

УДК 539.3

О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ ОТ УПРУГИХ РЕБЕР К КОНЕЧНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

ФИЛЬШТИНСКИЙ Л. А., ХИЖНЯК Л. А.

Взаимодействие изотропной и анизотропной оболочек с упругими ребрами рассматривалось в работах [1, 2]. Ниже на основе фундаментального решения, построенного в [3], решается задача включения для пьезокерамической оболочки конечной длины.

1. Рассмотрим отнесенную к координатной системе x, β, γ замкнутую по β цилиндрическую пьезокерамическую оболочку длины l_0 , поляризованную вдоль оси x . На торце $x=0$ оболочка жестко закреплена, торец $x=l_0$ свободен от сил. Пусть в точках x_0, β_0+mT ($m=1, 2, \dots, n-1$) к оболочке приложена система сосредоточенных сил с компонентами $P_x=P_1, P_y=P_2, P_z=P_3$.

Будем исходить из полученного ранее [3] фундаментального решения уравнений теории пологих пьезокерамических оболочек. Компоненты матрицы Грина представим в виде

$$u_{ij}(x, \beta, z_0, \beta_0) = u_{ij}^0(x, z_0) + A_{ij} \Psi_j \quad (1.1)$$

$$\Psi_j = - \frac{P_j}{F_2 R_2^2 a_0} G(x, \beta, z_0, \beta_0); \quad G(x, \beta, z_0, \beta_0) = E(x-x_0, \beta-\beta_0) + \\ + \frac{2}{T} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{10} B_{kl}^{(j)} \exp[ik\omega_l^{(j)}]$$

где u_{ij}^0 — общее решение системы уравнений пологой оболочки [3] при $P_j=0$ ($j=1, 2, 3, 4$); $B_{kl}^{(j)}$ — постоянные, определяемые из граничных условий; $E(x-x_0, \beta-\beta_0)$ — фундаментальное решение; u_{ij} — перемещения ($i=1, 2, 3$) и потенциал электрического поля ($i=4$) в точке (x, β) от действия сосредоточенной силы P_j ($j=1, 2, 3$) или заряда P_4 в точке (x_0, β_0+mT) . Остальные величины, входящие в (1.1), определены в [3].

Условия на торцах оболочки имеют вид

$$u=v=w=\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{при } x=0 \quad (1.2)$$

$$T_1=M_1=S=N_1^*-N_1 + \frac{1}{R_2} \frac{\partial H}{\partial \beta} = 0 \quad \text{при } x=l_0$$

Рассмотрим два случая электрических граничных условий: 1—

горцы оболочки электродированы и заземлены ($\varphi=0$); 2—заземленный торец электродирован и заземлен ($\varphi=0$), свободный торец электрически зажат ($D_z=0$).

В рассматриваемой задаче нас будут интересовать перемещения от сосредоточенной силы P_1 . В силу (1.1) имеем

$$u_{11}=u(x, \beta)=u^0 + A_{11}U_1, \quad u_{21}=v(x, \beta)=z^0 + A_{12}U_1, \quad (1.3)$$

$$u_{31}=w(x, \beta)=\alpha r + A_{13}U_1, \quad u_{41}=\varphi(x, \beta)=\varphi^0 + A_{14}U_1$$

$$u^0 = \frac{\rho}{\mu} \sum_{j=1}^4 B_j^{(0)} \exp(z^0 x) z^0 + (12e^2 a_{11} / \mu^2 a_3 c_{33} + c_{21} / \mu) B_5^{(0)} z^0 -$$

$$+ (c_{44} \gamma - 12a_3 \rho / \mu^2 a_3 c_{33}) B_6^{(0)} z^0 + B_7^{(0)} z^0 + B_8^{(0)} z^0 + B_9^{(0)} z^0; \quad \omega^0 = \sum_{j=1}^4 B_j^{(0)} \exp(z^0 x) +$$

$$+ 12a_3 (e B_5^{(0)} - \nu B_6^{(0)}) / \mu a_3 c_{33}$$

$$\varphi^0 = -\rho \sum_{j=1}^4 B_j^{(0)} \exp(z^0 x) z^0 + (c_{44} \gamma - 12a_3 \rho / \mu^2 a_3 c_{33}) B_5^{(0)} z^0 +$$

$$+ (12a_3 \rho^2 / \mu^2 a_3 c_{33} + c_{21} / \mu) B_6^{(0)} z^0 + B_7^{(0)}$$

$$A_{11} = \frac{h^2}{R_2^2} \sum_{j=0}^2 b_{11}^{1j} \frac{\partial^4}{\partial x^{4-2j} \partial z^{2j}} + \frac{h^2}{12R_2^2} \sum_{j=0}^2 b_{11}^{1j} \frac{\partial^2}{\partial x^{2-2j} \partial z^{2j} r}$$

$$A_{12} = \frac{h^2}{R_2^2} \sum_{j=0}^2 b_{12}^{1j} \frac{\partial^4}{\partial x^{4-2j} \partial z^{2j}} + \frac{h^2}{12R_2^2} \sum_{j=0}^2 b_{12}^{1j} \frac{\partial^2}{\partial x^{2-2j} \partial z^{2j} r}$$

$$A_{13} = \frac{h^2}{R_2^2} \sum_{j=0}^2 b_{13}^{1j} \frac{\partial^2}{\partial x^{2-2j} \partial z^{2j}}$$

$$A_{14} = \frac{h^2 b_{14}^{10}}{R_2^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{h^2}{12R_2^2} \sum_{j=0}^2 b_{14}^{1j} \frac{\partial^2}{\partial x^{2-2j} \partial z^{2j}}$$

$$b_{10}^{10} = -c_{44}(e_{13}^2 - \varepsilon_{33} c_{11}); \quad b_{11}^{11} = -c_{11}(e_{13}^2 - \varepsilon_{33} c_{11}); \quad b_{12}^{12} = 0; \quad b_{13}^{13} = -c_{44} c_{33} \varepsilon_{33}$$

$$b_{14}^{14} = -c_{33}(r^2 - c_{44} \varepsilon_{11}) - \varepsilon_{33} f; \quad b_{11}^{11} = -2fr^2 - \varepsilon_{33} c_{11} r^2 - \varepsilon_{11} f; \quad b_{12}^{12} = -e_{13} \gamma + c_{44}(e_{13}^2 - \varepsilon_{33} c_{11})$$

$$b_{13}^{13} = 0; \quad b_{14}^{14} = c_{11} g; \quad b_{11}^{11} = c_{33}(e_{23} s + e_{33} r); \quad b_{12}^{12} = s \varepsilon + r(2e_{23} f + c_{33} e_{13})$$

$$b_{13}^{13} = s \varepsilon + r(2f e_{13} - c_{11} e_{33}); \quad b_{14}^{14} = c_{11}(\varepsilon_{11} s + e_{13} r); \quad b_{10}^{10} = c_{44}(e_{13} e_{33} + \varepsilon_{33} c_{11})$$

$$b_{11}^{11} = c_{33} g + e_{13} \gamma - c_{44}(e_{13}^2 + c_{11} \varepsilon_{33}); \quad b_{12}^{12} = -c_{11} g; \quad b_{13}^{13} = c_{14} \gamma; \quad b_{14}^{14} = -c_{33} c_{44} e_{33}$$

$$b_{15}^{15} = c_{13} c_{33} r - 2e_{23} c_{11} s + c_{33}(c_{11} e_{13} - c_{11} e_{33}); \quad b_{16}^{16} = 2f r s - c_{11} e_{33} r - e_{13} f$$

$$b_{17}^{17} = c_{11}(r s - c_{11} e_{23} - e_{23}^2)$$

Входящие сюда упругие и пьезоэлектрические постоянные и их комбинации определены в [3].

Используя выражения для усилий и моментов [1] и уравнения состояния пьезокерамической среды [5], имеем

$$T_1 = \frac{h}{R_2} \left[c_{23} \frac{\partial u}{\partial z} + c_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + w \right) + e_{23} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \quad (1.4)$$

$$S = \frac{h}{R_2} \left[c_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + e_{15} \frac{\partial z}{\partial z} \right], \quad M_1 = - \frac{h^2}{12R_2^2} \left(c_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right)$$

$$N_1 = - \frac{h^2}{12R_2^2} \left[c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{41}) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \beta} \right]$$

$$D_1 = \frac{1}{R_2} \left[e_{33} \frac{\partial u}{\partial z} + e_{13} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) - e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]$$

Подставляя (1.3) в граничные условия (1.2), получим системы линейных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных $B_i^{(k)}$, ($k=0, 1, \dots$), ($i=1, 2, \dots, 10$). В силу громоздкости их не выписываем. Этим заканчивается построение матрицы Грина для конечной оболочки.

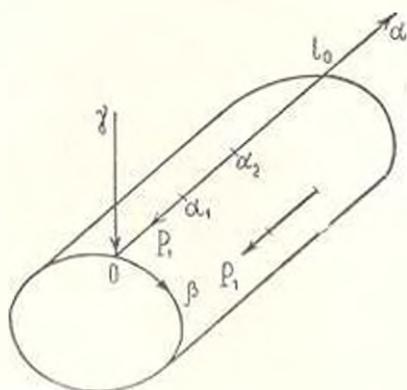
2. Пусть конечная пьезокерамическая оболочка усилена вдоль отрезков $z_1 \leq z \leq z_2$, $\beta_m = 2\pi m/\omega$ ($m=0, 1, \dots, \omega-1$) тонкими упругими ребрами жесткости, нагруженными на концах z_1 одинаковыми продольными силами P_1 вдоль отрицательной оси z (фиг. 1).

Будем предполагать, что ребро непрерывно скреплено с оболочкой и работает только на растяжение-сжатие, материал ребра диэлектрик. Условие совместности деформации ребра и оболочки имеет вид

$$P(z)/EF = \int_{z_1}^{z_2} \epsilon(z, z_0) q(z_0) dz_0 \quad (2.1)$$

$$\epsilon(z, z_0) = \epsilon_1 = \frac{1}{R_2} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad u = \frac{u_{11}}{P_1}$$

Здесь $\epsilon(z, z_0)$ — продольная деформация; u_{11} — перемещение в точке $(z, 0)$ от действия сосредоточенной силы P_1 , приложенной в точке z_0 ; β_m , $q(z_0)$ — интенсивность контактных усилий, действующих на оболочку; E и F — модуль упругости и площадь поперечного сечения ребра.



Фиг. 1

Вычисляя ядро $\epsilon(z, z_0)$ с учетом (1.1), (1.3) и подставляя его в (2.1), получаем сингулярное интегральное уравнение относительно интенсивности контактных усилий.

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{q(t) dt}{(t-x)} + A \int_{z_1}^{z_2} q(t) F(x, t) dt + B \int_{z_1}^{z_2} q(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

$$x = (Lx + z_1 + z_2)/2; \quad a_0 = (Ll - z_1 - z_2)/2, \quad L = z_2 - z_1; \quad A = -3L\omega / \sum_{j=1}^{\omega} \operatorname{Re} [id(z_j)/z_j]$$

$$B = -TR_2 h A a_0 / EF b_{10}^{11}, \quad F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x, t) - \frac{Th a_0}{b_{10}^{11}} \frac{\partial u^0}{\partial z}$$

$$\Phi_1(x, t) = \frac{\text{sign}(x-t) a_0}{2a_3} \left(1 - \frac{b_{10}^{11} a_3}{12 b_{10}^{11} a_3} \right) \left[1 - \text{Im} i \exp(iz_0 L |x-t|/2) \right]$$

$$\Phi_2(x, t) = \frac{1}{12} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} i d(z_n) \left[\text{ctg} \frac{\omega z_n L (x-t)}{4} - \frac{4}{L \omega z_n (x-t)} \right]$$

$$\Phi_3 = 2 \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{R_2}{h} \right)^2 \rho(z_n^k) (k\omega)^{-1} + \frac{1}{12} d(z_n^k) \right] \exp(ik\omega L z_n^k |x-t|/2) -$$

$$- \frac{d(z_n)}{12} \exp(ik\omega L z_n |x-t|/2) \left| \text{sign}(x-t) \right.$$

$$\Phi_4(x, t) = 2 \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B^{(k)} \left[\left(\frac{R_2}{h} \right)^2 (k\omega)^2 b_1(z_n^k) + \right.$$

$$\left. + \frac{(k\omega)^2}{12} b_2(z_n^k) \right] \exp[ik\omega z_n^k (Lx - x_2 + a_3)/2]; \quad b_1(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\delta_{10}^{11}}{b_{10}^{11}} z^{5-2l}$$

$$b_2(z) = \sum_{j=0}^4 \frac{b_{11}^{11}}{b_{10}^{11}} z^{6-2j}; \quad \rho(z) = b_1(z) \Delta'(z); \quad d(z) = b_2(z) \Delta'(z)$$

Условие равновесия ребра даст

$$\int_{-1}^1 q(t) dt = -2P_1 / R_2 \quad (2.3)$$

Уравнения (2.2), (2.3) решались численно методом Мультипликации [6]. После определения контактных усилий механические и электрические величины вычисляются по формулам

$$u_k(x, \beta) = R_2 \int_{a_1}^{a_2} \sum_{j=1}^3 q_j(z_0, \beta) u_{kj}(x, a_0, \beta, \beta_0) dz_0 \quad (2.4)$$

$u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$, $u_4 = \varphi$, $q_j(z_0, \beta)$ — контактное усилие в точке (z_0, β) от действия нагрузки P_1 .

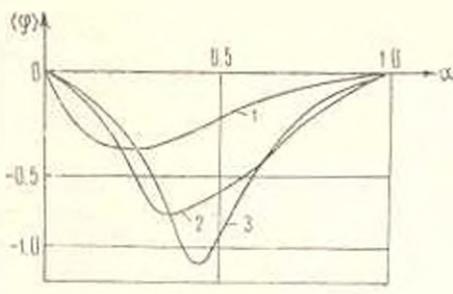
В частности, потенциал электрического поля в оболочке имеет вид

$$\langle \varphi \rangle = - \int_{a_1}^{a_2} q_1(z_0, \beta) \left[- \frac{Th a_3}{b_{10}^{11}} \varphi^0 + A_{10} \psi_1 \right] dz_0 \quad (2.5)$$

$$\langle \varphi \rangle = \varphi(x, \beta) / V_0; \quad V_0 = b_{10}^{11} P_1 / Th R_2 a_3$$

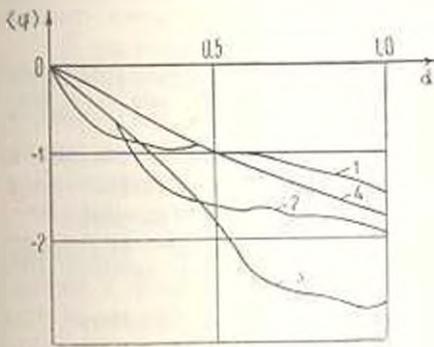
На фиг. 2 представлены графики распределения потенциала электрического поля вдоль оси x для случая заземленных торцов оболочки из пьезокерамики $PZT-5$ [5] при $\beta = 0$, $\omega = 6$, $R_2/h = 5$.

Кривая 1 соответствует $\alpha_1=0,1$, $\alpha_2=0,4$; кривая 2— $\alpha_1=0,3$, $\alpha_2=0,6$; кривая 3— $\alpha_1=0,4$, $\alpha_2=0,5$ (α_1, α_2 —координаты начала и конца ребра соответственно).



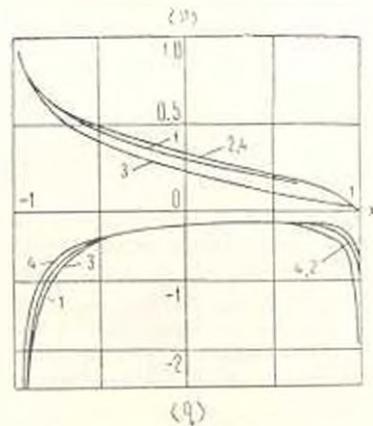
Фиг. 2

На фиг. 3 представлены распределения потенциала электрического поля для случая 2 при тех же параметрах оболочки. Кривая 1 соответствует $\alpha_1=0,1$, $\alpha_2=0,4$; кривая 2— $\alpha_1=0,3$, $\alpha_2=0,6$; кривая 3— $\alpha_1=0,6$, $\alpha_2=0,9$; кривая 4— $\alpha_1=0,3$, $\alpha_2=0,6$ ($\beta = \pi/\omega$).



Фиг. 3

На фиг. 4 представлены кривые относительного усилия в ребре $P(x)/P_1 = \langle P \rangle$ и контактного погонного усилия $\langle q \rangle q(x) R_2 I_0 / 2 P_1$.



Фиг. 4

Анализ результатов расчета позволяет сделать вывод, что значение потенциала существенно зависит от места расположения ребра. При приближении ребра к свободному краю абсолютная величина потенциала увеличивается.

ԱՌԱՋՊԱՆԱՆ ԿՈՂՆԵՐԻՑ ՊՅԵՃՈՒՆԵՐԱՄԵԿԱԿԱՆ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԹԱՂԱՆԹԻՆ ԲԵՐԻ ՓՈՒԱՆՑՐԱՆ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ա. ՅԻՇՏԻՆՍԿԻ, Լ. Ա. ԽԵՒՆՅԱԿ

Ա մ փ ո փ ո մ

Գիտարկված է ներդրակի խնդիրը առավելագույն կողից վերջավոր դաշային պլեզոկերամիկական թաղանթին բերի փոխանցման դեպքում: Մի ծայրը ամրակցված, իսկ մյուսը ուժերից ազատ վերջավոր թաղանթի համար կառուցված է Գրիբի մատրիցը: Այնուհետև ներդրակի խնդիրը բերված է ինտեգրալ հավասարման, որը լուծված է թվային եղանակով: Հաշվված են էլեկտրական դաշտի պոտենցիալը, նիզերը կողում և կոնտակտային ճիգերը՝ ազատ ծայրում տարբեր էլեկտրական պայմանների դեպքում:

LOADING TRANSFER FROM ELASTIC RIBS TO THE FINITE PIEZOELECTRIC SHELL.

L. A. PILSHTINSKI, L. A. KHIZNYAK

Summary

The problem concerning loading transfer from elastic ribs to the finite cylinder piezoelectric shell has been examined. Green's matrix has been built for the finite shell secured on one end and free of forces on the other. Then the problem of inclusion is reduced to an integral equation, which is solved numerically. The potential field, the forces in the ribs, and the contact forces for various electrical conditions on the loose end have been defined.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григоров Э. П., Толкачев В. М. О передаче усилия от ребер жесткости к цилиндрической оболочке.—В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука, 1969, с. 177—181.
2. Максименко В. Н., Фильштинский Л. А. Упругое равновесие анизотропных оболочек, подкрепленных ребрами жесткости.—ПММ. 1975, т. 39, вып. 5 с. 900—908.
3. Фильштинский Л. А., Хизняк Л. А. Реакция пьезокерамической оболочки на сосредоточенные воздействия.—ПММ. 1983, т. 47, вып. 3, с. 478—482.
4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
5. Бершинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях.—В кн.: Физическая акустика. (Под ред. У. Мелона). Т. 1, ч. А. М.: Мир, 1966, с. 204—326.
6. Калаидия А. П. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.

Сумский филиал Харьковского
политехнического института им. В. П. Ланна

Поступила в редакцию
19.XI.1981