

УДК 536.1

УРАВНЕНИЕ КОРОТКИХ ВОЛН ДЛЯ СМЕСИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

БАГДОЕВ А. Г., ГУРГЕЯН А. А.

В связи с развитием в последнее время газодинамических лазеров несомненно представляет большой практический интерес изучение нелинейных волновых процессов в окрестностях слабых ударных волн, распространяющихся в диспергирующих средах с малой диссипацией. Учет соответствующих членов с высшими производными, а также допущение о медленном изменении амплитуды, волнового числа и других величин, характеризующих волну на расстояниях и за время одного периода колебания, приводит к совершенно новым эффектам, таким как самофокусировка волновых лучей, интенсивно изучаемая в настоящее время.

Как указывается в работе [1], при работе газодинамических лазеров в потоке возможно появление жидких и твердых частиц конденсата, нарушающих гомогенность активной среды. Распространение ударных волн в таких средах имеет диссипативный и дисперсионный характер. Все эти факторы в той или иной мере влияют на мощность генерации и фазовые характеристики излучения.

Оценку этих факторов можно получить рассмотрением приближенных нелинейных уравнений движения жидкости в областях более интенсивного изменения параметров среды (области коротких волн).

Получение нелинейных уравнений коротких волн для произвольной среды дается в работах [2, 3]. Конкретизация коэффициентов этих уравнений для магнитной газодинамики, а также химически активной среды в магнитном поле как для стационарных, так и для нестационарных задач дается в [4, 5, 6].

В настоящей статье, в первой части, дается получение этих уравнений для реальной смеси с пузырьками газа и при наличии твердых сферических включений под действием внешнего магнитного поля.

Во второй части статьи выводится уравнение модуляции и интегрируется для осесимметричной задачи, что дает возможность исследования самофокусировки волновых пучков.

1. *Получение уравнений коротких волн.* Для произвольной недиссипативной среды эти уравнения имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial v_{z_2}}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z} \frac{\partial v_{z_3}}{\partial x_3} \right) - u \frac{d \ln \rho}{dt} = \\ = -(\kappa + 1) \frac{\mu}{H_1} \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v_{z_1}}{H_1 \partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial v_{z_2}}{H_1 \partial z}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u — проекция на нормаль к волне возмущенной скорости частиц, t — время, H_z — нормальная скорость волны в линейном приближении, v_x, v_z — функции, смысл которых выясняется из проекций уравнения среды на направления y, z , касательные к волне, τ — время пробега волны в линейном приближении от ее положения в момент t до данной точки (эйконал), $\tau = \tau(\beta, \gamma)$ — дисперсионное уравнение, x_1, x_2 — координаты, отсчитываемые вдоль волны, $\bar{\varphi}$ — лучевое решение, $(\tau - 1)u$ дает нелинейный добавок в формуле нормальной скорости волны, а также включает формально диссипативные эффекты.

Вначале рассмотрим задачу определения вида уравнения (1.1) для химически активной смеси с пузырьками газа во внешнем однородном магнитном поле с напряженностью B_0 . При этом предполагаем, что происходит только одна химическая реакция.

Уравнения движения такой среды можно взять в виде [7, 8]

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} &= 0, \quad \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \frac{1}{2\pi\rho} \operatorname{rot} \bar{H} \times \bar{H} + \\ &+ \frac{\gamma}{\rho} \Delta \bar{v} + \frac{1}{\rho} \left(\xi + \frac{\gamma}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{v} \\ \frac{d\bar{H}}{dt} - \operatorname{rot} (\bar{v} \times \bar{H}) &= -\operatorname{rot} (\nu_m \operatorname{rot} \bar{H}) \\ \operatorname{div} \bar{H} &= 0 \\ \rho T \frac{ds}{dt} + Q \frac{dq}{dt} &= k \Delta T + \sum \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\xi - \frac{2}{3} \tau \right) (\operatorname{div} \bar{v})^2 + \\ &+ \frac{\nu_m}{4\tau} (\operatorname{rot} \bar{H})^2 + \nu D \Omega \operatorname{div} A - DA - \nu \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} (\Omega \nu + \nu \Omega) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\rho \mu \frac{dc}{dt} - Q \frac{dq}{dt} = \mu \operatorname{div} (\nu DA), \quad T ds = de - p dV - \nu dc$$

$$\rho = \rho_f (1 - \beta); \quad p_g R_0 = \text{const}, \quad \frac{\rho_f^{1/3} \beta}{\rho_f (1 - \beta)} = \text{const}$$

где p — давление в смеси, p_g — давление в газовом пузырьке, ρ — плотность смеси, ρ_f — плотность в жидкости, v — скорость, T — температура, s — энтропия, Q — средство химической реакции, μ — химический потенциал, c — концентрация, τ, ξ — коэффициенты вязкости, ν_m — коэффициент магнитной вязкости.

Предполагая, что газовая и жидкая фазы движутся с одинаковой скоростью и считая, что расстояние между пузырьками много больше радиуса R пузырька, можно пренебречь взаимодействием между ними и пульсации пузырька описать уравнением [8]

$$p_g - p = \rho_f R_0 \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{3}{2} \nu_f \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 + \frac{4}{R} \nu \frac{\partial R}{\partial t} \quad (1.3)$$

При течении релаксирующих сред различаются квазизамороженный и квазиравновесный процессы распространения возмущений и соответственно различные скорости звука a_f , a_r . Несомненный интерес представляют среды, в которых предельные скорости близки друг другу [9]. Исследуем квазиравновесный случай, остальные получаются аналогично.

В этом случае основными переменными считаются плотность ρ , давление p и химическое средство Q . Используя уравнение [9]

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_{\rho, Q} \left[dp - a^2 d\rho - \left(\frac{\partial p}{\partial Q} \right)_{\rho, s} dQ \right] \quad (1.4)$$

а также (1.3), систему уравнений (1.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dp_g}{dt} + \rho a^2 \operatorname{div} \bar{v} &= \left(\frac{\partial p}{\partial Q} \right)_{\rho, s} \frac{dQ}{dt} + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_{\rho, Q}^{-1} \frac{ds}{dt} \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \Delta p_g - \frac{R_0^2}{3\gamma p_{R_0}(1-\beta_0)} \nabla \frac{\partial^2 p_g}{\partial t^2} - \frac{4}{R} \nu \frac{R_0}{3\gamma p_{R_0}} \nabla \frac{\partial p_g}{\partial t} + \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \operatorname{rot} \bar{H} \times \bar{H} + \frac{\chi}{\rho} \nabla \bar{v} + \frac{1}{\rho} \left(\xi + \frac{\chi}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{v} \\ \frac{d\bar{H}}{dt} - \operatorname{rot} (\bar{v} \times \bar{H}) &= \nu_m \nabla^2 \bar{H}, \quad \operatorname{div} \bar{H} = 0 \\ \frac{ds}{dt} + \frac{Q}{\rho T} \frac{dq}{dt} &= \frac{k}{\rho T} \Delta T + \frac{D\Omega}{T} \left(\Delta c + \frac{k_T}{T} \Delta T + \frac{k_p}{p} \Delta p \right) \\ \frac{dc}{dt} - \frac{\nu}{\rho} \frac{dq}{dt} &= D \left(\Delta c + \frac{k_T}{T} \Delta T + \frac{k_p}{p} \Delta p \right) \end{aligned}$$

где

$$A = \operatorname{grad} c + \frac{k_T}{T} \operatorname{grad} T + \frac{k_p}{p} \operatorname{grad} p, \quad \Omega = k_T \left(\frac{\partial c}{\partial c} \right)_{T, p} - T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{\rho, c} \quad (1.5)$$

Переходя в уравнениях (1.5) к системе подвижных координат x_1 , x_2 , x_3 , связанной с волной, где x_1 направлено по нормали к волне, плоскость x_2, x_3 проходит через начальное магнитное поле B_0 , ось x_2 перпендикулярна магнитному полю, и оставляя в правых частях величины основного порядка, можно получить уравнение нелинейных характеристик, заменяя $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\lambda$, $\nabla \rightarrow \vec{n}\delta$, $\Delta \rightarrow \delta^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)$, где \vec{n} — единичный вектор по нормали к характеристической поверхности, λ — нормальная скорость распространения

$$-c_n \delta p_g + \rho a^2 \delta u = \Phi_1, \quad -c_n \delta v + \frac{1}{\rho} \vec{n} \delta p_g - \frac{H_n}{4\pi\rho} \delta H + \frac{1}{8\pi\rho} \vec{n} \delta H^2 = \Phi_2 \quad (1.6)$$

$$-c_n \delta \bar{H} - H_n \delta \bar{v} + \bar{H} \delta u = \Phi_3, \quad \delta H_n = 0$$

где

$$\Phi_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial Q} \right)_{\rho, s} \frac{dQ}{dt} + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_{\rho, Q}^{-1} \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{\Phi}_2 = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\rho} \left(\varepsilon + \frac{\eta}{3} \right) \vec{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{4}{R} \frac{R_0}{3\gamma\rho_0} \vec{n} \partial^2 \rho_2 - \frac{R_0^2}{3\gamma\rho_0(1-\beta_0)} \lambda^2 \vec{n} \partial^2 \rho_2, \quad \vec{\Phi}_3 = \gamma_n \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x_1^2} \quad (1.7)$$

c_n — скорость распространения магнитозвуковой волны для недиссипативной среды.

Решая (1.6) относительно $\delta \vec{v}$, можно получить

$$-c_n \delta \vec{v} + \frac{\vec{n}}{\rho c_n} (\rho a_0^2 \delta v_n - \Phi_1) - \frac{H_n}{4\pi\rho} \left(-\frac{H_n}{c_n} \delta \vec{v} + \frac{H}{c_n} \delta v_n - \frac{1}{c_n} \vec{\Phi}_3 \right) + \frac{\vec{n}}{4\pi\rho} \left\{ -\frac{H_n}{c_n} \left[\frac{H_n}{\rho c_n^2} (\rho a_0^2 \delta v_n - \Phi_1) - \frac{\vec{\Phi}_2 H}{c_n} \right] + \frac{H^2}{c_n} \delta v_n - \frac{\vec{\Phi}_2 H}{c_n} \right\} \quad (1.8)$$

Проектируя это уравнение на нормаль к волне, получим

$$c_n^1 - c_n^2 \left(a_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho_0} \right) + \frac{H_n^2}{4\pi\rho_0} a_0^2 = \frac{1}{\lambda v_n} \Phi \quad (1.9)$$

где

$$\Phi = \left(\frac{H_n^2}{4\pi\rho_0} - \frac{c_n^2}{\rho_0} \right) \Phi_1 + \frac{H_n}{4\pi\rho_0} c_n^2 \Phi_2 + \frac{H_n c_n}{4\pi\rho_0} \vec{\Phi}_2 \vec{H} - \frac{c_n^2}{4\pi\rho_0} \vec{\Phi}_3 \vec{H} - \Phi_2 a_0 c_n^3$$

Вводя обозначения

$$\vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \quad \rho = \rho + \rho', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad T = T_0 + T' \quad (1.10)$$

$$\vec{H} = \vec{B}_0 + \vec{b}, \quad c_n = C_n + (i+1) u_n, \quad a_0 = a_{00} + (2^0 - 1) \frac{\rho'}{\rho_0 a_0}$$

$$a^0 = \left(\frac{\partial \rho a}{\partial \rho} \right)_{\rho = \rho_0}$$

где u , ρ' , ρ' , T' , b — есть малые возмущенные значения и учитывая, что $\partial_1 \partial x_1 \gg \partial_1 \partial x_2 \gg \partial_1 \partial x_3$, можно в порядке $\partial u / \partial x_1$ получить условия совместности на линейных характеристиках для недиссипативной среды в виде ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и принято $B_{0z} = 0$)

$$u_x = C_n \frac{\rho'}{\rho_0 a_0}, \quad u_y = -\frac{B_{0x}}{B_{0y} C_n} (C_n^2 - a_0^2) \frac{\rho'}{\rho_0 a_0}, \quad b_y = \frac{4\pi\rho_0}{B_{0y}} (C_n^2 - a_0^2) \frac{\rho'}{\rho_0 a_0} \quad (1.11)$$

Используя (1.11), из (1.9) можно найти:

$$\lambda + 1 = a^0 \frac{C_n^2 - a_0^2}{\Omega_1} + \frac{3}{2} \frac{C_n^2 - a_0^2}{\Omega_1} + \frac{1}{C_n \Omega_1 u_n} \frac{\Phi}{\delta u_n}, \quad \Omega_1 = 2C_n^2 - a_0^2 - a_1^2 \quad (1.12)$$

Чтобы вычислить диссипативный член Φ , допускается аналитическая зависимость q от Q [9]

$$\frac{dq}{dt} = -H(\rho, c)Q, \quad H(\rho, c) = \frac{H'}{\gamma'}, \quad H' \sim 1 \quad (1.13)$$

Учитывая, что для квазиравновесного процесса $L/c_n \tau' \gg 1$, где L и τ' — характерные длина и время, и $Q \ll q$, а также зависимость

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s,Q} \left[dp - \frac{1}{x_c} a_c^2 dq - \left(\frac{\partial p}{\partial Q} \right)_{s,T} dQ \right]; \quad x_c = \frac{C_p Q}{C_v Q}$$

нетрудно получить условия совместности для c , T , Q , q

$$c' = \left(\frac{\partial c}{\partial p} \right)_{Q,s} p', \quad T' = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{Q,p} \left(1 - \frac{1}{x_c} \right) p', \quad Q = \frac{C_n}{H_1} \frac{\partial q}{\partial x_1} \quad (1.14)$$

$$q' = \frac{p_0}{v} \left(\frac{\partial c}{\partial p} \right)_{Q,s} \frac{1}{a_c^2} p', \quad \frac{dQ}{dt} = - \frac{C_n^2}{H_1} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2}$$

и диссипативный член Φ в виде

$$\Phi = A \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + A^* \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} \quad (1.15)$$

где

$$A = \left(\frac{B_{0x}^2}{4\pi \rho_0^2} - \frac{C_n^2}{\rho_0} \right) A_1 - \frac{1}{4\pi \rho_0} A_2 + A_3$$

$$A_1 = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_{s,Q}^{-1} \left[\frac{k}{\rho_0 \gamma_0} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s,Q} \left(1 - \frac{1}{x_c} \right) + \frac{L \Omega}{T_0} \left(\frac{\partial c}{\partial p} \right)_{Q,s} \frac{1}{a_0^2} + \frac{k_p}{p} + \right.$$

$$\left. + \frac{k_T}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{Q,s} \left(1 - \frac{1}{x_c} \right) \right] - \left(\frac{\partial p}{\partial Q} \right)_{s,s} \frac{C_n^2}{H_1} \frac{p_0}{v} \left(\frac{\partial c}{\partial p} \right)_{s,Q} \frac{1}{a_0^2}$$

$$A_2 = 4\pi \nu_m \frac{C_n^2 (C_n^2 - a_0^2)}{a_0^2}$$

$$A_3 = \left(\frac{B_{0x}^2}{4\pi \rho_0} - C_n^2 \right) \left[\frac{1}{\rho_0} \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{C_n^2}{\rho_0 a_0^2} + \frac{4}{3} \frac{\nu C_n}{\gamma p_0} - \frac{\eta}{\rho_0} \frac{B_{0x}^2}{4\pi \rho_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{C_n^2 - a_0^2}{\rho_0 a_0^2} \right], \quad A^* = - \frac{R_{0x}^2 C_n}{3\gamma p_0 (1 - \rho_0)} \left(\frac{B_{0x}^2}{4\pi \rho_0} - C_n^2 \right)$$

Нелинейное уравнение коротких волн (1.1) окончательно принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v_{x2}}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v_{x3}}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v_{x2}}{\partial x_1} \right) - u \frac{d \ln \rho}{dt} =$$

$$- \Pi_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \Pi_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \Pi_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v_{x2}}{H_1 \partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v_{x3}}{H_1 \partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_3} \quad (1.16)$$

где обозначено

$$\Pi_1 = -\rho_0 \frac{C_n^2 - a_0^2}{\Omega_1} - \frac{3}{2} \frac{C_n^2 - a_0^2}{\Omega_1}; \quad \Pi_2 = - \frac{\Lambda}{C_n^2 \Omega_1} \rho_0 a_0^2, \quad \Pi_3 = - \frac{\Lambda^*}{C_n^2 \Omega_1} \rho_0 a_0^2$$

Дифференцируя уравнение (1.16) по x_1 , где $x_1 = H_1 z$, можно записать его в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_1} - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial \gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} \right) - \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{d \ln \psi}{dt} = \Pi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(u \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \Pi_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^3} + \Pi_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \quad (1.17)$$

Как видно из (1.17), влияние пузырьков в жидкости добавляет в уравнение коротких волн (1.1) третью производную неизвестной функции по x_1 с коэффициентом Π_3 .

Коэффициенты $\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 a}{\partial \gamma^2}$, $\frac{\partial^2 a}{\partial z \partial \gamma}$ вычисляются аналогично [4] при помощи уравнений характеристик для линейной недиссипативной среды и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} &= -C_n + a_0^2 a_1^2 \frac{B^2 - 2B_z^2 - B_y^2}{B^2 C_n \Omega_1} + a_0^2 a_1^2 \frac{B_z^2 (B^2 - B_z^2 - B_y^2) (6C_n^2 - a_0^2 - a_1^2)}{4C_n^2 \Omega_1^2} \\ \frac{\partial^2 a}{\partial \gamma^2} &= -C_n + a_0^2 a_1^2 \frac{B^2 - 2B_z^2 - B_y^2}{B^2 C_n \Omega_1} + a_0^2 a_1^2 \frac{B_y^2 (B^2 - B_z^2 - B_y^2) (6C_n^2 - a_0^2 - a_1^2)}{4C_n^2 \Omega_1^2} \\ \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial \gamma} &= C_n a_0^2 a_1^2 \frac{B_z B_y}{B^2} \frac{3a_0^2 - 3a_1^2 - 2C_n^2}{\Omega_1^2} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Лучевое решение ψ , входящее в уравнение (1.17), как показано в [3], можно получить из уравнения сохранения адиабатического инварианта [10]

$$\gamma_0 \sum v^2 \frac{H_i^2}{C_n} = \text{const}$$

где Σ есть площадь фронта волны внутри лучевой трубки, v — возмущенное значение скорости частицы.

Рассмотрим как повлияет на вид уравнений коротких волн появление в смеси твердых частиц.

Шарик совершает движение, уравнение которого по направлению нормали к волне можно записать в виде [12, 13]

$$\begin{aligned} \frac{du_l}{dt} + \xi_1 \left(\frac{du_l}{dt} - \frac{du}{dt} \right) + \eta_1 (u_l - u) &= 0 \\ \xi_1 &= \frac{\rho}{\rho_L} \frac{2 + k^2 R_1^2}{4 + k^2 R_1^2}, \quad \eta_1 = \frac{\rho}{\rho_L} \frac{k^2 R_1^2 \omega}{4 + k^2 R_1^2} \end{aligned} \quad (1.19)$$

где u_l — скорость центра шарика по нормали к волне, u — скорость жидкости, ρ — плотность смеси, ρ_L — плотность шарика, R_1 — радиус шарика, намного меньший, чем длина волны, k — волновое число падающей волны, ω — частота колебаний шарика. При появлении шариков в уравнениях движения (1.5) (в правой части второго уравнения) нужно добавить $-\beta_1 \frac{du_l}{dt}$ и ρ заменить на $\rho(1 - \beta_1)$, где β_1 — концентрация твердых частиц в смеси.

Учитывая, что $kR_1 \ll 1$, из (1.19) можно получить условие совместности на волне в виде

$$\delta u_i = (K_1 + K_2)\delta u + K_3 u, \quad K_1 = \frac{\frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_L}}{1 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_L}} \quad (1.20)$$

$$K_2 = \frac{\rho_L k^2 K_1^2}{\rho_L (4 + k^2 R_1^2) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_L}\right)^2}, \quad K_3 = \frac{-\gamma_n}{C_n \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_L}\right)^2}$$

Так как K_1 — немалая величина, то первый член $K_1 \delta u$ в (1.20) войдет в левую часть условия совместности (1.6), а остальные слагаемые добавятся в диссипативный член Φ_2 .

Вследствие этого в уравнении (1.9) для скорости волны a_i нужно заменить на $a_i/(1-b)(1-\beta_1)$, а Φ — на $\Phi/(1-b)$, где $b = \gamma_L \beta_1 K_1 / \rho(1-\beta_1)$.

Окончательно диссипативный член с учетом твердых шарообразных частиц запишется в виде

$$\Phi = A \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} + A^* \frac{\partial^3 \rho}{\partial x_1^3} + B \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + C \rho \quad (1.21)$$

где A и A^* определяются по (1.15), а B и C имеют следующий вид:

$$B = -\frac{\rho_L \beta_1 K_1}{\rho_0 (1-\beta_1)} \frac{C_n^2}{\rho_0 a_0^2} \left(\frac{B_{0r}}{4\pi \rho_0 (1-\beta_1)} - C_n^2 \right)$$

$$C = \frac{\rho_L \beta_1 K_3}{\rho_0 (1-\beta_1)} \frac{C_n^3}{\rho_0 a_0^3} \left(\frac{B_{0r}}{4\pi \rho_0 (1-\beta_1)} - C_n^2 \right) \quad (1.22)$$

Уравнение коротких волн (1.17) в этом случае запишется

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_1} - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} \right) -$$

$$- \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{d \ln \rho}{dt} = \Pi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \right) + \Pi_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \Pi_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} +$$

$$+ \Pi_4 \frac{\partial^5 u}{\partial x_1^5} + \Pi_5 \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \Pi_1 = -\rho_0 \frac{C_n^2 - a_1^2}{\Omega_1} - \frac{3}{2} \frac{C_n^2 - a_0^2}{\Omega_1}$$

$$\Pi_2 = -\frac{A}{C_n \Omega_1 (1-b)}, \quad \Pi_3 = -\frac{A^*}{C_n \Omega_1 (1-b)}, \quad \Pi_4 = -\frac{B}{C_n \Omega_1 (1-b)}$$

$$\Pi_5 = -\frac{C}{C_n \Omega_1 (1-b)}$$

2. *Нелинейное уравнение модуляции.* Общий подход получения уравнений для модулированных колебаний в нелинейной слабо диссипативной диспергирующей среде дается в [3, 10, 11].

Здесь рассматривается задача о получении нелинейного уравне-

ния модуляций для уравнений коротких волн (1.23) прямым путем, полагая

$$u = U_0 + U_1 \exp(i\tau - \alpha t) + U_1^* \exp(-i\tau - \alpha t) + U_2 \exp(2i\tau - 2\alpha t) + \dots \quad (2.1)$$

где $u_j(r, t)$ есть медленно меняющаяся функция от аргументов, что эквивалентно с точки зрения порядков (как принято в геометрической оптике) предположению о больших значениях ω (частота линейной задачи), τ — невозмущенный эйконал, U_j^* — комплексно сопряжена U_j .

Подставляя (2.1) в (1.23) и учитывая, что производные от экспоненциального множителя по порядку превосходят производные от функций U_j , а также соотношение $\omega = -\partial\tau/\partial t$, $k = \partial\tau/\partial x_1$, можно получить в основном порядке уравнение для слагаемых при $\exp(i\tau)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_1}{\partial t} ik - U_1(i\omega + \alpha)ik + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial t} - \frac{\partial U_1}{\partial x_1} (i\omega + \alpha) - \\ & - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2 \partial x_3} \right) - \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x_1} \frac{d \ln \varphi}{dt} + \Pi_1 (k^2 U_0 U_2 - U_0^* U_2^* k^2 \exp(-2i\tau)) - \\ & - \Pi_2 \left(3ik \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} - 3k^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - ik^3 U_1 \right) - \Pi_3 \left(U_2 k^4 - 6ik^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} - \right. \\ & \left. - 4ik^3 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) - \Pi_4 \left(2ik \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - k^2 U_1 + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} \right) - \Pi_5 \left(ik U_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Приравнявая коэффициенты при U_1 в (2.2), найдем дисперсионные соотношения для линейной задачи

$$\omega = \Pi_3 k^3 - \Pi_4 k, \quad \alpha = \Pi_2 k^2 - \Pi_5 \quad (2.3)$$

В порядке $\exp(2i\tau)$ найдем из (1.23)

$$U_2 = (D_1 + iD_2) U_1^* \quad (2.4)$$

где

$$D_2 = -\frac{1}{2} \frac{\Pi_1 k (\omega - 2k^2 \Pi_3 + k \Pi_4)}{(\omega - 2k^2 \Pi_3 + k \Pi_4)^2 + \left(k^2 \Pi_2 - \alpha - \frac{1}{2} \Pi_5 \right)^2} \quad (2.5)$$

$$D_1 = \frac{1}{2} \frac{\Pi_1 k \left(k^2 \Pi_2 - \alpha - \frac{1}{2} \Pi_5 \right)}{(\omega - 2k^2 \Pi_3 + k \Pi_4)^2 + \left(k^2 \Pi_2 - \alpha - \frac{1}{2} \Pi_5 \right)^2}$$

Подставляя в (2.2), учитывая, что для дифракционных задач можно считать $U_0 = 0$ и отбрасывая несущественные вторые производные по x_1 , можно получить нелинейное уравнение модуляции

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} (-i\omega - \alpha + 3k^2\Pi_2 + 4ik^2\Pi_3 - 2ik\Pi_4 - \Pi_5) + ik \frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 x}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial \gamma} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + k^2 \Pi_1 (D_1 - iD_2) U_1^* U_1^2 \exp(-2\alpha t) = 0 \quad (2.6)$$

Если перейти в (2.6) к новым переменным $x_1 = x - H_1 t$, для которых имеет место

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} \Big|_{x_1 = \text{const}} = \frac{\partial U_1}{\partial t} \Big|_{x = \text{const}} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{dX_1}{dt} \quad (2.7)$$

и положить $\frac{\partial U_1}{\partial t} \Big|_{x = \text{const}} = 0$, то уравнение модуляции для стационарных задач принимает вид

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} (C_1 + iC_2) - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial \gamma} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \Pi_1 k^2 (D_1 - iD_2) U_1^* U_1^2 \exp(-2\alpha t) = 0 \quad (2.8)$$

где

$$C_1 = -\alpha + 3k^2\Pi_2 - \Pi_5, \quad C_2 = -\omega + kH_1 + 4k^2\Pi_3 - 2k\Pi_4 \quad (2.9)$$

Рассмотрим осесимметричную задачу в случае, когда начальное магнитное поле направлено по оси x , то есть $H_0 = B_{0x}$, $B_y = B_z = 0$.

В этом случае коэффициенты в уравнении модуляции (2.8) упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z \partial \gamma} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial \gamma^2} = -\frac{C_1}{\Omega_1}, \quad \Omega_1 = 2C_2^2 - a_0^2 - a_1^2 \quad (2.10)$$

$$\text{Учитывая, что } \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r}, \text{ уравнение (2.8)}$$

можно записать в виде

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} (C_1 + iC_2) - \frac{1}{2} H_1 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) + \\ + \Pi_1 (D_1 + iD_2) k^2 U_1^* U_1^2 \exp(-2\alpha t) = 0 \quad (2.11)$$

Представляя U_1 в виде $U_1 = a \exp(i\varphi)$, учитывая что $C_1 \ll C_2$, $D_1 \gg D$ и отделяя действительные и мнимые части (2.11), получим

$$-C_2 a \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} H_1 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial r^2} - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} \right) - a^2 D_1 \exp(-2\alpha t) = 0 \quad (2.12)$$

$$C_2 \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{2} H_1 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \left(2 \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{a}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - a^2 D_2 \exp(-2\alpha t) = 0$$

Система уравнений (2.12) полностью определяет эволюцию огнбаю-

шей волны, характеризующейся величинами a и φ . Эти уравнения следуют также из общей теории Витема [10].

Ищем решение этих уравнений в виде

$$a = \frac{a_0}{f(x)} \exp(-r^2/2r_0^2 f^2), \quad \varphi = z(x) + \frac{r^2}{2R(x)} \quad (2.13)$$

где $f(x)$ задает профиль волны, kR — радиус кривизны.

Вычисляя производные и подставляя в (2.12), можно для R, f получить уравнения

$$\frac{1}{R} = - \left(\frac{f'}{f} + \exp(-2\alpha t) \frac{a_0^2 D_2}{f^3 C_2} \right) \frac{C_2}{\partial^2 z}; \quad f'' - z \frac{1}{f^3} = 0 \quad (2.14)$$

где

$$z = \frac{1}{C_2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} \right)^2 \frac{1}{r_0^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \frac{a_0^2 \Gamma_1 k^2}{r_0^2} \frac{D_1}{C_2^2} \exp(-2\alpha t) - a_0^2 \frac{D_2^2}{C_2^2} \exp(-4\alpha t) \Gamma_1 k^4$$

Интегрируя второе уравнение (2.14) при условии: $f_0 = 1$ при $x = 0$, получим

$$x = - \frac{\sqrt{f^2(f_0^2 - z) - z + f_0}}{f_0^2 + z} \quad (2.15)$$

Отсюда определяется $x_f = - \frac{\sqrt{-z + f_0}}{f_0^2 + z}$, то есть фокусное расстояние действительно при $x < 0$, а это означает, что $D_1 C_2 < 0$

$$2 \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} \frac{a_0^2 D_1}{r_0^2 C_2^2} \exp(-2\alpha t) > \frac{1}{C_2^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} \right)^2$$

Итак, получим, что если $a_0^2 > \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} \frac{1}{D_1 r_0^2} \exp(2\alpha t), \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} > 0$, то исходная волна может распадаться на ряд пучков, которые неограниченно сжимаются на расстоянии, определяемом по формуле $x = x_f$. Все эти эффекты наблюдаются в оптике при прохождении интенсивных лазерных пучков через среды.

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԽԱՌՆՈՒՐԴԻ ՀԱՄԱՐ ԿԱՐՆ ԱՆՔՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ

Ա. Գ. ԲԱԳԻՅԱՆ, Ա. Ա. ԴՈՒՐՅԱՆՅԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում դիտարկվում է ալիքների տարածման խնդիրը խառնուրդում (գազ-հեղուկ, կարծր մասնիկներ):

Արտածված է կարճ ալիքների հավասարումը և կվադրատիկ խառնուրդի ալիքների համար ստացված է մոդուլյացիայի հավասարումը:

Առանցքային հատվածի վիճակի համար դիտարկվում է իջավայրում ստացված է լուծումը, գտնված է նաև ֆոկուսային հեռավորությունը:

THE EQUATION OF SHORT WAVES FOR MIXTURE IN THE MAGNETIC FIELD

A. G. BAGDOEV, A. A. GOURGENIAN

S u m m a r y

The problem of propagation of waves in a mixture of gas-fluid and rigid particles is investigated. The equation of short waves is derived and for quasimonochromatic waves an equation of modulation has been obtained. A solution has been received for axial symmetrical Gaussian narrow bundles of dissipative medium. The focus distance has been also found.

ЛИТЕРАТУРА

1. Логев С. А. Газодинамические лазеры. М.: Наука, 1977. 335 с.
2. Багдоев А. Г. и Даноян Э. П. Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке.—Ж. вычис. матем. и физики, 1972, т. 12, № 6, с. 1512—1529.
3. Багдоев А. Г. Распространение волн в сплошных средах. Ереван: 1982. 307 с.
4. Bagdoyev A. G., Gurggenian A. A. On the definition of simplified nonlinear equation. Institute of mechanics applicate del politecnico di Torino, nota tecnica, 113, 1976, p. 1—18.
5. Bagdoyev A. G., Petrosian L. G. The propagation of quasimonochromatic nonlinear modulation waves in micropolar electroconducting gas-fluid mixture.—Modelling Simulation control, A AMSE Press, 1984, v. 1, № 184, p. 1—20.
6. Оганян Г. Г. Распространение слабых ударных волн в химически активной среде в нелинейной постановке.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. 26, № 6, с. 3—17.
7. Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
8. Ван Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа.— В сб: Реология суспензий, М.: Мир, 1975, с. 68—103.
9. Рыжов О. С. О нелинейной акустике химически активных сред.—ПММ, 1971, т. 36, вып. 6, с. 1023—1037.
10. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
11. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
12. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. 928 с.
13. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.

Институт механики АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
27.VII. 1984