ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 4, 1986 Механика

УДК 539.3.624.131+539.215

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ДВУХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЫ-ПРЯМОУГОЛЬНИКА С ПЕРЕМЕННЫМИ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

АГАЛОВЯН Л. А., АДАМЯН С. Х.

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропного двухслойного прямоугольника, находящегося в условиях плоской задачи теории упругости, когда упругие коэффициенты переменны, при смешанных граничных условиях на продольных кромках. Получены формулы, позволяющие определять искомые величины с наперед заданной асимптотической точностью. Указаны случаи, когда можно получить точное решение внутренней задачи. Когда упругие характеристики слоев постоянны, соответствующие задачи для двухслойной полосы и пластинок решены в [4, 5]. В работе проведен асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния слоистой полосы-прямоугольника в зависимости от закона изменения упругих модулей. Класс из рассмотренных более общих задач описывает модель сжимаемого слоя с переменными упругими характеристиками в теории оснований и фундаментов (модель Власова-Леонтьева, Егорова К. Е., Клейна Г. К.).

1. Требуется определить напряженно-деформированное состояние двухслойного прямоугольника $\Omega=\{(x, y): x\in[0, a], -h\leqslant y\leqslant h, 2h=h_1+h_2\ll a\}$, находящегося в условиях плоской задачи теории упругости. Толщина первого слоя — h_1, второго — h_2; $h_1+h_2=2h$. Слои анизотропные и в плоскости каждой полосы анизотропия общего вида. Считается, что упругие коэффициенты a_{ik} — интегрируемые функции от поперечной координаты ($a_{ik}=a_{ik}(y)$). Пусть на нижней грани $y=-h$ заданы значения перемещений $u(-h)=u^-$, $v(-h)=v^-$ (в частности, $u^-=v^-=0$), а при $y=+h$ — одна из комбинаций следующих условий:

$$u(h)=u^+(\xi), \qquad v(h)=v^+(\xi) \tag{1.1}$$

$$v(h)=v^+(\xi), \qquad \sigma_{xy}(h)=\varepsilon^{-1}\sigma^+_{xy}(\xi), \quad (\varepsilon=h/a) \tag{1.2}$$

$$u(h)=u^+(\xi), \qquad \sigma_y(h)=\varepsilon^{-1}\sigma^+_y(\xi), \quad (\xi=x/a) \tag{1.3}$$

$$\sigma_{xy}(h)=\varepsilon^{-1}\sigma^+_{xy}(\xi), \quad \sigma_y(h)=\varepsilon^{-1}\sigma^+_y(\xi) \tag{1.4}$$

Величины, относящиеся к верхнему слою, отмечаются сверху индексом (1), нижнему слою — индексом (2). Указанное решение должно удовлетворять граничным и контактным условиям, а также условиям при $x=0,\ a$.

Перейдем к безразмерным переменным $\xi = x/a$, $\zeta = y/h$, и качестве неизвестных выберем напряжения слоев $\sigma_{jk}^{(i)}$ и безразмерные перемещения $U^{(i)} = u^{(i)}/a$, $V^{(i)} = v^{(i)}/a$ $(i=1,\ 2)$.

Поскольку отнесенная к безразмерным координатам соответствующая система уравнений теории упругости сингулярно возмущенная, ее решение складывается из решений внутренней задачи и пограничных слоев [1, 2]. Решение внутренней задачи отыщем в виде [3]

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{jk}^{(i)s}, \quad U^{(i)} = \varepsilon^{s} U^{(i)s}, \quad s=\overline{0,\ N} \tag{1.5}$$

Здесь и далее обозначение $s=\overline{0,\ N}$ означает суммирование по повторяющемуся индексу s от нуля до N, N — число приближений. Подставив (1.5) в уравнения теории упругости, приравняв в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим систему относительно $\sigma_{jk}^{(i)s}$ и $U^{(i)s}$. Проинтегрировав эту систему, для искомых компонентов напряжений и перемещений получим

$$\sigma_{xy}^{(s)} = \sigma_{xy0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\zeta), \quad \sigma_{y}^{(s)} = \sigma_{y0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{y}^{*(s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_{x}^{(s)} = -(a_{12}\sigma_{y0}^{(s)} + a_{16}\sigma_{xy0}^{(s)})a_{11}^{-1} + \sigma_{x}^{*(s)}$$

$$U^{(s)} = \sigma_{y0}^{(s)}\int_0^{\zeta} A_{16}(\zeta)d\zeta + \sigma_{xy0}^{(s)}\int_0^{\zeta} A_{66}(\zeta)d\zeta + u^{(s)}(\xi) + u^{*(s)}(\xi,\zeta) \tag{1.6}$$

$$V^{(s)} = \sigma_{y0}^{(s)}\int_0^{\zeta} A_{11}(\zeta)d\zeta + \sigma_{xy0}^{(s)}\int_0^{\zeta} A_{16}(\zeta)d\zeta + v^{(s)}(\xi) + v^{*(s)}(\xi,\zeta)$$

где

$$u^{*(s)}(\xi,\zeta) = \int_0^{\zeta}\left[a_{16}\sigma_{x}^{*(s)} + a_{26}\sigma_{y}^{*(s)} + a_{66}\sigma_{xy}^{*(s)} - \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]d\zeta$$

$$v^{*(s)}(\xi,\zeta) = \int_0^{\zeta}\left[a_{12}\sigma_{x}^{*(s)} + a_{22}\sigma_{y}^{*(s)} + a_{26}\sigma_{xy}^{*(s)}\right]d\zeta$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\frac{\partial\sigma_{x}^{(s-1)}}{\partial\xi}d\zeta, \quad \sigma_{y}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial\xi}d\zeta$$

$$\sigma_{x}^{*(s)} = -(a_{12}\sigma_{y}^{*(s)} + a_{16}\sigma_{xy}^{*(s)})a_{11}^{-1} + a_{11}^{-1}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} \tag{1.7}$$

$$A_{11} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{11}^{-1}, \quad A_{16} = (a_{11}a_{26} - a_{12}a_{16})a_{11}^{-1}, \quad A_{66} = (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)a_{11}^{-1}$$

а всем величинам, зависящим от ζ, надо приписать индекс (1), если они относятся к первому слою и индекс (2) — ко второму, в частности,

$$A_{ik}(\zeta)=\begin{cases} A_{ik}^{(1)}(\zeta) & \zeta_0\leqslant\zeta\leqslant 1 \\ A_{ik}^{(2)}(\zeta) & -1\leqslant\zeta<\zeta_0 \end{cases} \qquad \sigma_{ik}(\xi,\zeta)=\begin{cases} \sigma_{ik}^{(1)}(\xi,\zeta) & \zeta_0\leqslant\zeta\leqslant 1 \\ \sigma_{ik}^{(2)}(\xi,\zeta) & -1\leqslant\zeta<\zeta_0 \end{cases}$$

Функции $\sigma_{xy0}^{(s)}(\xi)$, $\sigma_{y0}^{(s)}(\xi)$, $u^{(s)}(\xi)$, $v^{(s)}(\xi)$ — одни и те же для обоих слоев и подлежат определению. На линии раздела слоев $\zeta=\zeta_0=(h_2-h_1)/(h_2+h_1)$ удовлетворены условия упругого контакта $\sigma_{xy}^{(1)}=\sigma_{xy}^{(2)}$, $\sigma_y^{(1)}=\sigma_y^{(2)}$, $U^{(1)}=U^{(2)}$, $V^{(1)}=V^{(2)}$.

Покажем это для напряжения σ_{xy}, для остальных величин доказательство можно провести аналогичным образом. Из (1.7) имеем

$$\sigma_{xy}^{(1),s}(\xi,\zeta)=-\int\limits_0^{\zeta_0}\frac{\partial\sigma_x^{(1),s-1}}{\partial\xi}d\zeta-\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{\partial\sigma_x^{(1),s-1}}{\partial\xi}d\zeta$$

следовательно,

$$\sigma_{xy}^{(1),s}(\xi,\zeta_0)=-\int\limits_0^{\zeta_0}\frac{\partial\sigma_x^{(1),s-1}}{\partial\xi}d\zeta=\sigma_{xy}^{(2),s}(\xi,\zeta_0)$$

отсюда и из первого соотношения (1.6) вытекает $\sigma_{xy}^{(1),s}(\xi,\zeta_0)=\sigma_{xy}^{(2),s}(\xi,\zeta_0)$.

2. Удовлетворив граничным условиям при $\zeta=\pm1$, в случае задачи (1.1) имеем

$$\sigma_{xy0}^{(s)}=\left(\varphi^{(s)}\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta-f^{(s)}\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\Big/\Delta,\quad \sigma_{y0}^{(s)}=\left(f^{(s)}\int\limits_{-1}^{1}A_{66}d\zeta-\varphi^{(s)}\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\Big/\Delta$$

$$u^{(s)}(\xi)=u^{-(s)}+f^{(s)}\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{66}d\zeta\right)\right]\Big/\Delta+$$

$$+\varphi^{(s)}\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{66}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta\right)\right]\Big/\Delta-u^{*(s)}(\xi,-1)$$

(1.8)

$$v^{(s)}(\xi)=v^{-(s)}+f^{(s)}\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{11}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta\right)\right]\Big/\Delta+$$

$$+\varphi^{(s)}\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{11}d\zeta\right)\right]\Big/\Delta-v^{*(s)}(\xi,-1)$$

где

$$\varphi^{(s)}=U^{+(s)}-U^{-(s)}-[u^{*(s)}(\xi,1)-u^{*(s)}(\xi,-1)]$$

$$f^{(s)}=V^{+(s)}-V^{-(s)}-[v^{*(s)}(\xi,1)-v^{*(s)}(\xi,-1)]$$

$$\Delta=\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)^2 \qquad (1.9)$$

$$U^{\pm(0)}=u^{\pm}/a,\ V^{\pm(0)}=v^{\pm}/a,\quad U^{\pm(s)}=V^{\pm(s)}=0\quad (s\neq0)$$

Затем по формулам (1.5), (1.6), (1.7) определяются все величины внутреннего напряженно-деформированного состояния. В ряде случаев можно получить точное решение внутренней задачи. Например, когда

$u^-=v^-=0$, $u^+=\mathrm{const}$, $v^+=\mathrm{const}$, получим решение

$$\sigma_{xy}^{(i)}=(h\Delta)^{-1}\left(u^+\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta-v^+\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)$$

$$\sigma_{y}^{(i)}=(h\Delta)^{-1}\left(v^+\int\limits_{-1}^{1}A_{66}d\zeta-u^+\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)$$

$$\sigma_{x}^{(i)}=(h\Delta a_{11}^{(i)})^{-1}\left[u^+\left(a_{16}^{(i)}\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta-a_{12}^{(i)}\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)+\right.$$

$$\left.+v^+\left(a_{12}^{(i)}\int\limits_{-1}^{1}A_{66}d\zeta-a_{16}^{(i)}\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\right]$$

$$u=\Delta^{-1}\left\{u^+\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{66}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)\right]-\right.$$

$$\left.-v^+\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)\left(\int\limits_{\zeta}^{1}A_{16}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{\zeta}^{1}A_{66}d\zeta\right)\right]\right\}$$

$$(1.10)$$

$$v=\Delta^{-1}\left\{v^+\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{11}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)\right]+\right.$$

$$\left.+u^+\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{\zeta}^{1}A_{11}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{\zeta}^{1}A_{16}d\zeta\right)\right]\right\}$$

где

$$\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{jk}d\zeta=\begin{cases}\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{jk}^{(1)}d\zeta & -1\leqslant\zeta<\zeta_0\\ \int\limits_{-1}^{\zeta_0}A_{jk}^{(1)}d\zeta+\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}A_{jk}^{(2)}d\zeta & \zeta_0\leqslant\zeta\leqslant 1\end{cases}$$

$$(1.11)$$

$$\int\limits_{-1}^{1}A_{jk}d\zeta=\int\limits_{-1}^{\zeta_0}A_{jk}^{(1)}d\zeta+\int\limits_{\zeta_0}^{1}A_{jk}^{(2)}d\zeta$$

Точные решения можно выписать и тогда, когда u^+, v^+ есть полиномы.

Рассмотрим некоторые, часто встречающиеся в приложениях [6, 7, 8], случаи изменения модулей упругости.

а) Пусть $E^{(1)}=E_1\approx\mathrm{const}$, $\nu^{(1)}=\nu_1\approx\mathrm{const}$, $E^{(2)}=E_2\exp(-k(\zeta-\zeta_0))$

$$\nu^{(2)}=\nu_2\approx\mathrm{const} \qquad (1.12)$$

тогда решение (1.10), считая слои изотропными, примет вид

$$\sigma_{xy}^{(i)}=u^{+}E_2[2(1+\nu_2)hF(k,\zeta_0,n)]^{-1},\quad \sigma_y^{(i)}=v^{+}E_2[(1-\nu_2^2)hF(k,\zeta_0,m)]^{-1}$$

$$\sigma_x^{(i)}=\nu_i v^{+}E_2[(1-\nu_2^2)hF(k,\zeta_0,m)]^{-1}$$

$$u^{(2)}=u^{+}[\exp k(\zeta-\zeta_0)-\exp(-k(1+\zeta_0))][kF(k,\zeta_0,n)]^{-1}$$

$$v^{(2)}=v^{+}[\exp k(\zeta-\zeta_0)-\exp(-k(1+\zeta_0))][kF(k,\zeta_0,m)]^{-1}$$

$$u^{(1)}=u^{+}[\varphi(k,\zeta_0)+(\zeta-\zeta_0)n][F(k,\zeta_0,n)]^{-1} \tag{1.13}$$

$$v^{(1)}=v^{+}[\varphi(k,\zeta_0)+(\zeta-\zeta_0)m][F(k,\zeta_0,m)]^{-1}$$

где

$$n=\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\,\frac{E_2}{E_1},\quad m=\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}\,n$$

$$F(k,\zeta_0,n)=\varphi(k,\zeta_0)+(1-\zeta_0)n,\quad \varphi(k,\zeta_0)=[1-\exp(-k(1+\zeta_0))]k^{-1} \tag{1.14}$$

Проведем некоторый анализ решения (1.13) в зависимости от параметра k.

При $k=0$ получаем решение задачи (1.1), когда упругие коэффициенты обоих слоев постоянны [4]:

$$\sigma_{xy}^{(i)}=u^{+}\left[\frac{2(1+\nu_2)}{E_2}h_2+\frac{2(1+\nu_1)}{E_1}h_1\right]^{-1},\quad \sigma_y^{(i)}=v^{+}\left[\frac{1-\nu_2^2}{E_2}h_2+\frac{1-\nu_1^2}{E_1}h_1\right]^{-1}$$

$$\sigma_x^{(i)}=\nu_i v^{+}\left[\frac{1-\nu_2^2}{E_2}h_2+\frac{1-\nu_1^2}{E_1}h_1\right]^{-1},\quad u^{(2)}=u^{+}(y+h)\frac{1+\nu_2}{E_2}\left[\frac{1+\nu_2}{E_2}h_2+\frac{1+\nu_1}{E_1}h_1\right]^{-1}$$

$$\tag{1.15}$$

$$u^{(1)}=u^{+}\left[\frac{1+\nu_2}{E_2}h_2+\left(y-\frac{h_2-h_1}{2}\right)\frac{1+\nu_1}{E_1}\right]\left[\frac{1+\nu_2}{E_2}h_2+\frac{1+\nu_1}{E_1}h_1\right]^{-1}$$

$$v^{(2)}=v^{+}(y+h)\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\left[\frac{1-\nu_2^2}{E_2}h_2+\frac{1-\nu_1^2}{E_1}h_1\right]^{-1}$$

$$v^{(1)}=v^{+}\left[\frac{1-\nu_2^2}{E_2}h_2+\left(y-\frac{h_2-h_1}{2}\right)\frac{1-\nu_1^2}{E_1}\right]\left[\frac{1-\nu_2^2}{E_2}h_2+\frac{1-\nu_1^2}{E_1}h_1\right]^{-1}$$

При $k\gg 1$ из (1.13) вытекает

$$\sigma_{xy}^{(i)}=u^{+}E_1/[2h_1(1+\nu_1)],\quad \sigma_y^{(i)}=v^{+}E_1/[h_1(1-\nu_1^2)],\quad \sigma_x^{(i)}=\nu_i v^{+}E_1/[h_1(1-\nu_1^2)] \tag{1.16}$$

$$u^{(2)}\approx 0\quad u^{(1)}=u^{+}\left(y-\frac{h_2-h_1}{2}\right)\frac{1}{h_1}$$

$$v^{(2)}\approx 0\quad v^{(1)}=v^{+}\left(y-\frac{h_2-h_1}{2}\right)\frac{1}{h_1}$$

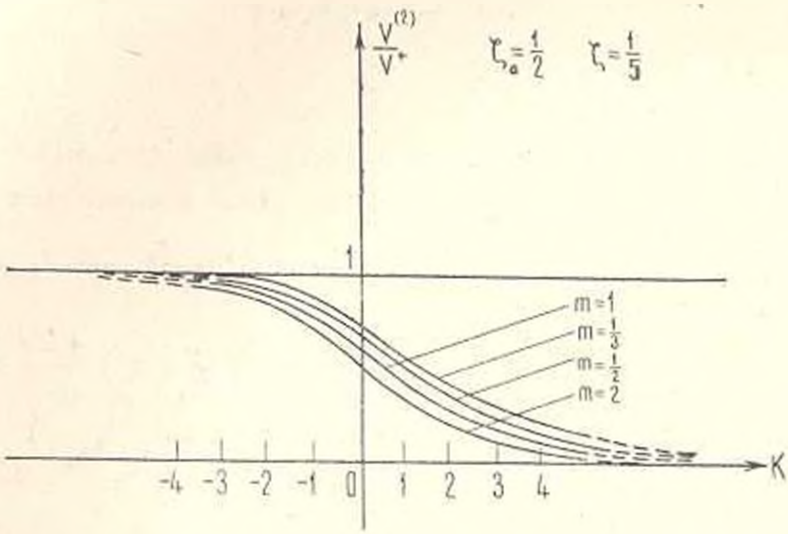
(1.16) имеет очевидную физическую интерпретацию: чем жестче становится второй слой, тем меньше становятся перемещения этого слоя. Когда $k\ll -1$

$$\sigma_{xy}^{(i)}\approx 0,\quad \sigma_y^{(i)}\approx 0,\quad \sigma_x^{(i)}\approx 0,\quad u^{(i)}=u^{+},\quad v^{(i)}=v^{+},\quad (\zeta\neq -1) \tag{1.17}$$

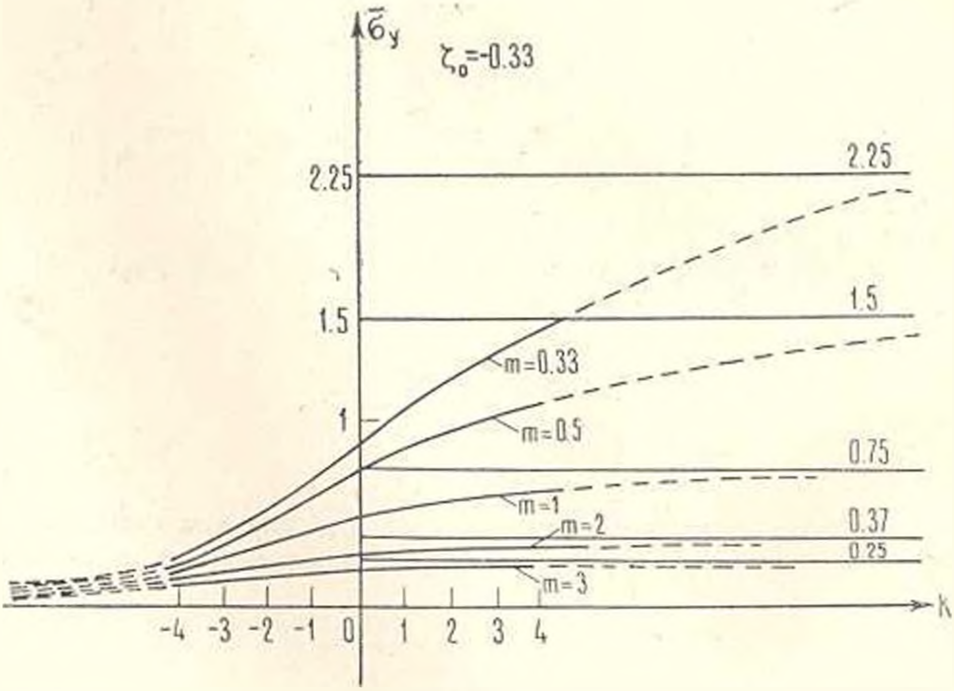
При очень же малой жесткости второго слоя, в силу (1.17), напряжения в слоях близки к нулю, то есть основание перестает сопротивляться. Зависимость напряжений и перемещений от параметров k, m для некоторых сечений ζ показана на фиг. 1, 2, где

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y^{(2)}/[\sigma^* E_2(1-\zeta_1)b]$$

б) Рассмотрим случай кусочно-линейного изменения модуля упругости по толщине.



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть $E^{(1)} = E_1 \approx \mathrm{const}$, $\nu^{(1)} = \nu_1 \approx \mathrm{const}$

$$E^{(2)} = [E_2 + E_3\zeta_0 + (E_2 - E_3)\zeta](\zeta_0 + 1)^{-1} \quad \nu^{(2)} = \nu_2 \approx \mathrm{const} \tag{1.18}$$

Решением задачи (1.1), вытекающим из (1.10), будет

$$\begin{gathered}
\sigma_y^{(1)} = v^+ E_2[(1-\nu_2^2)hD(c, \zeta_0, m)]^{-1}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = u^+ E_2[2(1+\nu_2)hD(c, \zeta_0, n)]^{-1} \\
\sigma_x^{(1)} = \nu_1 v^+ E_2[(1-\nu_2^2)hD(c, \zeta_0, m)]^{-1}, \quad u^{(2)} = [u^+(\zeta_0+1)\ln(E^{(2)}/E_3)] \times \\
\times [(1-c)D(c, \zeta_0, n)]^{-1}, \quad u^{(1)} = u^+[(\zeta_0+1)f(c) + n(\zeta - \zeta_0)][D(c, \zeta_0, n)]^{-1} \\
v^{(2)} = [v^+(\zeta_0+1)\ln(E^{(2)}/E_3)][(1-c)D(c, \zeta_0, m)]^{-1} \\
v^{(1)} = v^+[(\zeta_0+1)f(c) + m(\zeta - \zeta_0)][D(c, \zeta_0, m)]^{-1}
\end{gathered} \tag{1.19}$$

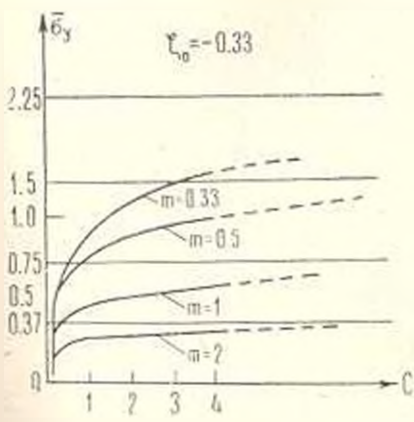
где $c = E_3/E_2$, $f(c) = (\ln c)/(c-1)$, $D(c, \zeta_0, n) = (\zeta_0+1)f(c) + n(1-\zeta_0)$

$$n = \frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\,\frac{E_2}{E_1}, \qquad m = \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}\,n$$

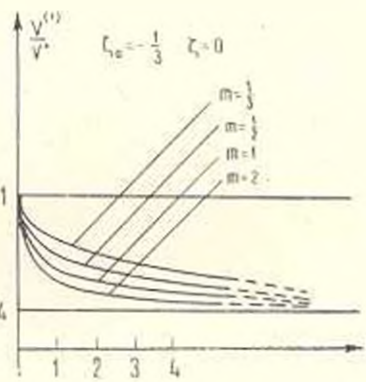
Изучим (1.19) в зависимости от параметра c. При $c = 1$, $E_2 = E_3$ и получаем формулы (1.15). Когда $c \gg 1$, то есть $E_3 \gg E_2$, получим снова (1.16) с той лишь разницей, что асимптотика (1.16) устанавливается в первом случае намного быстрее.

Если $c \ll 1$, $E_3 \ll E_2$, получим формулы (1.17), но в этом случае асимптотика устанавливается довольно медленно.

Зависимость напряжений и перемещений от параметров c, m на некоторых площадках ζ показана на фиг. 3, 4.



Фиг. 3



Фиг. 4

2. Приведем решение задачи, соответствующей условиям (1.2). Удовлетворим граничным условиям (1.2), будем иметь

$$\sigma_{xy0}^{(s)} = \sigma_{xy}^{+(s)} - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, 1)$$

$$\sigma_{y0}^{(s)} = \left[v^{+(s)} - v^{-(s)} - (v^{*(s)}(\xi, 1) - v^{*(s)}(\xi, -1)) - \sigma_{xy0}^{(s)} \int_{-1}^{1} A_{16}(\zeta)d\zeta\right] \Big/ \int_{-1}^{1} A_{11}d\zeta \tag{2.1}$$

$$u^{(s)}(\xi)=u^{-(s)}+\sigma_{y0}^{(s)}\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta+\sigma_{xy0}^{(s)}\int\limits_{-1}^{0}A_{66}d\zeta-u^{*(s)}(\xi,-1)$$

$$v^{(s)}(\xi)=v^{-(s)}+\sigma_{y0}^{(s)}\int\limits_{-1}^{0}A_{11}d\zeta+\sigma_{xy0}^{(s)}\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta-v^{*(s)}(\xi,-1)$$

Подставив (2.1) в (1.6), получим окончательное решение, в частности, когда $v^{+}=\mathrm{const}$, $\varepsilon^{-1}\sigma_{xy}^{+}=\tau^{+}=\mathrm{const}$, имеем

$$\sigma_{xy}=\tau^{+};\quad \sigma_{y}=v^{+}\left(h\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}-\tau^{+}\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}$$

$$\sigma_{x}=-a_{12}v^{+}\left(a_{11}h\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}+a_{12}\tau^{+}\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(a_{11}\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}$$

$$\begin{gathered}u=v^{+}\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}+\tau^{+}h\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{66}d\zeta\right)-\right.\\ \left.-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)\right]\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}\end{gathered}\tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}v=v^{+}\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}+\tau^{+}h\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)-\right.\\ \left.-\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\right]\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}\end{gathered}$$

Если слои изотропные, решение (2.2) для случая (1.12) примет вид

$$\begin{gathered}\sigma_{xy}^{(i)}=\tau^{+};\quad \sigma_{y}^{(i)}=v^{+}E_{2}[(1-\nu_{2}^{2})hF(k,\zeta_{0},m)]^{-1}\\ \sigma_{x}^{(i)}=\nu_{i}v^{+}E_{2}[(1-\nu_{2}^{2})hF(k,\zeta_{0},m)]^{-1}\\ u^{(2)}=2(1+\nu_{2})\tau^{+}h[\exp k(\zeta-\zeta_{0})-\exp(-k(1+\zeta_{0}))]E_{2}^{-1}k^{-1}\\ u^{(1)}=2(1+\nu_{2})E_{1}^{-1}[\varphi(k,\zeta_{0})+n(\zeta-\zeta_{0})]\tau^{+}h\\ v^{(2)}=v^{+}[\exp k(\zeta-\zeta_{0})-\exp(-k(1+\zeta_{0}))][kF(k,\zeta_{0},m)]^{-1}\\ v^{(1)}=v^{+}[\varphi(k,\zeta_{0})+(\zeta-\zeta_{0})m][F(k,\zeta_{0},m)]^{-1}\end{gathered}\tag{2.3}$$

Нетрудно провести анализ этого решения в зависимости от k. В случае же (1.18) получается

$$\begin{gathered}\sigma_{xy}^{(i)}=\tau^{+};\ \sigma_{y}^{(i)}=v^{+}E_{2}[(1-\nu_{2}^{2})hD(c,\zeta_{0},m)]^{-1},\ \sigma_{x}^{(i)}=\nu_{i}v^{+}E_{2}[(1-\nu_{2}^{2})hD(c,\zeta_{0},m)]^{-1}\\ u^{(2)}=2(1+\nu_{2})(\zeta_{0}+1)\tau^{+}h[\ln(E^{(2)}/E_{3})](E_{2}-E_{3})^{-1}\end{gathered}\tag{2.4}$$

$$u^{(1)} = [2(1+\nu_2)(\zeta_0+1)E_2^{-1} f(c) + 2(1+\nu_1)E_1^{-1}(\zeta-\zeta_0)]\varepsilon^+ h$$

$$\sigma^{(1)} = [(\zeta_0+1)v^+ \ln(E^{(2)}/E_1)][(1-c)D(c,\ \zeta_0,\ m)]^{-1}$$

$$v^{(1)} = v^+[(\zeta_0+1)f(c)+m(\zeta-\zeta_0)][D(c,\ \zeta_0,\ m)]^{-1}$$

3. Приведем решение задачи, соответствующей условиям (1.3). Удовлетворив условиям (1.3), будем иметь

$$\sigma_{y0}^{(s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(s)}(\xi,\ 1)$$

$$\sigma_{xy0}^{(s)} = \left[u^{+(s)} - u^{-(s)} - u^{*(s)}(\xi,\ 1) + u^{*(s)}(\xi,\ -1) - \sigma_{y0}^{(s)} \int_{-1}^{1} A_{16} d\zeta \right] \left(\int_{-1}^{1} A_{66} d\zeta \right)^{-1}$$

$$u^{(s)}(\xi) = u^{+(s)} - \sigma_{y0}^{(s)} \int_{0}^{1} A_{16} d\zeta - \sigma_{xy0}^{(s)} \int_{0}^{1} A_{66} d\zeta - u^{*(s)}(\xi,\ 1) \tag{3.1}$$

$$v^{(s)}(\xi) = v^{-(s)} - \sigma_{y0}^{(s)} \int_{0}^{-1} A_{11} d\zeta - \sigma_{xy0}^{(s)} \int_{0}^{-1} A_{16} d\zeta - v^{*(s)}(\xi,\ -1)$$

$$\sigma_y^{+(0)} = \sigma_y^-, \quad \sigma_y^{+(s)} = 0, \quad (s \neq 0)$$

Подставив (3.1) в (1.6), получаем окончательное решение. Когда

$u^- = v^- \equiv 0, \quad \varepsilon^{-1}\sigma_y^+ = \sigma_2^+ = \text{const}, \quad u^+ = \text{const}$, имеем

$$\sigma_y = \sigma_2^+$$

$$\sigma_{xy} = u^+ \left(h \int_{-1}^{1} A_{66} d\zeta \right)^{-1} - \sigma_2^+ \left[\int_{-1}^{1} A_{16} d\zeta \right] \left[\int_{-1}^{1} A_{66} d\zeta \right]^{-1}$$

$$\sigma_x = -a_{16} u^+ \left[h a_{11} \int_{-1}^{1} A_{66} d\zeta \right]^{-1} - \sigma_2^+ \left[a_{12} \int_{-1}^{1} A_{66} d\zeta - a_{16} \int_{-1}^{1} A_{16} d\zeta \right] \left(a_{11} \int_{-1}^{1} A_{66} d\zeta \right)^{-1}$$

$$u = u^+ \left(\int_{-1}^{\zeta} A_{66} d\zeta \right) \left(\int_{-1}^{1} A_{66} d\zeta \right)^{-1} + \sigma_2^+ h \left[\left(\int_{-1}^{1} A_{66} d\zeta \right) \left(\int_{-1}^{\zeta} A_{16} d\zeta \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\int_{-1}^{1} A_{16} d\zeta \right) \left(\int_{-1}^{\zeta} A_{66} d\zeta \right) \right] \left(\int_{-1}^{1} A_{66} d\zeta \right)^{-1} \tag{3.2}$$

$$v = u^+ \left(\int_{-1}^{\zeta} A_{16} d\zeta \right) \left(\int_{-1}^{1} A_{66} d\zeta \right)^{-1} + \sigma_2^+ h \left[\left(\int_{-1}^{1} A_{66} d\zeta \right) \left(\int_{-1}^{\zeta} A_{11} d\zeta \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\int_{-1}^{1} A_{16} d\zeta \right) \left(\int_{-1}^{\zeta} A_{16} d\zeta \right) \right] \left(\int_{-1}^{1} A_{66} d\zeta \right)^{-1}$$

4. В задаче, соответствующей условиям (1.4), имеем

$$\sigma^{(s)}_{xy0}=\tau^{+(s)}_{xy}-\sigma^{*(s)}_{xy}(\xi,\ 1),\quad \sigma^{(s)}_{y0}=\sigma^{+(s)}_{y}-\sigma^{*(s)}_{y}(\xi,\ 1)$$

$$\begin{aligned} u^{(s)}(\xi)&=u^{-(s)}+\sigma^{(s)}_{y0}\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta+\sigma^{(s)}_{xy0}\int\limits_{-1}^{0}A_{66}d\zeta-u^{*(s)}(\xi,\ -1)\\ v^{(s)}(\xi)&=v^{-(s)}+\sigma^{(s)}_{y0}\int\limits_{-1}^{0}A_{11}d\zeta+\sigma^{(s)}_{xy0}\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta-v^{*(s)}(\xi,\ -1)\end{aligned}\tag{4.1}$$

В частности, при $\varepsilon^{-1}\sigma_{xy}=\tau^{+}=\mathrm{const}$, $\varepsilon^{-1}\sigma^{+}_{y}=\sigma^{+}_{2}=\mathrm{const}$, $u^{-}=v^{-}=0$ получаем замкнутое решение

$$\sigma^{(i)}_{xy}=\tau^{+},\quad \sigma^{(i)}_{y}=\sigma^{+}_{2},\quad (i=1,\ 2),\quad \sigma^{(i)}_{x}=-(a^{(i)}_{12}\sigma^{+}_{2}+a^{(i)}_{16}\tau^{+})(a^{(i)}_{11})^{-1}$$

$$u=\left(\sigma^{+}_{2}\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta+\tau^{+}\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{66}d\zeta\right)h,\quad v=\left(\sigma^{+}_{2}\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{11}d\zeta+\tau^{+}\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)h\tag{4.2}$$

Эта задача описывает упругое основание—фундамент по модели сжимаемого слоя [6—8]. Из (4.2), считая слои изотропными, когда модуль упругости изменяется по закону (1.12), получаем

$$\begin{aligned} &\sigma^{(i)}_{xy}=\tau^{+},\quad \sigma^{(i)}_{y}=\sigma^{+}_{2},\quad \sigma^{(i)}_{x}=\nu_i\sigma^{+}_{2}\\ &u^{(2)}=2(1+\nu_2)\tau^{+}h\,[\exp k(\zeta-\zeta_0)-\exp\,(-k(1+\zeta_0))](E_2k)^{-1}\\ &u^{(1)}=2(1+\nu_2)E_2^{-1}[\varphi(k,\ \zeta_0)+n(\zeta-\zeta_0)]\tau^{+}h\\ &v^{(2)}=(1-\nu_2^2)\sigma^{+}_{2}h[\exp k(\zeta-\zeta_0)-\exp(-k(1+\zeta_0))](E_2k)^{-1}\\ &v^{(1)}=(1-\nu_2^2)\sigma^{+}_{2}h[\varphi(k,\ \zeta_0)+m(\zeta-\zeta_0)]E_2^{-1}\end{aligned}\tag{4.3}$$

Если упругие коэффициенты обоих слоев постоянны $(k=0)$

$$\begin{aligned} &\sigma^{(i)}_{xy}=\tau^{+},\quad \sigma^{(i)}_{y}=\sigma^{+}_{2},\quad \sigma^{(i)}_{x}=\nu_i\sigma^{+}_{2}\\ &u^{(2)}=2(1+\nu_2)\tau^{+}h(\zeta+1)E_2^{-1}\\ &u^{(1)}=[2(1+\nu_2)(\zeta_0+1)E_2^{-1}+2(1+\nu_1)(\zeta-\zeta_0)E_1^{-1}]\tau^{+}h\\ &v^{(2)}=(1-\nu_2^2)\sigma^{+}_{2}h(\zeta+1)E_2^{-1}\\ &v^{(1)}=[(1-\nu_2^2)(\zeta_0+1)E_2^{-1}+(1-\nu_1^2)(\zeta-\zeta_0)E_1^{-1}]\sigma^{+}_{2}h\end{aligned}\tag{4.4}$$

При $k\gg1$

$$\begin{aligned} &\sigma^{(i)}_{xy}=\tau^{+},\quad \sigma^{(i)}_{y}=\sigma^{+}_{2},\quad \sigma^{(i)}_{x}=\nu_i\sigma^{+}_{2},\quad u^{(2)}\approx0,\quad v^{(2)}\approx0\\ &u^{(1)}=2(1+\nu_1)E_1^{-1}(\zeta-\zeta_0)\tau^{+}h,\quad v^{(1)}=(1-\nu_1^2)E_1^{-1}(\zeta-\zeta_0)\sigma^{+}_{2}h\end{aligned}\tag{4.5}$$

То есть чем жестче второй слой, тем ближе к нулю перемещения этого слоя. Используя это свойство и заранее ставив ограничение на возможную осадку, можно найти ту глубину, начиная с которой основание можно считать абсолютно жестким.

Когда $k\ll-1$

$$\sigma_{xy}^{(l)} = \tau^{+}, \quad \sigma_y^{(l)} = \sigma_2^{+}, \quad \sigma_x^{(l)} = \nu_l \sigma_2^{+}, \quad u^{(l)} \gg 1, \quad v^{(l)} \gg 1, \quad (\zeta \neq -1) \tag{4.6}$$

Чем меньше становится жесткость второго слоя, тем быстрее падает его сопротивляемость и возникают достаточно большие перемещения. При (1.18) имеем

$$\begin{aligned} &\sigma_y^{(l)} = \sigma_2^{+}, \quad \sigma_{xy}^{(l)} = \tau^{+}, \quad \sigma_x^{(l)} = \nu_l \sigma_2^{+} \\ &u^{(2)} = 2(1+\nu_2)(\zeta_0+1)\tau^{+} h[\ln(E^{(2)}/E_3)](E_2-E_3)^{-1} \\ &u^{(1)} = [2(1+\nu_2)(\zeta_0+1)E_2^{-1}f(c)+2(1+\nu_1)E_1^{-1}(\zeta-\zeta_0)]\tau^{+} h \\ &v^{(2)} = (\zeta_0+1)(1-\nu_2^2)\sigma_2^{+} h[\ln(E^{(2)}/E_3)](E_2-E_3)^{-1} \\ &v^{(1)} = [(1-\nu_2^2)(\zeta_0+1)E_2^{-1}f(c)+(1-\nu_1^2)E_1^{-1}(\zeta-\zeta_0)]\sigma_2^{+} h \end{aligned} \tag{4.7}$$

5. Решения (4.3), (4.4), (4.7) позволяют судить о поведении основания под действием внешней нагрузки и провести сопоставления с известными моделями оснований. По модели основания Винклера—Фусса есть прямая пропорциональная зависимость между контактным давлением и соответствующим перемещением ($\sigma_y = Kv$). На основе точного решения уравнений теории упругости было показано [4], и это вытекает также из (4.4), что в случае равномерной нормальной нагрузки, действительно, на линии контакта $\zeta = \zeta_0$ двух слоев имеет место вышеуказанная пропорциональность с известным [6.9] коэффициентом постели

$$K_0 = \frac{E_2}{(1-\nu_2^2)h_2} \tag{5.1}$$

Возникает естественный вопрос: сохраняется ли эта пропорциональная зависимость при переменных модулях упругости у основания, то есть когда основание с глубиной твердеет или ослабевает. Из (4.3) вытекает, что пропорциональность нормальной реакции и соответствующего перемещения сохранятся, однако в качестве коэффициента постели выступает

$$K = \frac{E_2}{(1-\nu_2^2)h_2}\,\frac{k_1}{1-\exp(-k_1)} = K_0\,\frac{k_1}{1-\exp(-k_1)} \tag{5.2}$$

где $k_1 = (Kh_2)/h$ характеризует изменение модуля упругости по глубине основания.

В силу (1.12) это изменение запишется в виде

$$E^{(2)} = E_2 \exp[-k_1(y-y_0)/h_2] \tag{5.3}$$

то есть модуль меняется в пределах $[E_2, E_2 \exp k_1]$.
Если модуль упругости основания меняется по формуле (1.18), то из (4.7) следует

$$K = K_0\,\frac{c-1}{\ln c} \tag{5.4}$$

В табл. I приведены значения отношения K/K_0 в зависимости от значений k_1, c. Оттуда следует, что с увеличением жесткости основания коэффициент постели K по сравнению с обычным коэффициентом K_0 увеличивается, при уменьшении же жесткости коэффициент постели уменьшается. Когда упругий модуль основания постоянен, предельным переходом $k_1 \to 0$, $c \to 1$ из (5.2) и (5.4) получим известный коэффициент K_0, $(K \to K_0)$

Таблица 1

k_1	−100	−50	−30	−10	−5	−3	−1	0	1	3	5	10	20	50
K/K_0	$8 \cdot 10^{-42}$	$1.3 \cdot 10^{-20}$	$27 \cdot 10^{-12}$	$4 \cdot 10^{-4}$	0.03	0.15	0.6	1	1.6	3.15	5	10	20	50
c	0.01	0.02	0.03	0.09	0.13	0.2	[illegible]	0.5	1	5	10	20	50	100
K/K_0	0.21	0.25	0.28	0.39	0.44	0.5	0.6	0.72	1	2.5	3.9	6.3	12.5	21

Как и в случае однородного основания [4], если нормальная нагрузка не остается постоянной, точки контакта получают дополнительные тангенциальные перемещения, а также возникают касательные напряжения. Однако, главным все же остается Винклеровское слагаемое.

Полученное выше решение и проведенные рассуждения справедливы, начиная с некоторого расстояния от вертикальных сечений $x=0$, a, равного зоне затухания концевых эффектов (погранслой). Вблизи же этих сечений возникает пограничный слой. В этих местах модель Винклера-Фусса и любая прикладная модель, использующая понятие коэффициента постели, перестают быть справедливыми. Пограничный слой можно изучить способом, изложенным в [10].

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐՈՎ ԵՐԿՇԵՐՏ ՇԵՐՏ-ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ-ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ, Ս. Խ. ԱԴԱՄՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի պայմաններում գտնվող անիզոտրոպ երկշերտ ուղղանկյան լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը, երբ երկայնական եզրերի վրա տրված են խառը եզրային պայմաններ և առաձգական գործակիցները փոփոխական են։ Ստացված են բանաձևեր, որոնք թույլ են տալիս որոշել փնտրվող մեծությունները նախօրոք տրված ասիմպտոտիկ ճշտությամբ։ Բերված են դեպքեր, երբ կարելի է ստանալ ներքին խնդրի ճշգրիտ լուծումը։ Կատարված է շերտավոր ուղղանկյան լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի անալիզ կախված առաձգական մոդուլների փոփոխման օրենքից։

ON THE STRESS-STRAIN STATE OF TWO-LAYER STRIPE-RECTANGLE WITH VARIABLE ELASTIC CHARACTERISTICS

L. A. AGALOVIAN, S. Kh. ADAMIAN

S u m m a r y

The determination of stress-strain state for an anisotropic two-layer rectangle with variable elastic characteristics is considered. The mixed boundary conditions on the longitudinal sides of the stripe are given.

The formula allow to determine all unknown values with given asymptotic exactness in advance.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.—ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 667—686.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
3. *Агаловян Л. А.* О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела.—Межвузов. сб. Механика. Изд-во ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 7—12.
4. *Агаловян Л. А.* К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера.—В сб.: XIII Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Ч. I. Таллин: 1983, с. 13—18.
5. *Агаловян Л. А., Геворкян Р. С.* Асимптотические решения одного класса смешанных краевых задач двухслойных анизотропных пластинок и гипотеза Винклера-Фусса.—Материалы II Всес. конф. «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов». Т. 1. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984, с. 30—35.
6. *Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А.* Расчет конструкции на упругом основании. М.: Стройиздат, 1973. 620 с.
7. *Егоров К. Е.* О деформации основания конечной толщины.—Основания, фундаменты и механика грунтов, 1961, №1, с. 4—6.
8. *Клейн Г. К.* Учет неоднородности, разрывности деформаций и других механических свойств грунта при расчете сооружений на сплошном основании.—Тр. МИСИ им. В. В. Куйбышева. 1956.
9. *Власов В. З.* и *Леонтьев.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
10. *Агаловян Л. А.* Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач.—Межвузов. сб. Механика. Изд-во ЕГУ, 1984, вып. 3, с. 51—58.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
14.VIII.1985