

УДК 539.374

СХОДИМОСТЬ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО
 ПОЛЗУЧЕСТИ С НЕОДНОРОДНЫМ СТАРЕНИЕМ

КОЛОКОЛЬЧИКОВ В. В., МАКАРОВА Н. С.

При решении конкретных задач нелинейной вязкоупругости с неоднородным старением, когда возраст материала зависит от координат, возникает необходимость в оценке точности предлагаемого решения, сходимости метода последовательного приближения. В этом случае могут быть использованы приводимые ниже оценки. В работах [1, 2] доказывается сходимость метода (упругих решений) линейных вязкоупругих приближений [1] и метода последовательных приближений с интегральными преобразованиями [2] для нелинейных задач.

1. Пусть связь компонент девиатора напряжений S_{ij} с компонентами девиатора деформаций для определенности соответствует несжимаемой изотропной кубически нелинейной вязкоупругой среде в случае неоднородного старения

$$S_{ij}(t) = \sum_{\alpha=1}^3 2[R_{10}^{(\alpha)} \cdot R_2^{(\alpha)} \otimes e_{ij} + R_{30}^{(\alpha)} (R_1^{(\alpha)} \otimes e_{..})^2 R_1^{(\alpha)} \otimes e_{ij}] \quad (1.1)$$

Здесь и ниже приняты обозначения

$$R^{\alpha} \otimes e = \int_{-0}^t R(t-\tau) d\epsilon(\tau), \quad R(-0) = 0, \quad e(-0) = 0, \quad (e_{..})^2 = e_{ij} e_{ij}$$

$$R_{30}^{(\alpha)} = R_p^{(\alpha)}(t - \tau^0(x)), \quad p = 1; 3 \quad (1.2)$$

В формулах (1.1) $R_p^{(\alpha)}(t)$ ($p = 1; 3$) — функции, определяющие старение; $\tau^0(x)$ — момент изготовления материала в окрестности точки x [3]; $R_1^{(\alpha)}(t)$, $R_2^{(\alpha)}(t)$ — функции влияния, определяющие релаксационные свойства. Для композиционных неоднородных материалов функции влияния запишут явно от координат x . Значок \otimes обозначает действие интегрального свертывания. Четвертое равенство (1.2) определяет скалярный квадрат компонент тензора.

Уравнения равновесия, связь деформаций с перемещениями, граничные условия в напряжениях на части поверхности Σ_1 и в перемещениях на части поверхности Σ_0 запишутся в виде

$$S_{ij,j} = f_i; \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad e_{ii} = 0$$

$$S_{ij} n_j = \mathcal{P}_i, \quad x \in \Sigma_1; \quad u_i = u_{i0}, \quad x \in \Sigma_0 \quad (1.3)$$

$$f_i = -\rho F_i - \frac{1}{3} \varepsilon_{\alpha\alpha,i}; \quad \mathcal{F}_i = P_i - \frac{1}{3} \varepsilon_{\alpha\alpha} n_i$$

Здесь ρ — плотность массы, F_i — удельная массовая сила, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора напряжений, P_i — заданный на поверхности Σ_α с нормалью n_j вектор напряжений, u_α — заданные на поверхности Σ_α смещения.

Для решения полученной краевой задачи (1.1), (1.3) определим M (модифицированное) преобразование Лапласа-Карсона дивергента напряжений S_{ij} , задаваемого (1.1):

$$(MS_{ij})_j(p) = \sum_{\alpha=1}^3 2e_{ij}^{\alpha\alpha}(p) \{k_{ij}^{\alpha\alpha}(p) R_{ij}^{\alpha\alpha}(p) + R_{ij}^{\alpha\alpha}(p) [R_{ij}^{\alpha\alpha}(p)]^2 (e_{ij}^{\alpha\alpha}(p))^2\} \quad (1.4)$$

Здесь и ниже индексом α обозначается преобразование Лапласа-Карсона с параметром p . Заметим, что в (1.3) в силу последнего равенства (1.2)

$$R_{ij}^{\alpha\alpha}(p) = R_{ij}^{\alpha\alpha}(p) \exp[-p \cdot \alpha(x)], \quad l = 1; 3$$

По (1.3) для связей $S_{ij} \sim e_{ij}$ — суммы последовательных многократных сверток M -преобразование будет преобразованием Лапласа-Карсона, а для суммы произведений сверток (1.1), вообще говоря, отличным от последнего.

Поставим и соответственные краевой задаче (1.1), (1.3) краевую задачу фактивной кубически нелинейной упругости с определяющим соотношением (1.4)

$$(MS_{ij})_j = Mf_i; \quad e_{ij}^{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{\alpha\alpha} + u_{j,i}^{\alpha\alpha}), \quad e_{ii}^{\alpha\alpha} = 0$$

$$(MS_{ij}) n_j = M\mathcal{F}_i, \quad x \in \Sigma_\alpha; \quad u_i^{\alpha\alpha} = u_{i0}^{\alpha\alpha}, \quad x \in \Sigma_\alpha$$

Чтобы определить Mf_i и $M\mathcal{F}_i$, будем пользоваться рекуррентными формулами, связывающими величины при v -ом и $(v-1)$ -ом приближениях:

$$Mf_i^{(v)} = f_i^{(v)} + Mf_i^{(v-1)} - f_i^{(v-1)*}; \quad M\mathcal{F}_i^{(v)} = \mathcal{F}_i^{(v)} + M\mathcal{F}_i^{(v-1)} - \mathcal{F}_i^{(v-1)*} \quad (1.6)$$

$$f_i^{(v-1)} = S_{ij}^{(v-1)}; \quad \mathcal{F}_i^{(v-1)} = S_{ij}^{(v-1)} n_j; \quad f_i^{(v-1)*} = 0; \quad Mf_i^{(v-1)*} = 0; \quad \mathcal{F}_i^{(v-1)*} = 0; \quad M\mathcal{F}_i^{(v-1)*} = 0$$

Для реализации итерационного процесса необходимо в (1.4), (1.5) Mf_i , $M\mathcal{F}_i$, MS_{ij} , $e_{ij}^{\alpha\alpha}$, $u_i^{\alpha\alpha}$ заменить соответственно на $Mf_i^{(v)}$, $M\mathcal{F}_i^{(v)}$, $MS_{ij}^{(v)}$, $e_{ij}^{(v)\alpha\alpha}$, $u_i^{(v)\alpha\alpha}$. После определения из (1.4), (1.5), (1.6) $e_{ij}^{(v)\alpha\alpha}$, $u_i^{(v)\alpha\alpha}$ при помощи обратного преобразования Лапласа-Карсона находятся $e_{ij}^{(v)}$, $u_i^{(v)}$. Выражения $e_{ij}^{(v)}$ подставляются в (1.1) для определения $S_{ij}^{(v)}$. Далее $S_{ij}^{(v)}$ подставляются в третье и четвертое равенства (1.6) для нахождения $f_i^{(v)}$, $\mathcal{F}_i^{(v)}$ и т. д. Положив в (1.6), а также в других уравнениях $v = \infty$ и сделав над вторым и пятым равенствами (1.5) обратное преобразование Лапласа-Карсона $1_{i\alpha}$, с учетом использования

(1.1) для определения S_{ij} получим, что после бесконечного числа приближений система уравнений (1.1), (1.3) удовлетворяется. Но еще необходимо выяснить, при каких условиях итерационный процесс сходится к единственному решению. Только сходимость и скорость сходимости зависят от вида M -преобразования. Например, в качестве M -преобразования (1.1) можно было бы взять линейную по e_{ij} часть (1.4).

2. Для доказательства сходимости итерационного процесса необходимо записать уравнения (1.3) в интегральном по пространству виде

$$\int_V (MS_{ij})^{1/q}(u) e_{ij}(v) dV = \int_{\Sigma_0} \mathcal{F}_i v_i d\Sigma_0 - \int_V [f_i v_i + S_{ij}^{\pm}(u) e_{ij}(v)] dV \quad (2.1)$$

В формуле (2.1) фигурирует основная вектор-функция v_i , удовлетворяющая на Σ_0 условию: $v_i = 0$, $x \in \Sigma_0$, а

$$S_{ij}^{\pm}(u) = S_{ij}(u) - (MS_{ij})^{1/q}(u) \quad (2.2)$$

Делая над (1.4) обратное преобразование Лапласа-Карсона $1/\epsilon$, наведем ясный вид вспомогательных напряжений $(MS_{ij})^{1/q}$, входящих в (2.1), (2.2):

$$(MS_{ij})^{1/q} = \sum_{q=1}^{\Lambda} 2e_{ij} \otimes [R_{10}^{(q)} \otimes R_{10}^{(q)} + R_{30}^{(q)} \otimes R_{30}^{(q)} \otimes (R_{10}^{(q)} \otimes \epsilon_{ij} \otimes 1)] \quad (2.3)$$

Здесь и ниже введено обозначение

$$(e_i \otimes)^2 = e_i \otimes e_i, \quad (R \otimes)^2 = R \otimes R \quad (2.4)$$

Если подставить (2.2) в (2.1), то после уничтожения подобных членов со вспомогательными напряжениями, получается тождественное выражение с использованием формул Коши для $e_{ij}(v)$, условия $v_i = 0$, $x \in \Sigma_0$, первого и четвертого соотношений (1.3). Правая и левая части (2.1) могут быть представлены в виде скалярных произведений

$$(Q_1 u, v) = (Q_2 u, v) \quad (2.5)$$

$$(u, v) = \int_V e_{ij}(u) e_{ij}(v) dV; \quad \|u\|^2 = (u, u) \quad (2.6)$$

Запишем два разных условия сходимости а) и б). Если для любых дважды непрерывно дифференцируемых вектор-функций u_1, u_2 выполняются условия

а)

$$L_1 \equiv \{ |MS_{ij}(u_1)|^{1/q} - |MS_{ij}(u_2)|^{1/q} \}^2 \geq q_0^2 |e_{ij}(u_1 - u_2)|^2, \quad q_0 > 0 \quad (2.7)$$

$$L_2 \equiv |S_{ij}^{\pm}(u_1) - S_{ij}^{\pm}(u_2)|^2 \leq q_1^2 |e_{ij}(u_1 - u_2)|^2, \quad q_1 \geq 0 \quad (2.8)$$

или

б)

$$L_3 \equiv \{ |MS_{ij}(u_1)|^{1/q} - |MS_{ij}(u_2)|^{1/q} \}^2 \leq (q_0')^2 |e_{ij}(u_1 - u_2)|^2, \quad q_0' \geq 0 \quad (2.9)$$

$$L_4 \equiv |S_{ij}^{\pm}(u_1) - S_{ij}^{\pm}(u_2)|^2 \geq (q_1')^2 |e_{ij}(u_1 - u_2)|^2, \quad q_1' > 0 \quad (2.10)$$

и кроме того, начальное приближение $u^{(0)}$ таково, что

$$\|u^{(0)}\| < \frac{1-q}{q} r, \quad r \geq \|u - u^{(0)}\| \quad (2.11)$$

$$1 > q - \begin{cases} q_1/q_2 & \text{для а)} \\ q_0/q_1 & \text{для б)} \end{cases} \quad (2.12)$$

то метод последовательных приближений сходится к единственному решению.

Рассмотрим случай а). Соотношения (2.5) можно записать в обобщенном виде:

$$u = Qu, \quad Q = Q_1^{-1}Q_2$$

Из определения нормы и из условий (2.7), (2.8) получим

$$\|Q_2u_1 - Q_2u_2, v\|^2 \leq q_2^2 \|u_1 - u_2\|^2 \|v\|^2 \quad (2.13)$$

$$\|Q_2u_1 - Q_2u_2\| \leq q_2 \|u_1 - u_2\| \quad (2.14)$$

$$\|Q_1u_1 - Q_1u_2\|^2 \geq q_0^2 \|u_1 - u_2\|^2 \quad (2.15)$$

Из (2.15) и определения обратного оператора Q_1^{-1} вытекает

$$\|Q_1^{-1}u_1 - Q_1^{-1}u_2\| \leq \frac{1}{q_0} \|u_1 - u_2\| \quad (2.16)$$

Если в (2.16) вместо u_1, u_2 поставить соответственно Q_2u_1, Q_2u_2 и учесть (2.14), получим

$$\|Qu_1 - Qu_2\| \leq q \|u_1 - u_2\|, \quad q = \frac{q_1}{q_0} < 1 \quad (2.17)$$

Следовательно, оператор Q является сжимающим.

Аналогично в случае условий б) оператор Q' также будет сжимающим [2]: $Q'u = u$, $Q' = (Q_2)^{-1}Q_1$, где Q_1, Q_2 — операторы левой и правой части уравнения, получаемого из (2.1) переносом влево первых двух слагаемых в правой части.

Кроме того, по (2.11), (2.17) оператор Q (аналогично Q') переводит шар радиуса r с центром в точке $u^{(0)}$ в себя:

$$\|Qu - u^{(0)}\| \leq \|Qu - Qu^{(0)}\| + \|Qu^{(0)} - u^{(0)}\| \leq qr + q \frac{1-q}{q} r = r, \quad u^{(0)} = Q0.$$

Из принципа сжатых отображений вытекает, что предлагаемый метод последовательных приближений сходится к единственному решению. В работе [2] доказываются сходимость при более частных условиях, чем (2.8), (2.9).

3. Выясним, при каких ограничениях на функции влияния и процессы выполняются условия (2.7) — (2.12) сходимости метода последовательных приближений. Получим выражение для q_0 , входящего в (2.7). Будем исходить из предположения о малости шестых степеней деформаций по сравнению со вторыми

$$(R_{12} \otimes |e_{l_1}(u_1) \otimes|^2 \otimes e_{l_1}(u_1)) \ll [R_{12} \otimes e_{l_1}(u_1)]^2, \quad l=1; 2 \quad (3.1)$$

где проекционные ядра $R_{12}(t)$ и $R_{34}(t)$ определяются так:

$$R_{12}(t) = \sum_{q=1}^N 2R_{10}^{(q)} \otimes R_2^{(q)}, \quad R_{34}(t) = \sum_{q=1}^N 2R_{30}^{(q)} \otimes (R_4^{(q)} \otimes)^2 \quad (3.2)$$

В (3.1), (3.2) кроме обозначений (1.2), (2.4) используются обозначения

$$(R_4 \otimes)^2 = R_4 \otimes R_4 \otimes R_4 \quad (3.3)$$

С учетом оценки (3.1) и равенства (2.3) левая часть неравенства (2.7), обозначаемая через L_1 , эквивалентна выражению

$$L_1 = \left\{ \left[R_{12} + \frac{1}{2} R_{34} \otimes [(e_{l_1}(u_1) \otimes)^2 + (e_{l_1}(u_2) \otimes)^2] \right] \otimes e_{l_1}(u_1 - u_2) \right\}^2 + \\ R_{12} \otimes e_{l_1}(u_1 - u_2) | R_{34} \otimes [e_{33}(u_1 + u_2) \otimes e_{33}(u_1 - u_2)] e_{l_1}(u_1 + u_2) \quad (3.4)$$

Для оценки (3.4) применим к первому слагаемому в (3.4) один раз теорему о среднем для интегралов Стильтьеса, а к оставшейся части — четыре раза (под знаком четырех интегралов), предполагая монотонность деформаций со временем:

$$L_1 = \left\{ R_{12} + \frac{1}{2} R_{34} \otimes [(e_{l_1}(u_1) \otimes)^2 + (e_{l_1}(u_2) \otimes)^2] \right\} (\xi_r) e_{l_1}(t, u_1 - u_2) e_{l_1}(t, u_1 - u_2) + \\ + R_{12}(\xi_r) R_{34}(\xi_r) e_{33}(t, u_1 + u_2) e_{33}(t, u_1 - u_2) e_{l_1}(t, u_1 - u_2) e_{l_1}(t, u_1 + u_2) \\ 0 \leq t \leq \tau, \quad r = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (3.5)$$

В (3.5) ξ_r — неопределенные времена, появляющиеся из-за использования теоремы о среднем.

Первое слагаемое в (3.5) неотрицательно. Знак второго слагаемого может быть отрицательным. Поэтому для оценки L_1 снизу оценим первое слагаемое в (3.5) снизу и вычтем оценку модуля второго слагаемого сверху, используя при этом теорему Коши-Буняковского

$$|e_{33}(\xi_1, u_2) e_{33}(\xi_1, u_1)| \leq |e_{33}(\xi_2, u_2) e_{33}(\xi_2, u_1)|^{1/2} |e_{33}(\xi_1, u_1) e_{33}(\xi_1, u_1)|^{1/2}$$

В результате получим оценку (2.7), где

$$g_0^2 = \min \left\{ R_{12} + \frac{1}{2} R_{34} \otimes [(e_{l_1}(u_1) \otimes)^2 + (e_{l_1}(u_2) \otimes)^2] \right\}(\tau) - \\ - \max |R_{12}(\tau)| \max |R_{34}(\tau)| e_m^2, \quad e_m^2 = \max e_{33}(u_1) e_{33}(u_1), \quad l=1; 2 \quad (3.6)$$

Здесь функции R_{12} и R_{34} определяются при помощи (3.2). Аналогично с учетом (2.2), (1.1), (2.3) проводится оценка L_2 левой части (2.8). Кроме условия (3.1) использовалось условие малости шестой степени e_{ij} вида

$$|R_{34}(u_1) \otimes e_{ij}(u_1)| |R_{34}(u_1) \otimes e_{ij}(u_1)| \ll |R_{12} \otimes e_{ij}(u_1)| |R_{12} \otimes e_{ij}(u_1)|$$

где

$$R'_{31}(u_1) \otimes = \sum_{q=1}^N 2R_{30}^{(q)}(t) (R_4^{(q)} \otimes e_{L_1}(u_1))^2(t) \cdot R_4^{(q)} \otimes \quad (3.7)$$

Ядро оператора (3.7) обозначим через $R'_{31}(t, \tau, u_1)$. В результате получается оценка (2.8) для

$$q_1^2 = \max_{\tau} [R'_{12}(t, \tau)]^2 + 6 \max_{\tau} |R'_{12}(t, \tau)| R_{31m} \varepsilon_m^2 \quad (3.8)$$

Здесь ε_m определяется (3.6), а

$$R'_{12}(t, \tau) = \sum_{q=1}^N 2 [R_{10}^{(q)}(t) R_4^{(q)}(\tau) - (R_{10}^{(q)} \otimes R_4^{(q)})(\tau)] \\ R_{31m} = 2 \sum_{q=1}^N \max_{\tau} |R_{30}^{(q)}(\tau)| \max_{\tau} |R_4^{(q)}(\tau)|^2 \quad (3.9)$$

Таким же образом можно получить оценки (2.9), (2.10). При этом

$$(q_0)^2 = \max_{\tau} R_{10}^2(\tau) + 3 \max_{\tau} |R_{12}(\tau)| R_{31m} \varepsilon_m^2 \\ (q_1)^2 = \min_{\tau} \left\{ R'_{12}(t, \tau) + \frac{1}{2} |R'_{31}(t, \tau, u_1) + R'_{31}(t, \tau, u_2)| - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} R_{31} \otimes [(e_{L_1}(u_1) \otimes)^2 + (e_{L_1}(u_2) \otimes)^2](\tau) \right\}^2 - 2 \max_{\tau} |R'_{12}(t, \tau)| R_{31m} \varepsilon_m^2 \quad (3.10)$$

Здесь $R'_{31}(t, \tau, u_1)$ — ядро оператора (3.7).

В соответствии с доказанным в п. 2 метод будет сходящимся, когда в соответствии с (2.12) параметр q будет меньше единицы. При этом q_0, q_1, q_0', q_1' определяются по (3.6), (3.8), (3.10) и зависят от функций являния, учитывающих старение, линейной и кубически нелинейной теории. Оценки, а потому сходимость, зависят также от уровня деформаций ε_m , от характера во времени изменения деформаций (квадратная скобка в (3.6) и в (3.10), ядро оператора R'_{31} (3.7)). Неоднородности старения влияют на скорость сходимости не только из-за зависимости оценок от деформаций, но и явно, так как в силу обозначений (1.2) в оценки входит $\tau^0(x)$ — момент изготовления материала. От момента $\tau^0(x)$ зависят величины $R_{12}, R_{31}, R_{31}', R_{12}', R_{31m}$. При получении оценок отбрасывались инварианты шестой степени по деформациям. Заметим, что для кубической теории во внутренней энергии удерживают инварианты только до четвертой степени по деформациям. С этой степенью точности получилось, что если в линейной области материал нестареющий, то одно нулевое приближение дает практически точное решение даже, если в нелинейной области материал стареющий. Это следует из того, что при $R_{10}^{(q)}(t) = R_{10}^{(q)h}(t)$, где $h(t)$ — функция Хевисайда, $R_{12}(t, \tau) = 0$ в (3.9) и по (3.8), (2.12) имеем $q_1 = 0$ и $q_0 = 0$. Этот результат — довод в пользу использования метода M -преобразования для учета нелинейности и старения в области нелинейности наиболее быстрым образом. Метод последовательных приближений сходится за одно приближение еще в одном случае, когда $q = 0$

при $q_n^* = 0$. Из (3.10) и (3.2) вытекает, что для этого нужно, чтобы равнялось нулю линейное проекционно-ядро $R_{12}(t) = 0$. Это возможно, например, когда в (3.2) $N=2$, $\varphi(x) = 0$, $R_{10}^{(1)}(t) = R_2^{(1)}(t)$, $R_{20}^{(2)}(t) = -R_2^{(2)}(t)$. Практически более важными являются оценки (2.7), (2.8), (3.6), (3.8).

4. В качестве примера рассматривались процессы деформирования неоднородно стареющего бетона

$$\epsilon = \epsilon_{ij}(t) = -\epsilon_m [1 - \exp(-\lambda t)], \quad \epsilon_{ij} = 0, \quad ij \neq 12, 21 \quad (4.1)$$

Здесь λ — величина порядка скорости деформирования, $\epsilon_m = 10^{-2}$ — максимальная деформация. Из-за малого интервала времени рассмотрения ($\max t = 50$ сут) в модели (1.1) ограничивались случаем $N=1$.

Функции релаксации напряжений бетона получались аппроксимацией моделью вида (1.1) функций релаксаций напряжений, являющихся резольвентами [4] в линейной области функций ползучести, предложенных Н. Х. Арутюняном [4]:

$$K(t, \tau) = G(\tau) + \varphi(\tau)[1 - \exp(-\gamma t)] \\ \varphi(\tau) = C_0 + A_1/(\tau + 20), \quad G(\tau) = G_\infty \{1 - \exp[-\beta(\tau + 20)]\}$$

Здесь отсчет времени отличается от отсчета времени от незатвердевшего состояния бетона на 20 сут. Для бетона принято [5]:

$$C_0 = 0,9945 \cdot 10^{-10} (\text{Па})^{-1}, \quad A_1 = 4,714 \cdot 10^{-10} \text{ сут/Па}, \quad \gamma = 0,03 \text{ 1/сут}, \quad G_\infty = \\ = 2,548 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \nu = 0,17, \quad \beta = 0,206 \text{ 1/сут}.$$

Здесь ν — постоянный коэффициент Пуассона.

В нелинейной области сжатия бетона принято, что функции нелинейной и линейной ползучести пропорциональны с коэффициентом $10^{-18} (\text{Па})^{-2}$, что на деформациях ϵ_m соответствует нелинейному эффекту в 30%. Функция $R_{20}^{(1)}(t)$, определяющая старение в нелинейной области, принималась пропорциональной функции $R_{10}^{(1)}(t)$ старения в линейной области деформирования, а функции релаксации напряжений в нелинейной и линейной областях связывались так:

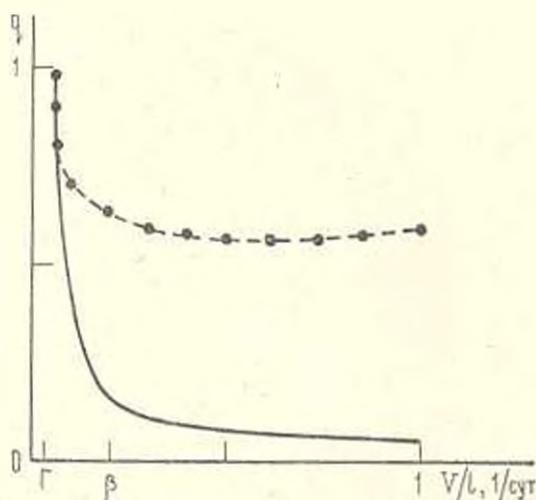
$$R_2^{(2)}(t) = [R_1^{(1)}(t)]^2$$

Скорость релаксации Γ функции $R_1^{(1)}(t)$ для нелинейной области деформирования отличается от γ ($\Gamma = 0,0335 \text{ 1/сут}$).

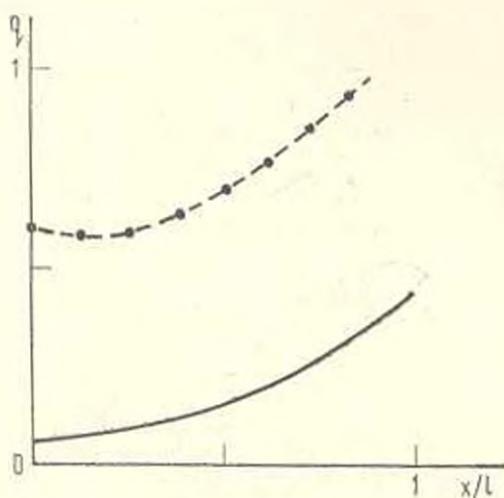
Наращивание бетона происходит с постоянной скоростью v вдоль оси x образца ($v = x/t_0$). Определим малый параметр q , характеризующий сходимость, по оценкам (2.12), (3.6), (3.8) в частном случае, когда $n_1 = n_2$. Для такого дифференциального (см. (2.7), (2.8) при $n_1 = n_2$) малого параметра в нелинейном случае оценки зависят от одной скорости деформирования λ .

На фиг. 1—3 приводятся кривые зависимостей дифференциального малого параметра q , определяющего сходимость процесса последовательных приближений, от погонной скорости наращивания образца,

от безразмерной координаты образца, от скорости деформирования в линейной и нелинейной областях неоднородно стареющего бетона в момент $t=50$ сут. На фиг. 1—2 скорости деформирования Λ выбраны в случаях наибольших значений q (для других скоростей Λ сходимость лучше). Из графиков следует, что нелинейность, вообще говоря, ухудшает сходимость. Значение q на фиг. 3 медленно изменяется в нели-

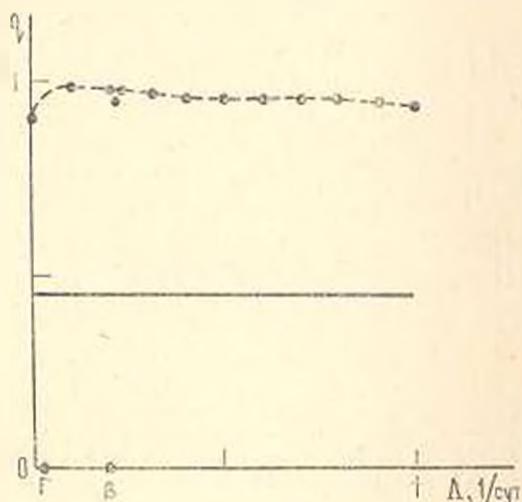


Фиг. 1. Зависимости малого параметра при сдвиге бетона ($x=l$, $\Lambda=0,0334$ 1/сут, $t=50$ сут) от погонной скорости его наращивания в линейной области (—) и нелинейной области (-•-)



Фиг. 2. Зависимости малого параметра при сдвиге бетона ($v/l=0,1$ 1/сут, $\Lambda=0,033$ 1/сут, $t=50$ сут) от безразмерной координаты наращиваемого образца в линейной области (—) и нелинейной области (-•-)

нейном случае кроме двух интервалов (практически меры нуля) при $\Lambda \cong \beta$ и при $\Lambda \cong \Gamma$. Достаточные оценки работы (особенно из-за слагаемых со знаком минус в (3.6)) должны быть улучшены. Недостаток оценок (2.7) — (2.10), (3.6), (3.8) заключается в том, что условие выпуклости оператора Q формулируется в сравнении функций вязкоупругости с квадратичными формами деформаций, характерных для упругости. Поэтому сходимость метода последовательных приближений, на



Фиг. 3. Зависимости малого параметра при разрыве бетона ($\nu = 1$, $\nu_1 = 0,1$ 1/сут, $t = 50$ сут) от скорости деформирования в линейной области (—) и нелинейной области (---)

самом деле, гораздо лучше, чем сходимость, определяемая малым параметром q , представленным на фиг. 1—3. Из зависимостей фиг. 1 видно, что существенная разница в скоростях сходимости в линейном и нелинейном случаях для однородно стареющего материала (большие ν, t) уменьшается до нуля для материалов, полученных медленным наращиванием ($\nu, t < 0,08$ 1/сут). При больших скоростях наращивания ($\nu, t \approx 2$) скорость сходимости приближений практически не зависит от скорости наращивания. Сходимость в зоне образца, выполненного из мало состарившегося материала, хуже (фиг. 2). В линейном случае сходимость не зависит от скорости деформирования (фиг. 3); в нелинейном случае эта зависимость выражена практически слабо.

**ԱՆՀԱՄԱՍԵՆԻ ԾԵՐԱՑՈՒՄՈՎ ԱԶ ԳԾԱՅՐՆ ՍՈՂՔԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ
ԼՈՒՍՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ ԶՈՒԳԱՄԻՏՅՈՒԹՅՈՒՆԸ**

Վ. Վ. ԿՈՐԿՈՆՅԱՆՈՎ, Ի. Ս. ՄԱՍԿՈՎԱ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Անհամասենի ծերացումով խորանարդ ոչ դժային մացուծիկառածական կոնկրետ խնդիրների լուծման ժամանակ, երբ նյութի հասակը կախված է կորրգինատներից, անհրաժեշտություն է առաջանում լուծման ճշտության

և մեթոդի զուգամիտության գնահատականներ: Աշխատանքում ստացված են կորիզի, ուլաբացիայի, ծերացման պրոցեսների համար պայմաններ, որոնց կատարման դեպքում ինտեգրալ ձևափոխություններով հաջորդական մոտավորությունների մեթոդը զուգամիտում է: Արդյունքները կիրառված են դեֆորմացիայի և նյութի աճեցման աճից կախված, զուգամիտությունը որոշող փոքր պարամետրով բևտոնի օրինակի վրա:

CONVERGENCE DURING NONLINEAR CREEPAGE WITH HETEROGENEOUS AGING

V. V. KOLOKOLCHIKOV, I. S. MAKAROVA

S u m m a r y

During the solution of concrete problems of cubic nonlinear viscoelasticity with heterogeneous aging, when age of the material depends on the coordinates, it becomes necessary to estimate the accuracy of the solution and the convergence of the method. In the present paper conditions for processes, relaxation nuclei and aging were obtained. During the realization of these conditions a consecutive approximation method with integral transformations has been converged. The results are illustrated on the example of concrete with the dependence of small parameter which defines the convergence. This dependence in its turn depends upon rate deformation, material rate joint during sample production, coordinates of heterogeneously aging material in the one-dimensional problem.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Певедря Б. Е. О сходимости метода упругих решений в нелинейной вязкоупругости.—Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 2, с. 307—310.
2. Колокольчиков В. В. О сходимости метода последовательных приближений с интегральными преобразованиями для задач нелинейной вязкоупругости.—Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 2, с. 325—329.
3. Арутюнян Ш. А. Об уравнениях состояния в нелинейной теории ползучести неоднородно стареющих тел.—Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 3, с. 559—562.
4. Арутюнян Ш. А. Некоторые вопросы ползучести. М.: Гостехиздат, 1952. 323 с.
5. Александровский С. В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом ползучести. М.: Стройиздат, 1973. 432 с.

Куйбышевский государственный
университет

Поступила в редакцию
3.IV.1981