ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 1, 1987 Механика

УДК 624.04

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ПЕТРОСЯН Л. Г.

1. При построении расчетных динамических моделей строительных и машиностроительных конструкций часто используют априорные представления об их поведении при гармонических нагрузках, задаваясь той или иной формой комплексной жесткости или комплексной податливости. В частности, такой подход используется в известных гипотезах внутреннего трения Шлиппе-Бокка и Е. С. Сорокина [1], где комплексная жесткость вводится в различной форме в уравнения гармонических колебаний системы. Вместе с тем из теории динамических систем следует, что между вещественной $P(\omega)$ и мнимой $Q(\omega)$ частями передаточной функции физически реализуемой системы

$$\Phi(i\omega) = P(\omega) + iQ(\omega) \tag{1.1}$$

должны существовать следующие зависимости [2]:

$$P(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(\alpha)d\alpha}{\alpha-\omega}, \quad Q(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\alpha)d\alpha}{\alpha-\omega} \tag{1.2}$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения. Формулы (1.2) определяют собой преобразование Гильберта, вычисление которого представляет определенные трудности, поэтому непосредственная проверка однозначной связи между частотными характеристиками $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ для реальных систем затруднена.

В настоящей статье излагается способ вычисления преобразования Гильберта через преобразования Фурье функций $P(\omega)$ и $Q(\omega)$, что упрощает задачу, так как для преобразований Фурье имеются обширные таблицы. С помощью предложенного способа исследуется зависимость между параметрами комплексной жесткости для гипотез внутреннего трения Фохта и Е. С. Сорокина.

2. Преобразование Гильберта вытекает непосредственно из вещественной формы преобразования Фурье [3] и поэтому оригинал $s(\tau)$ и его преобразование Гильберта

$$S(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\tau)d\tau}{\tau-t} \tag{2.1}$$

оказываются связанными следующими формулами:

$$F_s(\alpha)=iF_S(\alpha)\,\mathrm{sign}\,\alpha, \quad F_S(\alpha)=-iF_s(\alpha)\,\mathrm{sign}\,\alpha \tag{2.2}$$

где

$$F_s(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\exp(i\alpha\tau)d\tau, \quad F_S(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} S(\tau)\exp(i\alpha\tau)d\tau \tag{2.3}$$

есть Фурье-преобразования функций $s(\tau)$ и $S(t)$ соответственно. Формула (2.3) позволяет произвести вычисление интегралов (1.2) и в тех случаях, когда известно одно из преобразований (2.3). Действительно, пусть известен интеграл $F_S(\alpha)$, тогда по формуле (2.2) мы можем вычислить $F_s(\alpha)$, а затем по формуле обращения

$$s(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F_s(\alpha)\exp(-i\alpha\tau)\,d\alpha \tag{2.4}$$

определить интересующую нас функцию $s(\tau)$. Во многих случаях вычисление интеграла (2.4) может оказаться более простой процедурой, чем вычисление преобразований (1.2). Рассмотрим несколько примеров вычисления преобразований Гильберта.

а) Пусть $S(t)=\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Тогда $\quad F_S(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad F_s(\alpha)=i\,\frac{\mathrm{sign}\,\alpha}{\sqrt{2\pi}}$

По формуле (2.4) получаем

$$s(\tau)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}\,\alpha\exp(-i\alpha\tau)\,d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\alpha\tau\,d\alpha=\frac{1}{\pi\tau}$$

Здесь использована известная из теории обобщенных функций формула [4]

$$\int_0^{\infty}\exp(i\xi x)d\xi=ix^{-1}+\pi\delta(x)$$

откуда следует

$$\int_0^{\infty}\sin\xi x\,d\xi=\frac{1}{x}, \quad \int_0^{\infty}\cos\xi x\,d\xi=\pi\delta(x)$$

Подставляя полученное выражение для $s(\tau)$ в (2.1), можно получить интегральное представление дельта-функции $\delta(t)$ в виде свертки двух функций $\frac{1}{\pi t}$

$$\delta(t)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau(t-\tau)}$$

Нетрудно также заметить, что полученная для $s(\tau)$ формула непосредственно следует из основного свойства дельта-функции. Действительно, из (2.1) следует, что

$$s(\tau)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(t)dt}{t-\tau}$$

и при $S(t)=\delta(t)$ сразу получаем $s(\tau)=\frac{1}{\pi\tau}$.

б) Если функция $S(t)$ имеет вид единичной функции Хевисайда $S(t)=H(t)$, то

$$F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\alpha)+i\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \tag{2.5}$$

Отсюда

$$s(\tau)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\tau\alpha}{\alpha}\,d\alpha \tag{2.6}$$

Полученный несобственный интеграл расходится и с точки зрения классического анализа не существует. Для придания этому интегралу смысла рассмотрим преобразование Фурье функции $|x|^{-2m-1}$.

Согласно [4] (с. 227) в приведенных выше обозначениях

$$F_{|x|^{-2m-1}}(\alpha)=\frac{\alpha^{2m}}{\sqrt{2\pi}}\left[c_0^{(2m+1)}-c_{-1}^{(2m+1)}\ln|\alpha|\right] \tag{2.7}$$

где

$$c_0^{(2m+1)}=\frac{2(-1)^m}{(2m)!}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2m}+\Gamma'(1)\right],\quad c_{-1}^{(2m+1)}=\frac{2(-1)^m}{(2m)!} \tag{2.8}$$

[5] $\Gamma'(1)=-C$, где $C=0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера.

Вместе с тем из (2.7) следует

$$F_{|x|^{-2m-1}}(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x\,dx}{x^{2m+1}} \tag{2.9}$$

откуда при $m=0$ получаем интеграл (2.6). Следовательно,

$$s(\tau)=-\frac{1}{2\pi^2}\left[1-C-\ln|\alpha|\right] \tag{2.10}$$

в) Рассмотрим теперь случай $S(t)=t^n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Имеем

$$F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}t^n\cos\alpha t\,dt \tag{2.11}$$

при четном n и

$$F_S(\alpha)=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}t^n\sin\alpha t\,dt \tag{2.12}$$

при нечетном n.

Вычисляя интегралы (2.5) и (2.6) ([3], 3. 761) и учитывая (2.2), находим при n четном и нечетном соответственно

$$F_c(\alpha)=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sign}\,\alpha\,\frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}}\cos\frac{(n+1)\pi}{2}$$

$$F_s(\alpha)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sign}\,\alpha\,\frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$$

Далее получаем при n четном

$$s(\tau)=\frac{2i\Gamma(n+1)\cos\dfrac{(n+1)\pi}{2}}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\cos\alpha\tau\,d\alpha}{\alpha^{n+1}} \tag{2.13}$$

Интеграл, входящий в (2.13), может быть вычислен по формуле (2.7). Учитывая (2.8) и обозначая $n=2m$, находим

$$\int\limits_0^\infty\frac{\cos\alpha\tau\,d\alpha}{\alpha^{2m+1}}=\frac{(-1)^m\tau^{2m}}{(2m)!}\left[1+\frac{1}{2}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{2m}-C-\ln|\tau|\right]$$

При нечетном n необходимо воспользоваться следующей формулой [4] (с. 218) с введением дополнительного множителя за счет различного обозначения преобразования Фурье

$$F_{c,\,x^{-2m}}(\alpha)=\frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}|\alpha|^{2m-1}\frac{\pi}{(2m-1)!}$$

Поскольку

$$F_{c,\,x^{-2m}}(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\cos\alpha x\,dx}{x^{2m}}$$

то

$$\int\limits_0^\infty\frac{\cos\alpha x\,dx}{x^{2m}}=\frac{(-1)^m\pi}{2(2m-1)!}|\alpha|^{2m-1}$$

3. Применим далее описанный выше способ вычисления преобразования Гильберта для анализа динамических систем с внутренним трением, описываемым гипотезами Фохта, Е. С. Сорокина и Шлиппе-Бокка [1].

Для простоты рассмотрим безынерционный упруговязкий элемент. Для элемента Фохта уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$cy+ky=q\exp(i\omega t)$$

и комплексная жесткость

$$K(\omega)=k+ic\omega$$

Действительная и мнимая части передаточной функции

$$P(\omega)=\mathrm{Re}K^{-1}(\omega)=\frac{k}{k^2+c^2\omega^2},\quad Q(\omega)=\mathrm{Im}K^{-1}(\omega)=-\frac{c\omega}{k^2+c^2\omega^2} \qquad (3.1)$$

Проверим, соблюдаются ли для характеристик (3.1) зависимости (1.2). Вычислим преобразование Фурье функции $P(\omega)$

$$F_P(\alpha)=\frac{k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\omega\alpha)d\omega}{k^2+c^2\omega^2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}c^{-1}\exp(-|\alpha|k\cdot c^{-1})$$

Следовательно,

$$F_Q(\alpha)=-i\,\mathrm{sign}\,\alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}}c^{-1}\exp(-|\alpha|k\cdot c^{-1})$$

и

$$Q(\omega)=-\frac{i}{2c}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}\,\alpha\exp(-|\alpha|k\cdot c^{-1}-i\alpha\omega)d\alpha=-\frac{\omega\cdot c}{k^2+\omega^2\cdot c^2}$$

т. е. приходим к функции $Q(\omega)$, задаваемой формулой (3.1). Таким образом, фохтовский элемент удовлетворяет условиям физической реализуемости.

Безынерционный элемент Е. С. Сорокина описывается дифференциальным уравнением гармонических колебаний

$$k(u+iv)y=q\exp(i\omega t) \qquad (3.2)$$

где корректно определяемые параметры комплексной жесткости имеют вид [6]

$$u=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}},\quad v=\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}$$

причем параметры u, v не зависят от частоты возмущения ω. Здесь γ — коэффициент потерь. Поскольку $u^2+v^2=1$, то для этой модели

$$P(\omega)=uk^{-1},\quad Q(\omega)=-vk^{-1} \qquad (3.3)$$

Следует отметить, что аналогичный вид имеет комплексная жесткость, соответствующая гипотезе Шлиппе-Бокка, согласно которой уравнение гармонических колебаний безынерционного элемента имеет вид

$$\frac{k\cdot\gamma}{\omega}\dot{y}+ky=q\exp(i\omega t)$$

Комплексная жесткость в этом случае

$$K(\omega)=k(1+i\gamma)$$

совпадает с комплексной жесткостью для гипотезы Е. С. Сорокина при часто применяемых в динамических расчетах значениях параметров $u=1$, $v=\gamma$.

Проверим, выполняются ли для характеристик (3.3) зависимости (1.2). Определим преобразование Фурье функции $P(\omega)$.

$$F_P(\tau)=\frac{u}{k\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega\tau)d\omega=\frac{u\sqrt{2\pi}}{k}\delta(\tau)$$

отсюда

$$F_Q(\tau)=-iuk^{-1}\sqrt{2\pi}\,\mathrm{sign}\,\tau\,\delta(\tau)$$

и

$$Q(\omega)=-\frac{iu}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}\,\tau\exp(-i\omega\tau)\delta(\tau)d\tau=0$$

Как видим, для этих моделей зависимости (1.2) не выполняются и, следовательно, эти модели не являются физически реализуемыми. Таким образом, приведенный способ вычисления преобразования Гильберта позволяет сравнительно легко производить анализ априорных моделей динамических систем, основанных на построении комплексной жесткости или комплексной податливости системы. Этот способ позволяет также аналитически определять одну из составляющих комплексной жесткости по экспериментально определенной другой составляющей.

ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՀԻԼԲԵՐՏԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՄԻ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Շարադրված է Հիլբերտի ձևափոխության հաշվման մեթոդը Ֆուրյեի ֆունկցիայի ձևափոխման միջոցով։ Առաջարկված մեթոդով հետազոտված է համալիրային կոշտության պարամետրերի միջև կախվածությունը Ֆոխտի և Սորոկինի ներքին շփման հիպոթեզի համար։

A METHOD OF APPLICATION OF GILBERT TRANSFORMATION FOR THE INVESTIGATION OF DYNAMIC SYSTEMS

L. G. PETROSIAN

S u m m a r y

A method of calculation of Gilbert transformation was set forth through Fourier transform function. With the help of the proposed method the dependence between the complex rough parameters for Focht's and Sorokin's internal friction hypothesis was studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Стройиздат, 1960. 131 с.
2. *Боде Т.* Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. М., 1948.
3. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
6. *Цейтлин А. И., Гусева Н. И.* Статистические методы расчета сооружений на групповые динамические воздействия. М.: Стройиздат, 1979.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
18.III.1985