \omega) + i m_2(T, T, \omega)$  — приведенный комплексный коэффициент теплоемкости;  $F(T, T) = h^{-k} \int_{-k/2}^{k/2} F(T+zT, z) z^k dz$ .

Компоненты тензора деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + z \varepsilon_{11}^1 = \frac{u' + w}{r_1} - \frac{z}{r_1} \left( \frac{w' - u}{r_1} \right)' \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 + z \varepsilon_{22}^1 = \frac{u \operatorname{ctg} x + w}{r_1} - z \frac{\operatorname{ctg} x}{r_2} \frac{w' - u}{r_1} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^0 + z \varepsilon_{33}^1 = \frac{\varphi_{33}^0}{E_{3333}} - \frac{E_{3322}^0}{E_{3333}} \varepsilon_{22} + z \left[ \frac{\varphi_{33}^1}{E_{3333}} - \frac{E_{3322}^1}{E_{3333}} \varepsilon_{22} + \left( \frac{\varphi_{33}^0}{E_{3333}} \right)' \theta - \left( \frac{E_{3322}^0}{E_{33} \varphi} \right)' \varepsilon_{22} \right]$$

2. Выбор разрешающих функций. Не нарушая общности, положим, что  $Q \sim 0(\varepsilon)$  и заданы следующие граничные условия:

$$f|_{x_j} = f_j^k = \varepsilon^{-k/2} (f_{j0}^k + \varepsilon^{1/2} f_{j1}^k + \dots), \quad u|_{x_j} = u_j^k = \varepsilon^{-k/2} (u_{j0}^k + \varepsilon^{1/2} u_{j1}^k + \dots) \quad (2.1) \\ w|_{x_j} = w_j^k = \varepsilon^{-k/2} (w_{j0}^k + \varepsilon^{1/2} w_{j1}^k + \dots), \quad w'|_{x_j} = \bar{w}_j^k = \varepsilon^{-k/2} (\bar{w}_{j0}^k + \varepsilon^{1/2} \bar{w}_{j1}^k + \dots)$$

где  $f = (T, \theta)$ ;  $k, j = 0, 1$ ;  $\rho_0 = -\frac{1}{2}$ ;  $\rho_1 = -1$ .

Решение системы (1.2) строится в виде

$$Z = Z^I(x) + Z^{II}(\xi_1) + Z^{III}(\zeta_1) + Z^{IV}(\xi_2) + Z^{V}(\zeta_2)$$

где

$$Z = (g_1, g_2, u, w); \quad g_1 = (T, \theta); \quad g_2 = (T, \theta)$$

$$x = x_0 + \varepsilon^{1/2} \xi_2 = x_0 + \zeta_2 = x_1 - \varepsilon^{1/2} \xi_1 = x_1 - \zeta_1$$

$$g_i^j(x) = g_{i0}^j + \varepsilon^{1/2} g_{i1}^j + \dots, \quad i=0, 1 \quad (2.2)$$

$$u^I(x) = \varepsilon^{-1} (u_0^I + \varepsilon^{1/2} u_1^I + \dots), \quad w^I(x) = \varepsilon^{-1} (w_0^I + \varepsilon^{1/2} w_1^I + \dots)$$

$$g_i^j(\xi_1) = \varepsilon^{-1/2} (g_{i0}^j + \varepsilon^{1/2} g_{i1}^j + \dots), \quad u^{II}(\xi_1) = \varepsilon^{-1} (u_0^{II} + \varepsilon^{1/2} u_1^{II} + \dots)$$

$$w^{II}(\xi_1) = \varepsilon^{-1/2} (w_0^{II} + \varepsilon^{1/2} w_1^{II} + \dots) \quad (2.3)$$

$$g_1^{(1)}(\zeta_1) = g_{10}^{(1)} + \varepsilon^{1/2} g_{11}^{(1)} + \varepsilon g_{12}^{(1)} + \dots, \quad g_2^{(1)}(\zeta_1) = \varepsilon^{-1} (g_{20}^{(1)} + \varepsilon^{1/2} g_{21}^{(1)} + \varepsilon g_{22}^{(1)} + \dots) \quad (2.4)$$

$$u^{(1)}(\zeta_1) = u_0^{(1)} + \varepsilon^{1/2} u_1^{(1)} + \varepsilon u_2^{(1)} + \dots, \quad w^{(1)}(\zeta_1) = w_0^{(1)} + \varepsilon^{1/2} w_1^{(1)} + \varepsilon w_2^{(1)} + \dots$$

$Z^{(1)}(\zeta_1)$  и  $Z^{(1)}(\zeta_2)$  имеют такой же вид.

Повышение (или понижение) порядка малости по  $\varepsilon$  кривых условий и нагрузки  $Q$  приводит к повышению (или понижению) порядка малости значений разрешающих функций (2.2) — (2.4), но не изменяет общей схемы решения задачи.

В настоящей работе при реализации первого и второго итерационных процессов ограничимся определением главных членов в разложениях (2.2) — (2.4), поскольку все последующие находятся аналогично.

В дальнейшем в очевидных случаях индексы  $(\ )^0, (\ )^1, (\ )^{(1)}$  опускаем.

3. *Первый итерационный процесс.* Переходим к построению регулярного решения. После подстановки (2.2) в (1.2) с учетом разложения коэффициентов

$$(a_j, A_j, b_j, B_j, c_j, d_j)(T, T) = Y(T, T) = Y(T_0, T_0) + \varepsilon^{1/2} Y(T_0, T_0) + \dots$$

получаем последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $T_j^0, T_j^1, \theta_j^0, \theta_j^1, u_j, w_j, j=0, 1, \dots$

Введем обозначения

$$f = (T, \theta); \quad c_j = (c_j, c_j); \quad d_j = (d_j, \bar{d}_j)$$

На первом этапе имеем

$$f_0(x) = -\frac{c_f}{c_2}, \quad f_2(x) = -\frac{d_2 f_0 + d_3 f_0 + d_f}{d_4}$$

Перемещения  $u$  и прогибы  $w$  определяются из следующих уравнений:

$$F_1(x)u_0^1 + F_2(x)u_0^0 + F_3(x)u_0 = F_4(x), \quad w_0(x) = \frac{b_2 - b_2 u_0 - b_3 u_0}{b_0} \quad (3.1)$$

Здесь  $F_1(x) = a_1 - \frac{b_2}{b_0} a_0; \quad F_2(x) = a_2 - a_0 \left( \frac{b_2}{b_0} \right) - a_0 \frac{b_2}{b_0} - a_0 \frac{b_2}{b_0}$

$$F_3(x) = a_3 - a_0 \left( \frac{b_2}{b_0} \right) - \frac{a_2}{b_0} b_2; \quad F_4(x) = a_4 - a_0 \left( \frac{b_2}{b_0} \right) - a_0 \frac{b_0}{b_0}$$

$$c_f = c_{f0}; \quad a_j = a_{j0}; \quad b_j = b_{j0}; \quad d_j = d_{j0}; \quad b_0 = Q + B_0 \theta_0; \quad a_0 = A_1 \theta_0 + A_2 \theta_0$$

Выбор метода решения уравнения (3.1) связан, в основном, с геометрией оболочки. Для оболочек, замкнутых в полюсе, коэффициенты  $F_k(x), k=1, 2, 3$  имеют особенность при  $x=0$ ; в этом случае

ограниченное решение уравнения определяется с точностью до одной константы  $O^1$ .

Анализ последующих систем позволяет получить регулярное решение, удовлетворяющее исходной системе (1.2) с любой заданной точностью по  $\varepsilon$ .

4. Второй итерационный процесс. Для нахождения первого пограничного у края  $x=x_1$  вводится локальная координата  $\xi$ :  $x=x_1-\varepsilon^{1/2}\xi$ ,  $\xi=x_1$ .

Как и при построении регулярного решения, первый пограничный находит из последовательности систем, полученных подстановкой (2.3) в однородную систему (1.2) с заменой  $x$  на  $\xi$ .

Главные члены разложения (2.3), удовлетворяющие условию убывания при  $\xi \rightarrow \infty$ , определяются с точностью до четырех постоянных  $G_j^0$ ,  $j=1, 2, 3, 4$ :

$$T_0^0 = G_1^0 \exp(k\xi), \quad T_1^0 = \frac{d_2}{d_1} G_1^0 \exp(k\xi), \quad \theta_0^0 = G_2^0 \exp(k\xi), \quad \theta_1^0 = \frac{d_2}{d_1} G_2^0 \exp(k\xi) \quad (4.1)$$

$$u_0 = H_1 \exp(\lambda_1 \xi) + H_2 \exp(\lambda_2 \xi) + H_3 \exp(k\xi)$$

$$w_0 = G_1^0 \exp(\lambda_1 \xi) + G_2^0 \exp(\lambda_2 \xi) + H G_3^0 \exp(k\xi)$$

где  $p_1 \lambda^4 + p_2 \lambda^2 + p_3 = 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ ;  $H = B_1 - B_2 - \left( \frac{b_2}{k a_1} + \frac{k b_0}{a_1} \right) A_1$

$$H_k = \left( \frac{a_2}{a_1} \lambda_k + \frac{a_3}{a_1} \frac{1}{\lambda_k} \right) G_1^0, \quad k=0, 1$$

$$H_2 = \left( \frac{a_1 k H + a_2 H}{a_1} - \frac{1}{k} \frac{a_3}{a_1} \right) G_1^0; \quad p_1 = b_1 - \frac{b_2}{a_1} a_1; \quad p_2 = b_1 - \frac{b_0}{a_2} a_0 - \frac{a_1}{a_2} b_2$$

$$p_3 = b_1 - \frac{a_1}{a_1} b_2; \quad k^2 = \frac{c_2 d_1}{c_1 d_2 - c_1 d_3}; \quad \text{Re}(k) < 0; \quad a_j = a_{j0}; \quad b_j = b_{j0}$$

$$c_j = c_{j0}; \quad d_j = d_{j0}; \quad B_j = B_{j0}; \quad A_j = A_{j0}; \quad f_{j0} = f_j(x=x_1) = f_j(\xi=0)$$

Для получения второго пограничного у края  $x=x_1$  вводится локальная координата  $\zeta$ :

$$x = x_1 - \varepsilon \zeta, \quad \zeta = \zeta_1$$

После замены  $x$  на  $\zeta$  и подстановки (2.4) в однородную систему (1.2) получаем последовательность систем для определения  $(T_j, T_j, \theta_j, \theta_j, u_j, w_j)^{0,1}$ .

Убывающее при  $\zeta \rightarrow \infty$  решение первой системы находится с точностью до двух постоянных  $G_1^0$  и  $G_2^0$ :

$$T_0^0 = M G_1^0 \exp(\gamma \zeta), \quad T_1^0 = G_1^0 \exp(\gamma \zeta), \quad \theta_0^0 = -M G_2^0 \exp(\gamma \zeta), \quad \theta_1^0 = G_2^0 \exp(\gamma \zeta)$$

$$u_0 = \frac{G_1^0}{\gamma} \frac{A b_1 - a_1 B}{a_1 b_1 - a_1 b_0} \exp(\gamma \zeta), \quad u_1 = G_2^0 \frac{B a_1 - A b_0}{a_1 b_1 - a_1 b_0} \exp(\gamma \zeta)$$

где

$$t_1^2 + t_2 \gamma + t_3 = 0, \quad \operatorname{Re}(t) < 0; \quad M = \frac{c_2}{c_1} - \frac{1}{\gamma} \frac{c_3}{c_1}, \quad A = A_1 M - A_2, \quad B = -B_1 M + B_2$$

$$t_1 = d_2 - d_1 \frac{c_2}{c_1}, \quad t_2 = d_1 \frac{c_3}{c_1} + d_2 \frac{c_2}{c_1} - d_3, \quad t_3 = d_3 - d_2 \frac{c_3}{c_1}, \quad a_j = a_{j0}, \quad b_j = b_{j0}$$

$$c_j = c_{j0}, \quad d_j = d_{j0}, \quad B_j = B_{j0}, \quad A_j = A_{j0}, \quad f_{j0} = f_j(x=x_1) = f_j(\zeta=0)$$

Построением второго погранслоя завершается решение задачи: наличие семи произвольных констант позволяет удовлетворить всем граничным условиям при  $x=x_1$ .

Погранслой при  $x=x_0$  строится аналогичным образом.

В заключение коротко воспроизведем схему построения решения.

1) Выбором констант  $(G_1^{II})_0$  и  $(G_1^{II})_0$  однозначно определяется

вектор  $f_{k0}^{II}$ , удовлетворяющий краевым условиям

$$f_{k0}^{II}(\xi_k=0) = f_{k0}^*$$

2) Выбором констант  $(G_1^{III})_0$  и  $(G_2^{III})_0$  определяется вектор  $f_{k0}^{III}$

такой, что

$$f_{k0}^{III}(\xi_k=0) + f_{k0}^{II}(\xi_k=0) = f_{k0}^*$$

3) И снова, выбором констант  $(G_1^{IV})_1$  и  $(G_1^{IV})_1$  определяется  $f_{k1}^{IV}$  —

вектор из условий

$$f_{k1}^{IV}(\xi_k=0) + f_{k0}^{III}(\xi_k=0) + f_{k0}^{II}(x=x_k) = f_{k1}^*$$

и т. д.

Перемещения  $n$  и прогибы  $w$  строятся по следующей схеме.

1) Используя  $(G_1^{II})_0$  и  $(G_1^{II})_0$ , находим прогиб  $w_{k0}^{II}$ , удовлетворяющий вместе со своей производной краевым условиям

$$w_{k0}^{II}(\xi_k=0) = w_{k0}^*, \quad (w_{k0}^{II})'(\xi_k=0) = \bar{w}_{k0}^*$$

2) Выбором константы  $(G_k^I)_0$  определяются  $u_{k0}^I$ :

$$u_{k0}^I(x=x_k) + u_{k0}^{II}(\xi_k=0) = u_{k0}^*$$

и т. д.

5. *Некоторые выводы и замечания.* Проведенный анализ право-мочен, если выполнено следующее условие:

$$\varepsilon \ll \max \{ |P_j| \} \tag{5.1}$$

то есть для сравнительно слабых нагружений, малых частот колебаний и тонких оболочек. Очевидно, что при этом не приходится ожидать значительного теплообразования в оболочке. Это обстоятельство позволяет пренебречь в исходных уравнениях нелинейностью, которая

обусловлена зависимостью  $P$  от  $T^0$  и  $T^1$ . А именно, полагаем

$$P(\overset{0}{T}, \overset{1}{T}) = \begin{matrix} P(\overset{0}{T}^1, \overset{1}{T}^1), & x \in D \\ P(\overset{0}{T}^*, \overset{1}{T}^*), & x \in \bar{D} \end{matrix}$$

где  $D = \{x | x_0 + \delta < x < x_1 - \delta\}$ ,  $\bar{D} = \{x | x_0 < x < x_0 + \delta \vee x_1 - \delta < x < x_1\}$ ,

$$0 < \delta \ll \frac{x_1 - x_0}{x_1}$$

Нелинейность уравнений (1.2) связана также со структурой функций  $\overset{k}{C}$  и  $\overset{k}{D}$ . При построении решения осуществляется следующее разложение:

$$S(\overset{k}{\varepsilon}_{jn}^1, \overset{k}{\varepsilon}_{jn}^{11}, \overset{k}{\varepsilon}_{jn}^{111}, \overset{k}{\theta}^1, \overset{k}{\theta}^{11}, \overset{k}{\theta}^{111}, \overset{k}{T}^1, \overset{k}{T}^{11}, \overset{k}{T}^{111}) = S^I + S^{II} + S^{III}$$

где  $S = (C, D)$ ; вектор  $S^I = S^I(\overset{k}{\varepsilon}_{jn}^1, \overset{k}{\theta}^1, \overset{k}{T}^1)$  определяет регулярную часть;

вектор  $S^{II} = S^{II}(\overset{k}{\varepsilon}_{jn}^{11}, \overset{k}{\theta}^{11}, \overset{k}{T}^{11})$  — первый погранслой;

$S^{III} = S^{III}(\overset{k}{\varepsilon}_{jn}^{111}, \overset{k}{\varepsilon}_{jn}^{111}, \overset{k}{\varepsilon}_{jn}^{111}, \overset{k}{\theta}^1, \overset{k}{\theta}^{11}, \overset{k}{\theta}^{111}, \overset{k}{T}^1, \overset{k}{T}^{11}, \overset{k}{T}^{111})$  — второй погранслой.

Из проведенного исследования системы уравнений (1.2) при сделанных предположениях малости (5.1) следует, что в подавляющей части оболочки температурное поле определяется тепловыми условиями на лицевых поверхностях.

В качестве примера рассмотрим оболочку, с лицевых поверхностей которой осуществляется теплообмен с внешними средами по закону Ньютона. Температурное поле вдали от краев оболочки определяется регулярной составляющей и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} T_0^0(x) &= \frac{\overset{0}{\gamma}^+ T^+ + \overset{0}{\gamma}^- T^-}{\overset{0}{\gamma}^+ + \overset{0}{\gamma}^-} + o(\varepsilon), & T_0^1(x) &= -\frac{\overset{0}{\Lambda}^{21}}{\overset{0}{\Lambda}^{33}} \frac{\overset{0}{\gamma}^+}{r_2} + \frac{\overset{0}{\gamma}^- - \overset{0}{\gamma}^+}{\overset{0}{\Lambda}^{33}} T_0^0 + \\ &+ \frac{R}{2} \frac{\overset{0}{\gamma}^+ T^+ - \overset{0}{\gamma}^- T^-}{\overset{0}{\Lambda}^{22}} + o(\varepsilon); & \theta_0^0(x) &= \frac{\overset{0}{\gamma}^+ \theta^+ + \overset{0}{\gamma}^- \theta^-}{\overset{0}{\gamma}^+ + \overset{0}{\gamma}^-} + o(\varepsilon^{3/2}) \\ \theta_0^1(x) &= -\frac{\overset{0}{\Lambda}^{21}}{\overset{0}{\Lambda}^{33}} \frac{\overset{0}{\theta}^+}{r_2} - \frac{\overset{0}{\gamma}^- - \overset{0}{\gamma}^+}{\overset{0}{\Lambda}^{33}} \theta_0^0 + \frac{R}{2} \frac{\overset{0}{\gamma}^+ \theta^+ - \overset{0}{\gamma}^- \theta^-}{\overset{0}{\Lambda}^{22}} + o(\varepsilon^{3/2}) \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma^\pm$  — коэффициенты теплообмена с лицевых поверхностей;  $\Lambda^{ij}$  — тензор коэффициентов теплопроводности;  $T^\pm = R_1(\theta^\pm \exp(i\omega t))$  — температура внешних сред.

Если  $T^\pm = \text{const}$ , то с точностью  $o(\varepsilon)$  в оболочке устанавливается однородное по  $x$  и линейное по  $z$  температурное поле. В случае  $\theta^\pm = 0$  указанное температурное поле также и стационарно с точностью  $o(\varepsilon^{3/2})$ .

Что же касается приграничных областей оболочки, то здесь осциллирующие температурные поля, задаваемые на боковых по-

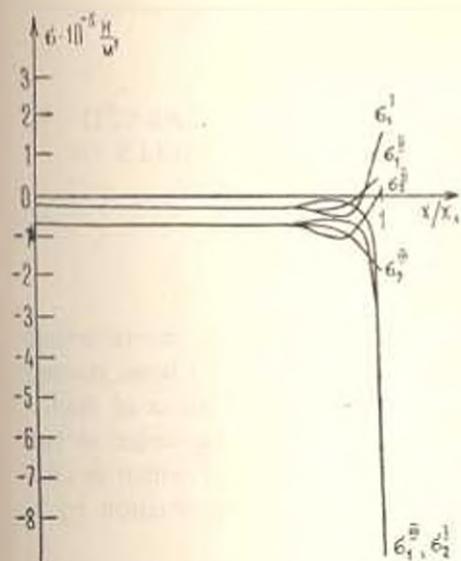
верхностях, самым существенным образом меняют картину напряженно-деформированного состояния в оболочке

Последнее утверждение проиллюстрируем на примере тонкого сферического купола, подверженного внешнему гармоническому нагружению. Боковая поверхность оболочки жестко защемлена и поддерживается при заданной температуре; с лицевых поверхностей осуществляется теплообмен с внешней средой по закону Ньютона.

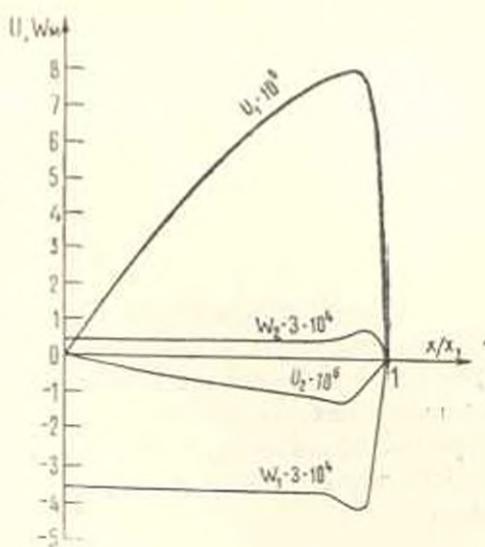
Численный расчет проведен для купола, изготовленного из капрона-Б, термомеханические модули которого приведены в работе [8]. Остальные параметры принимаются следующими:

$$\omega = 0,1 \text{ рад/сек}; R = 0,1 \text{ м}; h = 10^{-4} \text{ м}; \alpha_1 = \pi/2; Q = 10^4 \text{ н/м}^2; T^- = 40 \text{ C};$$

$$T^- = 20^\circ\text{C}; T^+ = 30^\circ\text{C}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 приведено распределение действительной и мнимой составляющих окружных напряжений  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_2 + i\sigma_2$  в зависимости от амплитуды температурных осцилляций на краях оболочки  $\theta^0 = i(I); 0(II); 1(III)$ .

На фиг. 2 приведены графики меридианального перемещения  $u = u_1 + iu_2$  и прогиба  $w = w_1 - iw_2$  для случая  $\theta^0 = 0$ .

Проведенный численный анализ показывает, что для адекватного описания термонапряженного состояния вязкоупругих оболочек необходимо учитывать осцилляции тепловых полей.

ՑԻՊԻԿ ԲԵՌԵԱՎՈՐՈՒՄՆԵՐԻ ԳԵՊԳՈՒՄ ՊՏՏՄԱՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՀԱՄԱՐ  
ՋԵՐՄԱԱԽԱՉԳԱՄԱՆՈՒՑԻՈՒԹՅԱՆ ԿԱՊԱԿՅՈՒՄ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ  
ՄԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Մ. ՊՈՐԿՇԵՅԱՆ

Ա. մ. վ. ա. փ. ո. մ.

Աստամնասիրվում է սահմայառաիկ մեթոդի կիրառությունը ջիկյիկ  
րեոնալորումների դեպքում պատման թաղանթների ջերմաառաձգամածու-  
ջիկություն կապակցված խնդիրների անալիզի նամար: Սաաղված է սեղա-  
փոխությունների սեղալլար և սահմանային շերտերի բաղադրիչների ձկվածք-  
ների և ջերմաաիձանների կառուցման սխեման:

Ցուլլլ է սրված երկու տարրեր սահմանային շերտերի գոլությունը,  
որոնցից առաջինը պալմանալորված է թաղանթի շարժման ճալմասարում-  
ներով, իսկ երկրորդը ջերմահաղորդականության ճալմասարումներով:

AN ASYMPTOTIC METHOD OF SOLUTION OF COUPLED  
PROBLEM OF THERMOVISCOELASTICITY FOR SHELLS OF  
REVOLUTION UNDER PERIODIC LOADING

V. M. PORKSHEYAN

S u m m a r y

Asymptotic analysis of the coupled problem of thermoviscoelasticity for the shells of revolution under periodic loading has been studied. The expressions for the regular and boundary-layer solutions of displacements, flexures and temperatures are obtained. The existence of two types of boundary-layer solution has been shown, first of which is caused by the equations of motion, second—by the heat conduction equations.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Воронин Н. И., Сафроненко В. Г. О применении вариационных принципов в связанных задачах термовязкоупругих оболочек.—Изв АН СССР. МТТ, 1980. №4, с. 166—173.
2. Гуменюк Б. И., Карнаухов В. Г., Киричок Н. Ф. Связанные динамические задачи термовязкоупругости для пластин и оболочек.—В кн.: Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси: Мецниереба, 1975, т. 1, с. 374—382.
3. Киричок Н. Ф., Карнаухов В. Г. Термомеханическое поведение гибких вязкоупругих пластин и оболочек при циклических нагрузках.—Проблемы прочности, 1979, №3, с. 10—14.
4. Колтунов М. А., Мирсайнов М., Трояновский Н. Я. Вынужденные колебания вязкоупругих осесимметричных оболочек.—В кн.: Динамика оснований, фундаментов и подзем. сооружений. Ташкент: 1977, с. 148—150.
5. Неборзова П. Ф. К определению температурного поля в полимерной цилиндрической оболочке при циклическом нагружении (техническая теория)—Прикладная теория упругости, Саратов, 1980, с. 28—33.

6. Поркшеяк В. М. О постановке краевой задачи связанной термовязкоупругости — Рук. деп. ВИНТИ, № 3000—83 ДЭП, 1982. 12 с.
7. Поркшеяк В. М. Об одном представлении функционала свободной энергии в термовязкоупругости.—Рук. деп. ВИНТИ, № 5095—82 ДЭП, 1982. 8 с.
8. Степаненко Ю. П. К вопросу об уравнениях состояния изотропного полимерного материала.—В кн. Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 1981. с. 115—133.

НИИ механики и прикладной математики РГУ

Поступила в редакцию  
15.VIII.1984