ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XL, № 1, 1987 Механика

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

АВЕТИСЯН А. С.

В электротехнике широко применяются регулярно слоистые среды, свойства которых меняются по нормали к поверхности. Для сред, не обладающих пьезоэлектрическим эффектом, в работе [5] исследована задача Лява в случае неоднородного слоя, лежащего на упругом однородном полупространстве. Рассмотрены два конкретных случая неоднородности слоя (линейная и экспоненциальная неоднородность) и получено дисперсионное уравнение относительно фазовой скорости поверхностной волны. В работе [6] исследовано распространение поверхностной сдвиговой волны типа SH в неоднородном полупространстве.

1. В настоящей работе рассматривается случай неоднородного пьезоэлектрического полупространства, неоднородность свойств которого локализована в приповерхностном слое толщины h, намного меньшей, чем длина поверхностной акустической волны $\lambda=2\pi/k$. Исходя из этого, решается модельная задача о распространении поверхностной сдвиговой волны типа SH, когда неоднородный пьезоэлектрический слой толщиной h граничит с однородным пьезополупространством. Рассматривается случай, когда слой и полупространство принадлежат одному из кристаллических классов 4, 4mm, тетрагональной или 6, 6 mm, гексагональной симметрии. Декартовая координатная система выбрана таким образом, что неоднородный слой занимает область $0\leqslant x_2\leqslant h$, а однородное полупространство — область $x_2\geqslant h$. Ось x_3 параллельна главным осям симметрии кристаллов. Уравнения электроупругости антиплоской деформации $u=[0; 0; u(x_1, x_2, t)]$ для пьезоэлектрических кристаллов из указанных классов совпадают [1]. Для однородного пьезоэлектрика они имеют вид

$$(1+\varkappa^2)c_{44}\nabla^2 u=\rho\ddot{u}, \quad \nabla^2\varphi=(e_{15}/\varepsilon_{11})\nabla^2 u \tag{1.1}$$

здесь $\varkappa^2=e_{15}^2/(\varepsilon_{11}c_{44})$ — коэффициент электромеханической связи пьезоэлектрика.

Уравнения упругости и электростатики при антиплоской деформации для неоднородного пьезоэлектрика, принадлежащего вышеуказанным классам, не разделяются

$$c_{44}(x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+e_{15}(x_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}=\rho(x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\qquad(1.2)$$

$$e_{15}(x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\varepsilon_{11}(x_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial D_2}{\partial x_2}=0\qquad(1.3)$$

Материальные соотношения для σ_{23} и D_2 имеют вид

$$\sigma_{23}=c_{44}(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}+e_{15}(x_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\quad D_2=e_{15}(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}-\varepsilon_{11}(x_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$$

На свободной границе неоднородного слоя $x_2=0$ механические напряжения отсутствуют, электрический потенциал и нормальная компонента электрической индукции непрерывны

$$\sigma_{23}^{(1)}=0;\quad \varphi_1=\varphi_0;\quad D_2^{(1)}=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}\qquad(1.4)$$

здесь φ_0 — потенциал внешнего электрического поля, который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi_0=0\qquad(1.5)$$

Индексами 0, 1, 2 будут отмечены величины, относящиеся соответственно к вакууму, слою и полупространству.

На границе $x_2=h$ выполняются: непрерывность перемещения, механического напряжения, электрического потенциала и нормальной компоненты вектора электрической индукции:

$$u_1=u_2,\quad \sigma_{23}^{(1)}=\sigma_{23}^{(2)},\quad \varphi_1=\varphi_2,\quad D_2^{(1)}=D_2^{(2)}\qquad(1.6)$$

Таким образом, искомая задача сводится к решению уравнений (1.1—1.3) и (1.5) с граничными условиями (1.4) и (1.6).

2. Тонкость неоднородного слоя позволяет принять допущения, что перемещение u_1 по толщине слоя не меняется, а электрический потенциал φ_1 меняется линейно [2, 3]. Исходя из (1.4) и (1.5), для u_1 и φ_1 будем иметь

$$u_1=Bu_1(x_1\, t),\quad \varphi_1(x_1,x_2,t)=\frac{x_2}{h}\left[\varphi_2(x_1,h,t)-\varphi_0(x_1,0,t)\right]+\varphi_0(x_1,0,t)\qquad(2.1)$$

Допущения, сделанные по отношению u_1 и φ_1, позволяют преобразовать граничные условия для механического напряжения и электрических характеристик [2, 3]. Задача приводится к решению уравнений однородного пьезополупространства (1.1) и уравнения Лапласа для φ_0 (1.5) с граничными условиями

$$c_{44}^{(2)}\frac{\partial u_2(x_1,h,t)}{\partial x_2}+e_{15}^{(2)}\frac{\partial\varphi_2(x_1,h,t)}{\partial x_2}+\frac{e_{15}^{**}}{h}\frac{\partial^2\varphi_2(x_1,h,t)}{\partial x_1^2}=\rho^*\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-$$

$$-c_{44}^{*}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}-e_{15}^{*}\frac{\partial^2\varphi_0(x_1,0,t)}{\partial x_1^2}+\frac{e_{15}^{**}}{h}\frac{\partial^2\varphi_0(x_1,0,t)}{\partial x_1^2}$$

$$e_{15}^{(2)} \frac{\partial u_2(x_1, h, t)}{\partial x_2} - \varepsilon_{11}^{(2)} \frac{\partial \varphi_2(x_1, h, t)}{\partial x_2} = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi_0(x_1, 0, t)}{\partial x_2} + \frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h} \frac{\partial^2 \varphi_2(x_1, h, t)}{\partial x_1^2} +$$

$$+ \left(\varepsilon_{11}^{*} - \frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_0(x, 0, t)}{\partial x_1^2} - e_{15}^{*} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \qquad (2.2)$$

$$\varphi_0(x_1, 0, t) - \varphi_2(x_1, h, t) = \frac{h^2}{\varepsilon_{11}^{*}} e_{15}^{(2)} \frac{\partial u_2(x_1, h, t)}{\partial x_2} - \frac{h^2}{\varepsilon_{11}^{*}} \varepsilon_{11}^{(2)} \frac{\partial \varphi_2(x_1, h, t)}{\partial x_2}$$

$$u_2(x_1, h, t) = B u_1(x_1, t)$$

здесь ρ^*, c_{44}^*, ε_{11}^*, e_{15}^*, ε_{11}^{**}, e_{15}^{**}—приведенные характеристики неоднородного слоя, которые определяются следующим образом:

$$a^* = \int_0^h a(x_2)\, dx_2, \qquad a^{**} = \int_0^h x_2 a(x_2) dx_2 \qquad (2.3)$$

Сделанные допущения в отношении u_1 и φ_1 позволяют получить дисперсионное уравнение относительно фазовой скорости, которое с учетом введенных обозначений принимает следующий вид:

$$(1+\varkappa_2^2)\left(1-\frac{v^2}{c_t^2}\right)^{1/2} + \frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(2)}} k \left(1-\frac{v^2}{c_*^2}\right) = \varkappa_2^2 \left(\frac{A_1+A_2}{A_3} - A_4\right) \qquad (2.4)$$

где $c_t^2 = (1+\varkappa_2^2) c_{44}^{(2)}/\rho_2$, $c_*^2 = c_{44}^*/\rho^*$, величины A_i зависят от электрических характеристик слоя и полупространства, а также от kh:

$$A_1 = \left(1 + \frac{e_{15}^{**}}{h e_{15}^{(2)}}\right) \left[\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}^{(2)}} + k\left(\frac{\varepsilon_{11}^*}{\varepsilon_{11}^{(2)}} - \frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h\varepsilon_{11}^{(2)}}\right)\right] - \left(1 + \frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h\varepsilon_{11}^{(2)}} k\right)\left(\frac{e_{15}^*}{e_{15}^{(2)}} - \frac{e_{15}^{**}}{h e_{15}^{(2)}}\right) k$$

$$A_2 = \left(\frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h\varepsilon_{11}^{(2)}} - \frac{e_{15}^*}{e_{15}^{(2)}}\right)\left[1 + \frac{e_{15}^{**}}{h e_{15}^{(2)}} k + \left(\frac{e_{15}^*}{e_{15}^{(2)}} - \frac{e_{15}^{**}}{h e_{15}^{(2)}}\right)\left(1 + \frac{h^2 \varepsilon_{11}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^*} k\right) k\right] k \qquad (2.5)$$

$$A_3 = 1 + \frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h\varepsilon_{11}^{(2)}} k + \left(1 + \frac{h^2 \varepsilon_{11}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^*} k\right)\left[\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}^{(2)}} + \left(\frac{\varepsilon_{11}^*}{\varepsilon_{11}^{(2)}} - \frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h\varepsilon_{11}^{(2)}}\right) k\right]$$

$$A_4 = \frac{e_{15}^{**}}{h e_{15}^{(2)}} k$$

Из условия затухания волн в глубине пьезоэлектрического полупространства для фазовой скорости получается $v < c_t$. Для существования решений дисперсионного уравнения (2.4), удовлетворяющих этому условию, характеристики свойств слоя и полупространства должны удовлетворять следующему неравенству:

$$\frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(2)}}\left(1 - \frac{c_t^2}{c_*^2}\right) k < \varkappa_2^2 \left(\frac{A_1 + A_2}{A_3} - A_4\right) < 1 + \varkappa_2^2 + \frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(2)}} k \qquad (2.6)$$

Очевидно, что выполнение неравенств (2.6) обусловлено соотношениями характеристик свойств неоднородного слоя и однородного полупространства. Следовательно, при некотором выборе неоднородности слоя может нарушиться правая или левая части неравенства (2.6). Оно может нарушиться также в зависимости от величины kh.

3. Рассмотрим частный случай, при котором неоднородность свойств пьезоэлектрического слоя по толщине меняется линейно таким образом, что на границе $x_2=h$ имеет место условие непрерывности электромеханических свойств слоя и полупространства. На $x_2=0$ $\rho^{(1)}$, $c_{44}^{(1)}$, $\varepsilon_{11}^{(1)}$, $e_{15}^{(1)}$ — характеристики неоднородного слоя. Тогда, неоднородность характеристик слоя описывается функциями

$$a(x_2)=(a_2-a_1)\frac{x_2}{h}+a_1 \tag{3.1}$$

где $a\in\{\rho,\ c_{44},\ \varepsilon_{11},\ e_{15}\}$.

В этом случае, с учетом формул (3.1) и (2.3) дисперсионное уравнение (2.4) преобразуется к следующему виду:

$$(1-V^2)^{1/2}+\frac{(1+\beta)kh}{2(1+\varkappa_2^2)}\left(1-\frac{(1+\varkappa_2^2)(1+\alpha)}{1+\beta}V^2\right)-\frac{\varkappa_2^2}{1+\varkappa_2^2}\left(\frac{A_1'+A_2'}{A_3'}-A_4'\right) \tag{3.2}$$

Здесь

$$A_1'=\eta+kh[2(\gamma-\delta)+\eta(2+\delta)]/6+k^2h^2(\gamma-\delta)/12$$

$$A_2'=kh(\gamma-3\delta-1)/6+(1+\delta)(\gamma-3\delta-1)k^2h^2/12+k^3h^3(1+2\delta)(\gamma-3\delta-1)/18(1+\gamma)$$

$$A_3'=1+\eta+kh[(1+\gamma)/2+2\eta/(1+\gamma)]+k^2h^2(1+2\gamma)/3(1+\gamma);\ A_4'=kh(2+\delta)/6 \tag{3.3}$$

$$\alpha=\rho_1/\rho_2,\quad \beta=c_{44}^{(1)}/c_{44}^{(2)},\quad \gamma=\varepsilon_{11}^{(1)}/\varepsilon_{11}^{(2)},\quad \delta=e_{15}^{(1)}/e_{15}^{(2)},\quad \eta=\varepsilon_0/\varepsilon_{11}^{(2)},\quad V=v/c_t$$

Условия существования поверхностных волн, скорость которых удовлетворяет неравенству $v<c_t$, в этом случае имеет следующий вид:

$$\frac{(1+\beta)-(1+\varkappa_2^2)(1+\alpha)}{2}kh\leqslant\varkappa_2^2\left(\frac{A_1'+A_2'}{A_3'}-A_4'\right)\leqslant1+\varkappa_2^2+\frac{1+\beta}{2}kh \tag{3.4}$$

Из формул (2.4)—(2.6) получаются аналогичные соотношения для случая, когда граничат однородные пьезоэлектрики—тонкий слой и полупространство. Соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$(1-V^2)^{1/2}+\frac{\beta}{1+\varkappa_2^2}kh\left(1-\frac{\alpha}{\beta}V^2\right)=\frac{\varkappa_2^2}{1+\varkappa_2^2}\left(\frac{A_1'+A_2'}{A_3'}-A_4'\right) \tag{3.5}$$

где

$$A_1'=\eta(1+\delta kh),\quad A_2'=(\gamma+\delta)(2+\delta kh)kh,\quad A_3'=1+\eta+(\gamma+\eta/\gamma)kh,\quad A_4'=\delta kh$$

Условие существования поверхностных волн в этом случае принимает вид

$$(\beta-\alpha)kh\leqslant\varkappa_2^2|(A_1'+A_2')/A_3'-A_4'|\leqslant1+\varkappa_2^2+\beta kh \tag{3.6}$$

В этом случае на границе $x_2=h$ имеет место разрыв между свойствами слоя и полупространства. Когда $\rho(x_2)=\rho_1$, $c_{44}(x_2)=c_{44}^{(1)}$, $e_{15}(x_2)=0$,

$\varepsilon_{11}(x_2) = \varepsilon_{11}^{(1)}$, получается задача о распространении поверхностных сдвиговых волн в слоистой среде: тонкий диэлектрический слой—пьезоэлектрическое полупространство [2].

Интересно сравнение законов дисперсии при этих двух частных случаях. Фазовая скорость определяется из (3.2) и (3.5), соответственно. Из (3.4) и (3.6) видно, что в этих случаях условие существования поверхностной волны неодинаковы. Следовательно, если в одном из этих случаев волны существуют, то в другом они могут не существовать и наоборот.

Пусть граничат два однородных пьезоэлектрических кристалла—полупространство из сульфида кадмия (CdS—класс 6mm гексагональной симметрии) и слой титаната бария ($BaTiO_3$—класс 4mm тетрагональной симметрии). При этом оси A_1 и A_2 направлены в противоположные стороны. Ось x_2 совпадает с A_1. Величины характеристик этих кристаллов приведены в таблице [4].

Таблица

	$c_{44} \cdot 10^{10}$ Па	$\rho \cdot 10^3$ кг/м^3	$\varepsilon_{11} \cdot 10^{-11}$ ф/м	e_{15} Кл/м^2	$\varepsilon_0 \cdot 10^{-11}$ ф/м
CdS	1.49	4.824	7.99	−0.21	0.885
$BaTiO_3$	5.43	6.02	1744	21.3	

Если формально не учитывать пьезоэффекта обеих сред, то поверхностные волны Лява не существуют. При учете пьезоэффекта условие существования поверхностных волн принимает вид (3.6). Это условие выполняется. При этом длина поверхностной волны удовлетворяет условию $\lambda > 4186.67\,h$. Если пьезоэлектрический слой имеет линейную неоднородность свойств такую, что на границе $x_2 = 0$ значения электромеханических характеристик совпадают со значениями пьезокристалла $BaTiO_3$, а на $x_2 = h$ — со значениями пьезокристалла CdS, то поверхностные волны Лява не возникают. Они отсутствуют и тогда, когда формально не учитываются пьезоэлектрические свойства обеих сред.

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՊԻԵԶՈԷԼԵԿՏՐԻԿ ՇԵՐՏԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ԼՅԱՎԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ

Ա. Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ պիեզոէլեկտրիկ շերտի հաստությունը փոքր է մակերևույթային ալիքի երկարությունից։ Հետազոտված է դիսպերսիայի ստացված հավասարումը։ Ստացված են Լյավի ալիքի գոյության պայմանները կամայական անհամասեռ բարակ շերտի դեպքում։ Դիտարկված է մակերևույթային ալիքի գոյության խնդիրը, երբ պիեզոէլեկտրիկ շերտի անհամասեռությունը գծային է։

LOVE'S ELECTRO ELASTIC SURFACE WAVES IN CASE OF INHOMOGENEOUS PIEZOELECTRIC LAYER

A. S. AVETISIAN

S u m m a r y

The case when the thickness of piezoelectric layer is lesser than the length of the surface wave is considered. The derived dispersion equation is investigated. The existence conditions of Love's surface wave are obtained for an arbitrary inhomogeneous thin layer. An example of surface wave existence in the case of linear inhomogenuity of the piezoelectric layer is examined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аветисян А. С.* К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1985, т. *38*, № 1, с. 12—19.
2. *Аветисян А. С.* Поверхностные сдвиговые волны в пьезоэлектрическом полупространстве с диэлектрическим слоем. Тезисы докладов III Всесоюзного Симпозиума «Теоретические вопросы магнитоупругости». Цахкадзор: Изд. ЕрГУ, 1984.
3. *Белубекян М. В., Геворкян А. В.* О магнитоупругих волнах Лява.—Математические методы и физико-механические поля. 1983, вып. 18, с. 55—57.
4. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
5. *Bakirtas I. et Maugin G. A.* Ondes de surface SH pures en élasticité inhomogène.—Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, v. 1, № 6, 1982, p. 995—1013.
6. *Bhattacharya S. N.* Exact solution of SH wave equation in transversely isotropic inhomogeneous elastic media.—Pure and Appl. Geophysics, 1972, v. 93, № 1, p. 19—35.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
24.V 1985