ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XL, № 2, 1987 Механика

УДК 539.374

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И КОНИЧЕСКИХ ТРУБ

АКОПЯН А. Г., ЗАДОЯН М. А.

Рассматривается упругопластическое состояние ортотропной толстостенной цилиндрической трубы под совместным воздействием равномерно распределенных нормальных и касательных сил на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях, растягивающих осевых сил и крутящих моментов, приложенных на торцевых сечениях, а также упругопластическое состояние анизотропной длинной конической трубы при равномерных нормальных и касательных силах, действующих на внутренней и внешней боковых поверхностях. Главные оси анизотропии принимаются совпадающими с осями, соответственно, цилиндрической и сферической системы координат.

Предельное состояние анизотропных цилиндрических труб рассмотрено в работах [1—5]. В работе [6] изучено упругопластическое состояние анизотропной цилиндрической трубы под действием равномерного внутреннего и внешнего давления. Предельное состояние анизотропной конической трубы рассмотрено в работе [7], а в [8, 9] построены решения соответствующих упругопластических задач для изотропной цилиндрической и конической труб.

§ 1. Упругопластическое состояние ортотропной цилиндрической трубы

Материал трубы принимаем идеально-пластическим, несжимаемым, удовлетворяющим соотношениям теории упругопластических деформаций и условию текучести Мизеса-Хилла.

Фиг. 1

Ось z цилиндрической координатной системы проводим по оси трубы так, чтобы плоскость $z=0$ прошла по серединному поперечному сечению. Положительное направление θ считаем против вращения часовой стрелки (фиг. 1).

На внутренней $r=a$ и на внешней $r=b$ цилиндрических поверхностях задаем соответственно значения внешних сил

$$\sigma_r = -p, \ -q; \quad \tau_{rz} = s, \ s_1; \quad \tau_{r\theta} = t, \ t_1 \tag{1.1}$$

На торцевых сечениях $z=\pm l$ приложены осевые растягивающие силы N^* и крутящие моменты M^*. Соответственно принимаем интегральные условия

$$2\pi \int_a^b \sigma_z r dr = N^*, \quad 2\pi \int_a^b \tau_{\theta z} r^2 dr = M^* \tag{1.2}$$

В зависимости от вклада крутящего момента в интенсивности внешних сил, пластические деформации могут впервые появляться на внутренней или на внешней поверхностях трубы. Полагаем, что, начиная с некоторого уровня интенсивности внешних сил и при сравнительно небольшом крутящем моменте, с внутренней поверхности $r=a$ трубы распространяется пластическая зона. Исходя из характера деформирования трубы, полагаем, что тензор деформации как в пластической, так и в упругой зонах не зависит от продольной координаты z и граничная поверхность между пластической и упругой зонами, на которой следует соблюдать условия сопряжения решений двух соседних зон, естественно, принимается цилиндрической (фиг. 1).

В пластической зоне $a \leqslant r \leqslant \rho$ компоненты напряжений и перемещений представим в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\sigma_r = -p + B(F+G)a^2 \int_a^r \frac{\omega}{r^3} dr + A(F-G) \int_a^r \frac{\omega}{r} dr, \quad \tau_{r\theta} = t\frac{a^2}{r^2} \\
\sigma_\theta = \sigma_r + \omega \left[(F-G)A + (F+G)B\frac{a^2}{r^2} \right], \quad \tau_{\theta z} = L\omega C\frac{r}{\rho} \\
\sigma_z = \sigma_r + \omega \left[(F+2H)A + FB\frac{a^2}{r^2} \right], \quad \tau_{rz} = s\frac{a}{r} \\
u = -Ar + B\frac{a^2}{r}, \quad v = E\frac{r}{\rho} + C\frac{r}{\rho}z - \frac{r}{N}\int_r^\rho \frac{\tau_{r\theta}}{\omega}\frac{dr}{r} \\
w = D + 2Az - \frac{1}{M}\int_r^\rho \frac{\tau_{rz}}{\omega} dr
\end{gathered} \tag{1.3}$$

где

$$\omega = \frac{(1 - \tau_{rz}^2/M - \tau_{r\theta}^2/N)^{1/2}}{\left[(F+G+4H)A^2 + 2(F-G)AB\frac{a^2}{r^2} + (F+G)B^2\frac{a^4}{r^4} + LC^2\frac{r^2}{\rho^2} \right]^{1/2}}$$

$$F = F_0/\Delta, \ G = G_0/\Delta, \ H = H_0/\Delta, \ L = L_0^{-1}, \ M = M_0^{-1}, \ N = N_0^{-1}$$

$$\Delta = F_0 G_0 + G_0 H_0 + H_0 F_0$$

A, B, C, D, E — произвольные постоянные, $F_0, G_0, H_0, L_0, M_0, N_0$ — параметры пластической анизотропии, а $r=\rho$ — граничная между пластической и упругой зонами цилиндрическая поверхность, положение которой следует определять в зависимости от интенсивности внешних сил.

В упругой зоне $\rho \leq r \leq b$ напряжения и перемещения можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r = -q + \varkappa A_1 \ln\frac{r}{b} + \mu\frac{B_1}{2}\left(\nu^2 - \frac{a^2}{r^2}\right), \qquad \nu = \frac{a}{b} \\
&\sigma_\theta = -q + \varkappa A_1\left(1 + \ln\frac{r}{b}\right) + \mu\frac{B_1}{2}\left(\nu^2 + \frac{a^2}{r^2}\right) \\
&\sigma_z = -q + \left(\lambda + \varkappa\ln\frac{r}{b}\right)A_1 + \left[\frac{\mu}{2}\nu^2 + \left(\chi - \frac{\mu}{2}\right)\frac{a^2}{r^2}\right]B_1 \qquad (1.4) \\
&\tau_{rz} = s_1\frac{b}{r}, \quad \tau_{r\theta} = t_1\frac{b^2}{r^2}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{A_{44}}{2}C_1\frac{r}{\rho} \\
&u = -A_1 r + B_1\frac{a^2}{r}, \quad v = E_1\frac{r}{\rho} + C_1\frac{r}{\rho}z - \frac{t_1 r}{A_{66}}\left(\frac{b^2}{r^2} - \frac{b^2}{\rho^2}\right) \\
&w = D_1 + 2A_1 z + 2\frac{s_1 b}{A_{55}}\ln\frac{r}{\rho}
\end{aligned}
$$

где обозначены:

$$
\begin{aligned}
&\varkappa = A_{11} - A_{22} + 2A_{23} - 2A_{13}, \quad \mu = A_{11} - 2A_{12} + A_{22} \\
&\lambda = A_{11} + A_{13} + 2A_{33} - A_{23} - 3A_{12}, \quad \chi = A_{11} - A_{13} + A_{23} - A_{12}
\end{aligned}
$$

A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 — произвольные постоянные, A_{ij} — упругие постоянные.

На поверхности $r = \rho$ необходимо выполнить условия сопряжения решений двух зон. Из условий непрерывности перемещения следует

$$A_1 = A, \; B_1 = B, \; C_1 = C, \; D_1 = D, \; E_1 = E$$

а из непрерывности нормального и касательных напряжений на поверхности $r = \rho$ будем иметь

$$
\begin{aligned}
p - q = B\left[\frac{\mu}{2}\left(\frac{a^2}{\rho^2} - \nu^2\right) + (F+G)a^2\int_a^\rho \frac{\omega}{r^3}dr\right] + A\left[(F-G)\int_a^\rho \frac{\omega}{r}dr - \varkappa\ln\frac{\rho}{b}\right] \\
s_1 = \nu s, \quad t_1 = \nu^2 t \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

Наконец, из условия непрерывности интенсивности касательных напряжений находим уравнение

$$\alpha\frac{a^4}{\rho^4}B^2 + 2\beta\frac{a^2}{\rho^2}AB - \left(1 - M_0\tau_{rz}^2 - N_0\tau_{r\theta}^2 - \gamma A^2 - L_0\frac{A_{44}}{4}C^2\right) = 0$$

где

$$
\begin{aligned}
&\alpha = F_0(\mu - \chi)^2 + G_0\chi^2 + H_0\mu^2, \quad \beta = F_0(\varkappa - \lambda)(\mu - \chi) + G_0\lambda\chi + H_0\varkappa\mu \\
&\gamma = F_0(\varkappa - \lambda)^2 + G_0\lambda^2 + H_0\varkappa^2
\end{aligned}
$$

Отсюда, определяя B и подставляя в выражения напряжений и перемещений в пластической зоне (1.3), получим

$$
\begin{gathered}
\sigma_r = -p + A\frac{F-G}{\rho^2}\int_a^r \omega_* r\,dr + (F+G)Q(\rho)\int_a^r \frac{\omega_*}{r}\,dr \\
\sigma_\theta = \sigma_r + \omega_*\left[(F-G)A\frac{r^2}{\rho^2} + (F-G)Q(\rho)\right], \quad \tau_{\theta z} = LC\frac{r^2}{\rho^3}\omega_* \\
\sigma_z = \sigma_r + \omega_*\left[(F+2H)A\frac{r^2}{\rho^2} + F\,Q(\rho)\right], \quad \tau_{r\theta} = t\,\frac{a^2}{r^2} \\
\tau_{rz} = s\,\frac{a}{r}, \quad v = E\,\frac{r}{\rho} + C\,\frac{z}{\rho}\,r - r\,\frac{\rho^2}{N}\int_r^\rho \frac{\tau_{r\theta}}{\omega_*}\frac{dr}{r^3} \\
u = -Ar + Q(\rho)\frac{\rho^2}{r}, \quad w = D + 2Az - \frac{\rho^2}{M}\int_r^\rho \frac{\tau_{rz}}{\omega_*}\frac{dr}{r^2}
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

где введены функции

$$
Q(\rho) = \left\{\frac{\rho^2}{\alpha^2}A^2 + \frac{1}{\alpha}\left[1 - M_0\tau_{rz}^2(\rho) - N_0\tau_{r\theta}^2(\rho) - \gamma A^2 + L_0\frac{A_{44}^2}{4}C^2\right]^{-1}\right\}^{1/2} - \frac{\beta}{\alpha}A
$$

$$
\omega_* = \frac{\left[1 - M_0\tau_{rz}^2(r) - N_0\tau_{r\theta}^2(r)\right]^{1/2}}{\left[(F+G+4H)A^2\frac{r^4}{\rho^4} + 2(F-G)A\frac{r^2}{\rho^2}Q(\rho) + (F+G)Q^2(\rho) + LC^2\frac{r^6}{\rho^6}\right]^{1/2}}
$$

Для упругой зоны из (1.4) следует

$$
\begin{gathered}
\sigma_r = -q + \varkappa A\ln\frac{r}{b} + \frac{\mu}{2}Q(\rho)\left(\frac{\rho^2}{b^2} - \frac{\rho^2}{r^2}\right) \\
\sigma_\theta = -q + \varkappa A\left(1 + \ln\frac{r}{b}\right) + \frac{\mu}{2}Q(\rho)\left(\frac{\rho^2}{b^2} + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \\
\sigma_z = -q + A\left(\lambda + \varkappa\ln\frac{r}{b}\right) + \frac{2\lambda-\mu}{2}Q(\rho)\frac{\rho^2}{r^2} + \frac{\mu}{2}Q(\rho)\frac{\rho^2}{b^2} \\
\tau_{\theta z} = C\frac{A_{44}}{2}\frac{r}{\rho}, \quad \tau_{rz} = s\,\frac{a}{r}, \quad \tau_{r\theta} = t\,\frac{a^2}{r^2} \\
u = -Ar + Q(\rho)\frac{\rho^2}{r}, \quad v = E\frac{r}{\rho} + C\frac{r}{\rho}z - \frac{tr}{A_{66}}\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2}{\rho^2}\right) \\
w = D + 2Az - \frac{2sa}{A_{55}}\ln\frac{r}{\rho}
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

После исключения B уравнение (1.5) запишется в виде

$$
p - q = A\frac{F-G}{\rho^2}\int_a^\rho \omega_*(r,\rho)\,r\,dr + Q(\rho)(F+G)\int_a^\rho \frac{\omega_*(r,\rho)}{r}\,dr -
$$

$$-\varkappa A \ln\frac{\rho}{b} + \frac{\mu}{2} Q(\rho)\left(1-\frac{\rho^2}{b^2}\right), \quad a \leqslant \rho \leqslant b \tag{1.8}$$

Из условий (1.2) следует

$$A\left[\left(\lambda-\frac{\varkappa}{2}\right)(b^2-\rho^2)+\frac{F+G+4H}{\rho^2}\int_a^{\rho}\omega_* r^3\,dr\right]=\frac{N^*}{\pi}-pa^2+qb^2+$$

$$+(\mu-2\chi)Q(\rho)\rho^2\ln\frac{b}{\rho}-Q(\rho)(F-G)\int_a^{\rho}\omega_* r\,dr \tag{1.9}$$

$$C\left[A_{44}(b^4-\rho^4)+\frac{4L}{\rho^2}\int_a^{\rho}\omega_* r^5\,dr\right]=\frac{2\rho}{\pi}M_* \tag{1.10}$$

Уравнения (1.8) – (1.10) в принципе определяют значения параметров A, C и ρ. Перемещения определяются с точностью постоянных D и E.

§ 2. Совместное действие нормальных и окружных касательных сил

Пусть ортотропная цилиндрическая труба находится под совместным воздействием нормальных и окружных касательных распределенных сил (фиг. 2).

Фиг. 2

Примем $s=M^*_z=C=D=A=0$

$$\frac{N^*}{\pi}=pa^2-qb^2+\left(\frac{2\chi-\mu}{\delta}\ln\frac{b}{\rho}+\frac{F-G}{2\sqrt{F+G}}\right)\times$$

$$\times\sqrt{\rho^4-\frac{t^2}{N}a^4}-\frac{F-G}{2\sqrt{(F+G)N}}\,ta^2\times$$

$$\times\left(\arccos\frac{ta^2}{\sqrt{N}\rho^2}-\arccos\frac{t}{\sqrt{N}}+\sqrt{\frac{N}{t^2}-1}\right)$$

$$\delta=\sqrt{\Delta[F(\mu-\chi)^2+G\chi^2+H\mu^2]}$$

Обозначая $\tau_{r\theta}=\tau$, в пластической зоне будем иметь

$$\sigma_r,\ \sigma_\theta=-p+\frac{\sqrt{F+G}}{2}\left(2\ln\frac{r}{a}+\ln\frac{1+\sqrt{1-t^2/N}}{1+\sqrt{1-\tau^2/N}}+\sqrt{1-t^2/N}\mp\right.$$

$$\left.\mp\sqrt{1-\tau^2/N}\right),\quad \sigma_z=\sigma_r+\frac{F}{\sqrt{F+G}}\sqrt{1-\tau^2/N},\ a\leqslant r\leqslant\rho$$

$$\tau=t\frac{a^2}{r^2},\quad \tau_{rz}=\tau_{\theta z}=0,\quad u=\frac{\rho^2}{r\delta}\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N} \tag{2.1}$$

$$v=E\frac{r}{\rho}-\frac{\sqrt{F+G}}{\delta}\,\frac{r\rho^2}{2ta^2}\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}\left(\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}-\sqrt{1-\tau^2/N}\right)$$

В упругой зоне получается

$$
\sigma_r,\ \sigma_\theta=-q+\frac{\mu}{2\delta}\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}\left(\frac{\rho^2}{b^2}\mp\frac{\rho^2}{r^2}\right)
$$

$$
\sigma_z=-q+\left[\frac{\mu}{2\delta}\frac{\rho^2}{b^2}+\left(\frac{\chi}{\delta}-\frac{\mu}{2\delta}\right)\frac{\rho^2}{r^2}\right]\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}
$$

$$
\tau=t\frac{a^2}{r^2},\quad \tau_{rz}=\tau_{z\theta}=0,\quad u=\frac{\rho^2}{r\delta}\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N} \tag{2.2}
$$

$$
v=E\frac{r}{\rho}+\frac{tr}{A_{66}}\left(\frac{a^2}{\rho^2}-\frac{a^2}{r^2}\right),\quad w=0,\quad \rho\leqslant r\leqslant b
$$

Из (1.8) приходим к уравнению

$$
p-q=\frac{\mu}{2\delta}\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}\left(1-\frac{\rho^2}{b^2}\right)+\frac{\sqrt{F+G}}{2}\left(2\ln\frac{\rho}{a}+\ln\frac{1+\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}}{1+\sqrt{1-t^2/N}}+\right.
$$

$$
\left.+\sqrt{1-t^2/N}-\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}\right) \tag{2.3}
$$

определяющему зависимость между ρ и внешними силами $p-q$ и t.

Из полученных формул предельным переходом можно получить решение задачи об упругопластическом состоянии вокруг круговой полости в бесконечной ортотропной среде.

Полагая $q=0$, $E=-\dfrac{ta^2}{A_{66}\rho}$ при $b\to\infty$, из (2.1—2.2) получим:

в пластической зоне $a\leqslant r\leqslant\rho$

$$
\sigma_r,\ \sigma_\theta=-p+\frac{\sqrt{F+G}}{2}\left(2\ln\frac{r}{a}+\ln\frac{1+\sqrt{1-\tau^2/N}}{1+\sqrt{1-t^2/N}}+\sqrt{1-t^2/N}\mp\right.
$$

$$
\left.\mp\sqrt{1-\tau^2/N}\right),\quad \sigma_z=\sigma_r+\frac{F}{\sqrt{F+G}}\sqrt{1-\tau^2/N},\quad \tau_{r\theta}=\tau=t\frac{a^2}{r^2}
$$

$$
\tau_{rz}=\tau_{\theta z}=0,\quad w=0,\quad u=\frac{\rho^2}{\delta r}\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}
$$

$$
v=-\frac{ta^2}{A_{66}\rho^2}r-\frac{r\rho^2}{2ta^2}\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}\left(\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}-\sqrt{1-\tau^2/N}\right)
$$

в упругой зоне $r\geqslant\rho$

$$
\sigma_r,\ \sigma_\theta=\mp\frac{\mu}{2\delta}\frac{\rho^2}{r^2}\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N},\quad \sigma_z=\left(\frac{\chi}{\delta}-\frac{\mu}{2\delta}\right)\frac{\rho^2}{r^2}\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}
$$

$$
\tau=t\frac{a^2}{r^2},\quad \tau_{rz}=\tau_{\theta z}=0,\quad u=\frac{\rho^2}{\delta r}\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}
$$

$$
v=-\frac{ta^2}{A_{66}r},\quad w=0
$$

Граница между упругой и пластической зонами определяется уравнением

$$\frac{2p}{\sqrt{F+G}}+\ln\left(1+\sqrt{1-t^2/N}\right)-\sqrt{1-t^2/N}=$$

$$=\left(\frac{\mu}{\delta\sqrt{F+G}}-1\right)\sqrt{1-\frac{t^2a^4}{N\rho^4}}+\ln\left(\frac{\rho^2}{a^2}+\sqrt{\frac{\rho^4}{a^4}-\frac{t^2}{N}}\right)$$

В случае полости предельное упругое состояние описывается эллипсом

$$\frac{p^2}{\left(\frac{\mu}{2\delta}\right)^2}+\frac{t^2}{N}=1$$

§ 3. Вывод основных уравнений, описывающих упругопластическое состояние ортотропной конической трубы

Материал трубы принимаем ортотропным, несжимаемым, идеально пластическим и удовлетворяющим уравнениям теории упругопластических деформаций. Полагаем, что при определенных комбинациях внешних сил вокруг конической поверхности $\theta=\alpha$ образуется пластическая зона, ограниченная поверхностью $\theta=\gamma$, подлежащей определению в ходе решения задачи. На граничной поверхности между пластической и упругой зонами имеются условия сопряжения, а на внутренней и на внешней поверхностях задано соответственно (фиг. 3)

$$\sigma_\theta=-p_1,\ -p_2;\quad \tau_{r\theta}=m_1,\ m_2;\quad \tau_{\theta\varphi}=q_1,\ q_2\quad \text{при}\quad \theta=\alpha,\ \beta \tag{3.1}$$

Задачу будем решать в сферической системе координат, центр которой помещен в вершине конуса.

Решение в пластической зоне $\alpha\leq\theta\leq\gamma$ представим в виде

Фиг. 3

$$\sigma_\theta=-p_1+\int_\alpha^\theta\left[(2G+H)f''-(2H+G)f\,\mathrm{ctg}\,\theta\right]\omega\,\mathrm{ctg}\,\theta\,d\theta-3\int_\alpha^\theta\tau_{r\theta}\,d\theta$$

$$\sigma_r=\sigma_\theta+\omega\left[(2G+F)f'+(F-G)f\,\mathrm{ctg}\,\theta\right],\quad \tau_{\theta\varphi}=q_1\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} \tag{3.2}$$

$$\sigma_\varphi=\sigma_\theta+\omega\left[(2G+H)f'-(2H+G)f\,\mathrm{ctg}\,\theta\right]$$

$$\tau_{r\theta}=N\omega(f'+f\,\mathrm{ctg}\,\theta)'$$

$$\tau_{r\varphi}=0,\quad u=r(f'+f\,\mathrm{ctg}\,\theta),\quad v=-3rf$$

$$w=q_1L_\varphi r\sin^2\alpha\sin\theta\int_\theta^\gamma\frac{d\theta}{\omega\sin^3\theta}+Dr\sin\theta$$

где

$$w=\frac{(1-\tau_{\theta\varphi}^2/L)^{1/2}}{[N(f'+f\,\mathrm{ctg}\,\theta)^2+(F+H-4G)f'^2-2(2G+2H-F)f'f\,\mathrm{ctg}\,\theta+(F+G+4H)f^2\mathrm{ctg}^2\theta]^{1/2}}$$

D—произвольная постоянная, а $f(\theta)$—неизвестная функция, которая определяется из системы дифференциальных уравнений

$$\tau_{r\theta}'=-\tau_{r\theta}\mathrm{ctg}\,\theta-\omega\,[(2G+2F-H)f'+(2F+2H-G)f\,\mathrm{ctg}\,\theta]$$

$$f''+f'\mathrm{ctg}\,\theta-\frac{f}{\sin^2\theta}-\frac{\tau_{r\theta}}{N\omega}=0 \tag{3.3}$$

Если ввести обозначения

$$\varphi=\frac{f'}{f},\quad T=(1-\tau_{\theta\varphi}^2/L-\tau_{r\theta}^2/N)^{-1/2}$$

$$\Phi=[(F+H+4G)\varphi^2-2(2G+2H-F)f'f\,\mathrm{ctg}\,\theta+(F+G+4H)f^2\mathrm{ctg}^2\theta]^{1/2}$$

и произвести некоторые преобразования [7], систему (3.3) можно привести к канонической форме

$$\tau_{r\theta}'=-\tau_{r\theta}\mathrm{ctg}\,\theta-\frac{1}{T\Phi}\,[(2G+2F-H)\varphi+(2H+2F-G)\mathrm{ctg}\,\theta]$$

$$\varphi'=-\varphi^2-\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{\tau_{r\theta}}{N}T\Phi \tag{3.4}$$

Граничными условиями для (3.4) будут: $\tau_{r\theta}=m_1$ при $\theta=\alpha$ и условия сопряжения на поверхности $\theta=\gamma$.

Решение в упругой зоне $\gamma\leq\theta\leq\beta$ можно представить следующим образом:

$$\sigma_\theta=-p_2-\int_\beta^\theta(\chi\Psi''-\mu\Psi'\mathrm{ctg}\,\theta)\mathrm{ctg}\,\theta\,d\theta-3\int_\beta^\theta\tau_{r\theta}\,d\theta$$

$$\sigma_r=\sigma_\theta+\lambda\Psi''+\varkappa\Psi'\mathrm{ctg}\,\theta,\quad \tau_{\theta\varphi}=q_2\frac{\sin^3\beta}{\sin^2\theta}$$

$$\sigma_\varphi=\sigma_\theta+\chi\Psi''-\mu\Psi'\mathrm{ctg}\,\theta,\quad \tau_{r\varphi}=0 \tag{3.5}$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{A_{66}}{2}(\Psi''+\Psi'\mathrm{ctg}\,\theta)',\quad u=r(\Psi''+\Psi'\mathrm{ctg}\,\theta),\quad v=-3r\Psi'$$

$$w=\frac{r}{A_{44}}q_2\sin^3\beta\sin\theta\left(\ln\frac{\mathrm{tg}\,\theta/2}{\mathrm{tg}\,\gamma/2}+\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)+Er\sin\theta$$

где

$$\lambda=A_{11}-3A_{12}+2A_{22}+A_{13}-A_{23},\quad \varkappa=A_{11}-A_{22}-2A_{13}+2A_{23}$$

$$\chi=A_{11}-A_{12}-3A_{21}+2A_{22}+A_{23},\quad \mu=A_{12}-A_{13}-3A_{23}+A_{22}+2A_{33}$$

E—произвольная постоянная, $\Psi(\theta)$—неизвестная функция, которая определяется из системы дифференциальных уравнений

$$\tau'_{r\theta}=-\tau_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta+(2\lambda-\chi)s+2(\varkappa+\mu)\Psi\operatorname{ctg}\theta$$

$$s'=-s\operatorname{ctg}\theta+\frac{\Psi}{\sin^2\theta}+\frac{2\tau_{r\theta}}{A_{66}},\quad \Psi'=s \tag{3.6}$$

Граничными условиями для системы (3.6) будут: $\tau_{r\theta}=m_2$ при $\theta=\beta$ и условия сопряжения на поверхности $\theta=\gamma$, которые дают

$$E=D,\quad q_1\sin^2\alpha=q_2\sin^2\beta$$

$$f=\Psi,\quad \varphi=\frac{s}{\Psi},\quad \varphi'=\left(\frac{s}{\Psi}\right)^2+\frac{s'}{\Psi},\quad \tau_{r\theta}^{(1)}=\tau_{r\theta}^{(2)}\quad \text{при}\quad \theta=\gamma$$

$$p_1-p_2=\int\limits_{\gamma}^{\beta}\left[\frac{3}{2}A_{66}s'+\left(\chi+\frac{3}{2}A_{66}\right)s\operatorname{ctg}\theta-\left(\mu\operatorname{ctg}^2\theta+\frac{3A_{66}}{2\sin^2\theta}\right)\Psi\right]d\theta-$$

$$-\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\left[3N(\varphi'+\varphi^2)-(2G+H-3N)\varphi\operatorname{ctg}\theta+(2H+G)\operatorname{ctg}^2\theta-\frac{3N}{\sin^2\theta}\right]\frac{d\theta}{T\Phi} \tag{3.7}$$

Дифференциальные уравнения (3.4), (3.6), условия сопряжения (3.7) и граничные условия для $\tau_{r\theta}$ из (3.1) в принципе определяют функции $\tau_{r\theta}$, φ, s, Ψ и поверхность раздела упругой и пластической зон γ.

§ 4. Упругопластическое состояние трансверсально изотропной конической трубы под совместным воздействием нормальных и кольцевых касательных сил

Пусть на внутренней и на внешней боковых поверхностях трансверсально изотропной конической трубы с осью симметрии механических свойств $\theta=0$ действуют, соответственно, нормальные давления и кольцевые касательные силы

$$\sigma_\theta=-p_1,\ -p_2;\quad \tau_{\theta\varphi}=q_1,\ q_2\quad \text{при}\quad \theta=\alpha,\ \beta \tag{4.1}$$

Полагая по всему объему тела равными нулю кроме $\tau_{r\varphi}$, также и $\tau_{r\theta}$, находим

$$f=\Psi=\frac{A}{\sin\theta};\quad A=-\frac{\sqrt{1-(q_1^2\sin^4\alpha)/(L\sin^4\gamma)}}{\sqrt{\Delta}\sqrt{F(\chi+\mu)^2+G(\lambda-\varkappa-\chi-\mu)^2+H(\varkappa-\lambda)^2}}\,\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma} \tag{4.2}$$

В пластической зоне $\alpha\leqslant\theta\leqslant\gamma$ получаем

$$\sigma_r=\sigma_\theta+\sqrt{\frac{G}{2}}\sqrt{1-\tau^2/L},\quad \sigma_\varphi=\sigma_\theta+\sqrt{2G}\sqrt{1-\tau^2/L}$$

$$\sigma_\theta=-p_1+\sqrt{\frac{G}{2}}\left(2\ln\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}+\ln\frac{1+\sqrt{1-\tau^2/L}}{1+\sqrt{1-q_1^2/L}}+\sqrt{1-q_1^2/L}-\sqrt{1-\tau^2/L}\right)$$

$$\tau=\tau_{\theta\varphi}=q_1\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta},\quad u=0,\quad v=\frac{3r}{A_0}\operatorname{tg}\gamma\sqrt{1-\frac{q_1^2\sin^4\alpha}{L\sin^4\gamma}}\,\frac{\sin\gamma}{\sin\theta} \tag{4.3}$$

$$w=-\frac{3r}{A_0Lq_1}\sqrt{\frac{G}{2}}\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}\frac{\sin\theta}{\cos\gamma}\sqrt{L-q_1^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\gamma}}\left(\sqrt{L-q_1^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\gamma}}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{L-q_1^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\theta}}\right)+Dr\sin\theta,\quad A_0=\sqrt{3}\sqrt{F(\chi+\mu)^2+G(\lambda-\varkappa-\chi-\mu)^2+H(\varkappa-\lambda)^2}$$

В упругой зоне $\gamma\leqslant\theta\leqslant\beta$ будем иметь для напряжений

$$\sigma_r=\sigma_\theta+\frac{\lambda-\varkappa}{A_0}\sqrt{1-\frac{q_1^2\sin^4\alpha}{L\sin^4\gamma}}\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\theta}\frac{\cos\theta}{\cos\gamma},\quad \tau_{r\varphi}=\tau_{r\theta}=0$$

$$\sigma_\varphi=\sigma_\theta+\frac{\chi+\mu}{A_0}\sqrt{1-\frac{q_1^2\sin^4\alpha}{L\sin^4\gamma}}\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\theta}\frac{\cos\theta}{\cos\gamma},\quad \tau=q_2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta} \tag{4.4}$$

$$\sigma_\theta=-p_2-\frac{\chi+\mu}{2A_0}\sqrt{1-\frac{q_1^2\sin^4\alpha}{L\sin^4\gamma}}\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma}\left(\ln\frac{\mathrm{tg}\,\theta/2}{\mathrm{tg}\,\beta/2}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}-\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}\right)$$

Перемещения u и v определяются согласно (4.3), а кольцевое перемещение

$$w=-\frac{2rq_2\sin^2\beta}{A_{22}-A_{23}}\sin\theta\left(\ln\frac{\mathrm{tg}\,\theta/2}{\mathrm{tg}\,\gamma/2}+\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)+Dr\sin\theta \tag{4.5}$$

Граничная поверхность между упругой и пластической зонами определяется соотношением

$$p_1-p_2=\frac{\chi+\mu}{2A_0}\sqrt{1-\frac{q_1^2\sin^4\alpha}{L\sin^4\gamma}}\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma}\left(\ln\frac{\mathrm{tg}\,\gamma/2}{\mathrm{tg}\,\beta/2}+\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}-\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{G}{2}}\left(2\ln\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{q_1^2\sin^4\alpha}{L\sin^4\gamma}}}{1+\sqrt{1-q_1^2/L}}+\sqrt{1-q_1^2/L}-\sqrt{1-\frac{q_1^2\sin^4\alpha}{L\sin^4\gamma}}\right) \tag{4.6}$$

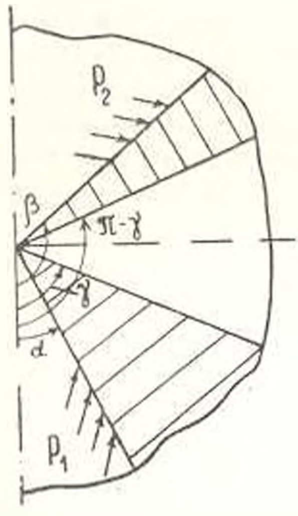
В случае $\beta\geqslant\pi/2$ (фиг. 4) может возникнуть двухстороннее пластическое состояние [8]. В пластической зоне $\alpha\leqslant\theta\leqslant\gamma$ напряжения и перемещения определяются прежними формулами (4.3), а в упругой зоне $\gamma\leqslant\theta\leqslant\pi-\gamma$ — формулами (4.4), (4.5). В пластической зоне $\pi-\gamma\leqslant\theta\leqslant\beta$ находим

$$\sigma_r=\sigma_\theta-\sqrt{\frac{G}{2}}\sqrt{1-\tau^2/L},\quad \sigma_\varphi=\sigma_\theta-\sqrt{2G}\sqrt{1-\tau^2/L}$$

$$\tau=q_1\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta},\quad \sigma_\theta=-p_2+\sqrt{\frac{G}{2}}\left(2\ln\frac{\sin\beta}{\sin\theta}+\right.$$

$$\left.+\ln\frac{1+\sqrt{1-q_2^2/L}}{1+\sqrt{1-\tau^2/L}}+\sqrt{1-\tau^2/L}-\sqrt{1-q_2^2/L}\right)$$

$$w=\frac{4rq_1\sin^2\alpha\sin\theta}{A_{22}-A_{23}}\left(\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}-\ln\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right)-$$



Фиг. 4

$$
-\frac{3r}{A_0 L q_1}\sqrt{\frac{G}{2}}\,\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}\,\frac{\sin\theta}{\cos\gamma}\sqrt{L-q_1^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\gamma}}\left(\sqrt{L-q_1^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\gamma}}-\right. \tag{4.7}
$$

$$
\left.-\sqrt{L-q_1^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\gamma}}\right)+Dr\sin\theta
$$

Перемещения u и v определяются согласно (4.3). В рассмотренном здесь случае параметр γ находим из соотношения

$$
p_1-p_2=\sqrt{\frac{G}{2}}\left[2\ln\frac{\sin^2\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}+\ln\frac{[1+\sqrt{1-(q_1^2\sin^4\alpha)/(L\sin^4\gamma)}]^2}{(1+\sqrt{1-q_2^2/L})(1+\sqrt{1-q_1^2/L})}+\right.
$$

$$
\left.+\sqrt{1-q_1^2/L}+\sqrt{1-q_2^2/L}\right]+\frac{\chi+\mu}{A_0}\sqrt{1-\frac{q_1^2\sin^4\alpha}{L\sin^4\gamma}}\,\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma}\ln\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+
$$

$$
+\left(\frac{\chi+\mu}{A_0}-\sqrt{2G}\right)\sqrt{1-\frac{q_1^2\sin^4\alpha}{L\sin^4\gamma}}
$$

Случай $\gamma=\pi/2$ соответствует предельному состоянию трубы.

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԵՎ ԿՈՆԱԿԱՆ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐԻ ԱՌԱՁԳԱՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ա. Գ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է օրթոտրոպ, հաստ պատերով գլանային խողովակի առաձգապլաստիկական վիճակը ներքին և արտաքին գլանային մակերևույթների վրա ազդող հավասարաչափ բաշխված նորմալ և շոշափող ուժերի, ճակատային հատույթների վրա կիրառված առանցքային ձգող ուժերի և ոլորող մոմենտների համատեղ ազդեցության տակ, ինչպես նաև անիզոտրոպ. Երկար կոնական խողովակի առաձգապլաստիկական վիճակը արտաքին և ներքին կողային մակերևույթների վրա ազդող հավասարաչափ բաշխված նորմալ և շոշափող ուժերի դեպքում։ Ընդունված է, որ նյութի անիզոտրոպության գլխավոր առանցքները համընկնում են, համապատասխանաբար, գլանային և գնդային կոորդինատների համակարգի առանցքների հետ։ Ստացված են արտահայտություններ, որոնք կապ են հաստատում արտաքին ուժերի և առաձգական ու պլաստիկ գոտիների սահմանի միջև։

THE ELASTOPLASTIC STATE OF ANISOTROPIC CYLINDRICAL AND CONICAL TUBES

A. G. HACOBIAN, M. A. ZADOYAN

Summary

The elastoplastic state of an orthotropic thick-walled cylindrical tube under the joint effect of uniformly distributed normal and tangential forces on internal ans external cylindrical surfaces, extending axial forces and twisting moments applied on end-face plane cross-section,

and the elastoplastic state of the anisotropic, long, conical tube under the uniform normal and tangential forces acting on internal and external lateral surfaces are considered. The main axes of anisotropy are assumed to coincide, respectively, with the axes of cylindric and spheric coordinates. The relations establishing a connection between external forces and the boundary between elastic and plastic zones have been obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Задоян М. А.* О некоторых решениях уравнений пластического течения анизотропной среды.—Изв. АН СССР. МТТ. Инж. ж., 1966, №2, с. 91—96.
2. *Колмогоров В. Л., Соловей В. Д.* К предельной нагрузке анизотропной трубы под внутренним давлением. Прикл. механика, 1975, т. 11, в. 7, с. 79—88.
3. *Cater E., Neale K. W.* Large strain inelastic behaviours of cylindrical tubes. —Intern. J. Solids and Struct., 1983, v. 19, № 8, p. 709—724.
4. *Sugimoto Masakatsu*, Itakura Joshikiyo. Saito Koichi. Изучение пластического поведения труб из анизотропного материала с открытыми и закрытыми концами под внутренним давлением „Нихон кикаи гаккай ромбунсю".—Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1973, 39, № 328, p. 3609—3618.
5. *Бочарова С. А.* Напряженное состояние цилиндра из анизотропного материала под действием внутреннего давления и осевой силы при больших пластических деформациях.—Изв. вузов. Машиностроение, 1971, №7, с. 5—10.
6. *Betten Josef, Frosch Hans-Georg.* Elastisch-plastisches Verhalten dickwandiger Zylinder unter Berücksichtigung der plastischen Anisotropie und der plastischen Kompressibilität. Forsch. Ingenieurw., 1983, 49, № 4, p. 112—116.
7. *Акопян А. Г.* Предельное состояние пластически анизотропной конической трубы.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1985, т. 38, №1, с. 20—32.
8. *Задоян М. А.* Упругопластическое состояние конической трубы.—Докл. АН СССР, 1983, т. 271, №1, с. 56—60.
9. *Задоян М. А.* Упругопластическое состояние толстостенной трубы.—Изв. АН СССР. МТТ, 1987, №4, с. 98—109.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
8.VII.1985