ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 4, 1986 Механика

УДК 539.3

О КОНТАКТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ОРТОТРОПНОГО ДВУХСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРА

ВАТУЛЬЯН А. О., ОВСЕПЯН В. В.

За последние годы в печати появился ряд работ, посвященных смешанным динамическим задачам для бесконечного изотропного цилиндра [1—3]. Подобные задачи для анизотропных цилиндров практически не исследованы. В работах [4, 5] нами были изучены динамические контактные задачи для анизотропного бесконечного полого и сплошного цилиндров.

Широкое применение слоистых конструкций (в частности, цилиндрических волноводов) делает актуальным рассмотрение задачи о колебаниях штампа на поверхности слоистого цилиндра из ортотропного материала, что соответствует колебаниям конструкций из композитных материалов в рамках теории эффективных модулей.

1. Рассматривается осесимметричная задача о колебаниях ортотропного бесконечного двухслойного цилиндра с радиусами a и b $(a>b)$ под действием колеблющегося штампа ширины $2c$, жестко сцепленного с цилиндром.

Граничные условия зададим в форме

$$r=a \qquad \tau_{rz}^{(2)}=\sigma_r^{(2)}=0 \qquad |z|>c$$

$$u_r^{(2)}=f_1(z)\exp(-i\omega t) \qquad |z|<c \tag{1.1}$$

$$u_z^{(2)}=f_3(z)\exp(-i\omega t)$$

$$r=b \qquad u_r^{(1)}=u_r^{(2)}, \quad u_z^{(1)}=u_z^{(2)}$$

$$\sigma_r^{(1)}=\sigma_r^{(2)}, \quad \tau_{rz}^{(1)}=\tau_{rz}^{(2)} \tag{1.2}$$

Полагаем, что

1) $u_\theta^{(l)}=0$, $u_r^{(l)}$ и $u_z^{(l)}$ не зависят от θ.

2) режим колебаний установившийся, то есть

$$u_r^{(l)}=\overset{\circ}{u}{}_r^{(l)}(r,z)\exp(-i\omega t), \quad u_z^{(l)}=\overset{\circ}{u}{}_z^{(l)}(r,z)\exp(-i\omega t), \quad l=1,2 \tag{1.3}$$

3) $A_{11}^{(l)}=A_{22}^{(l)}$, $A_{13}^{(l)}=A_{23}^{(l)}$

$A_{ij}^{(l)}$—упругие постоянные материалов цилиндров ($l=1, 2$). Здесь индекс 1 относится к внутреннему цилиндру, 2—к внешнему.

Уравнения движения в амплитудах перемешений получены в работе [5]

$$A_{11}^{(l)}\left[\frac{\partial^2 \overset{\circ}{u}_r^{(l)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \overset{\circ}{u}_r^{(l)}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\overset{\circ}{u}_r^{(l)}\right]+\rho^{(l)}\omega^2\overset{\circ}{u}_r^{(l)}+$$

$$+A_{55}^{(l)}\frac{\partial^2 \overset{\circ}{u}_r^{(l)}}{\partial z^2}+\left[A_{13}^{(l)}+A_{55}^{(l)}\right]\frac{\partial^2 \overset{\circ}{u}_z^{(l)}}{\partial z^2}=0 \tag{1.4}$$

$$A_{55}^{(l)}\left[\frac{\partial^2 \overset{\circ}{u}_z^{(l)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \overset{\circ}{u}_z^{(l)}}{\partial r}\right]+\rho^{(l)}\omega^2\overset{\circ}{u}_z^{(l)}+A_{33}^{(l)}\frac{\partial^2 \overset{\circ}{u}_z^{(l)}}{\partial z^2}+$$

$$+\left[A_{13}^{(l)}+A_{55}^{(l)}\right]\left[\frac{\partial^2 \overset{\circ}{u}_r^{(l)}}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial \overset{\circ}{u}_r^{(l)}}{\partial z}\right]=0$$

Здесь $\rho^{(l)}$ $(l=1,\ 2)$ — плотность материала внутреннего и внешнего цилиндров.

Замыкают постановку задач об установившихся колебаниях условия излучения на бесконечности [5].

Для сведения поставленной задачи к системе интегральных уравнений рассмотрим вспомогательную задачу, которая описывается уравнениями (1.4) и граничными условиями вида

$$r=a \qquad \begin{aligned} &\overset{\circ}{\sigma}_r^{(2)}=\sigma_r^*(z)\\ &\overset{\circ}{\tau}_{rz}^{(2)}=\tau_{rz}^*(z)\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$r=b \qquad \begin{aligned} &\overset{\circ}{\sigma}_r^{(1)}=\overset{\circ}{\sigma}_r^{(2)},\quad \overset{\circ}{\tau}_{rz}^{(1)}=\overset{\circ}{\tau}_{rz}^{(2)}\\ &\overset{\circ}{u}_r^{(1)}=\overset{\circ}{u}_r^{(2)},\quad \overset{\circ}{u}_z^{(1)}=\overset{\circ}{u}_z^{(2)}\end{aligned}$$

Решение вспомогательной задачи строится методом интегрального преобразования Фурье.

Следует отметить, что решение вспомогательной задачи позволит рассчитывать волновое поле внутри составного цилиндра. Наличие анизотропии приводит к существенному усложнению задачи по сравнению с изотропным случаем.

Перемещения $\overset{\circ}{u}_r$ и $\overset{\circ}{u}_z$ при $r=a$ получим в виде

$$\overset{\circ}{u}_r=\frac{\gamma_2^{(2)}+\gamma_3^{(2)}}{A_{33}^{(2)}\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[K_{11}(u)\bar{\sigma}_r^*+iK_{12}(u)\bar{\tau}_{rz}^*\right]\exp(-iux)du$$

$$\overset{\circ}{u}_z=\frac{\gamma_2^{(2)}+\gamma_3^{(2)}}{A_{33}^{(2)}\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[iK_{12}(u)\bar{\sigma}_r^*+K_{22}(u)\bar{\tau}_{rz}^*\right]\exp(-iux)\,du \tag{1.6}$$

причем

$$K_{ij}(u)=\left[K_0(u)\right]^{-1}\det\bar{A}_{ij}(u),\quad \det\bar{A}_0(u)=K_0(u),\quad i,\ j=1,\ 2$$

где

$$\overline{A}_0(u) =$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^{(2)} J_1(\gamma\sigma_1^{(2)}) & \sigma_2^{(2)} J_1(\gamma\sigma_2^{(2)}) & \sigma_1^{(2)} Y_1(\gamma\sigma_1^{(2)}) & \sigma_2^{(2)} Y_1(\gamma\sigma_2^{(2)}) & \sigma_1^{(1)} J_1(\gamma\sigma_1^{(1)}) & \sigma_2^{(1)} J_1(\gamma\sigma_2^{(1)}) \\ \varphi_1^{(2)} J_0(\gamma\sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} J_0(\gamma\sigma_2^{(2)}) & \varphi_1^{(2)} Y_0(\gamma\sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} Y_0(\gamma\sigma_2^{(2)}) & \varphi_1^{(1)} J_0(\gamma\sigma_1^{(1)}) & \varphi_2^{(1)} J_0(\gamma\sigma_2^{(1)}) \\ \psi_1^{(2)}(\gamma, u) & \psi_2^{(2)}(\gamma, u) & P_1(\gamma, u) & P_2(\gamma, u) & T\psi_1^{(1)}(\gamma, u) & T\psi_2^{(1)}(\gamma, u) \\ \sigma_1^{(2)}\chi_1^{(2)}(\gamma, u) & \sigma_2^{(2)}\chi_2^{(2)}(\gamma, u) & \sigma_1^{(2)} Q_1(\gamma, u) & \sigma_2^{(2)} Q_2(\gamma, u) & T\sigma_1^{(1)}\chi_1^{(1)}(\gamma, u) & T\sigma_2^{(1)}\chi_2^{(1)}(\gamma, u) \\ \psi_1^{(2)}(1, u) & \psi_2^{(2)}(1, u) & P_1(1, u) & P_2(1, u) & 0 & 0 \\ \sigma_1^{(2)}\chi_1^{(2)}(1, u) & \sigma_2^{(2)}\chi_2^{(2)}(1, u) & \sigma_1^{(2)} Q_1(1, u) & \sigma_2^{(2)} Q_2(1, u) & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

Матрицы $\overline{A}_{ij}(u)$ получаются из представления матрицы $\overline{A}_0(u)$ следующим образом: $\overline{A}_{11}(u)$ и $\overline{A}_{12}(u)$ получаются заменой 5-ой и 6-ой строки матрицы $\overline{A}_0(u)$ соответственно 1-ой строкой следующей матрицы:

$$\overline{L} = \begin{Vmatrix} \sigma_1^{(2)} J_1(\sigma_1^{(2)}) & \sigma_2^{(2)} J_1(\sigma_2^{(2)}) & \sigma_1^{(2)} Y_1(\sigma_1^{(2)}) & \sigma_2^{(2)} Y_1(\sigma_2^{(2)}) & 0 & 0 \\ \varphi_1^{(2)} J_0(\sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} J_0(\sigma_2^{(2)}) & \varphi_1^{(2)} Y_0(\sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} Y_0(\sigma_2^{(2)}) & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

а $\overline{A}_{21}(u)$ и $\overline{A}_{22}(u)$—заменой 5-ой и 6-ой строки матрицы $\overline{A}_0(u)$ соответственно 2-ой строкой матрицы $\overline{L}$.

Здесь введены следующие обозначения:

$$\varkappa^2 = \varkappa^{(l)^2} = \rho^{(l)} A_{33}^{(l)} \varkappa^{(l)} / \rho^{(l)} A_{33}^{(l)}$$

$$\varkappa^{(l)^2} = \rho^{(l)}\omega^2 a^2 / A_{33}^{(l)}, \quad \gamma_{11}^{(l)} = A_{11}^{(l)}/A_{33}^{(l)}, \quad \gamma_{12}^{(l)} = A_{55}^{(l)}/A_{33}^{(l)}$$

$$\gamma_{13}^{(l)} = A_{13}^{(l)}/A_{33}^{(l)}, \quad \gamma_{14}^{(l)} = A_{12}^{(l)}/A_{33}^{(l)}, \quad \gamma = b/a, \quad x = z/a$$

$$\sigma_i^{(l)^2} = \lambda_i^{(l)^2} a^2, \quad u^2 = \alpha^2 a^2, \quad i = 1, 2$$

$$T = \gamma_{12}(\gamma_{12}^{(2)} + \gamma_{13}^{(2)})/(\gamma_{12}^{(1)} + \gamma_{13}^{(1)}), \quad \gamma_{12} = -A_{33}^{(2)}/A_{33}^{(1)}$$

$$\psi_k^{(l)}(\mu, u) = R(\sigma_k^{(l)}, u) J_0(\mu\sigma_k^{(l)}) + \frac{\gamma_{12}^{(l)} + \gamma_{13}^{(l)}}{\mu} (\gamma_{14}^{(l)} - \gamma_{11}^{(l)}) \sigma_k^{(l)} J_1(\mu\sigma_k^{(l)})$$

$$P_k(\mu, u) = R(\sigma_k^{(l)}, u) Y_0(\mu\sigma_k^{(l)}) + \frac{\gamma_{12}^{(l)} + \gamma_{13}^{(l)}}{\mu} (\gamma_{14}^{(l)} - \gamma_{11}^{(l)}) \sigma_k^{(l)} Y_1(\mu\sigma_k^{(l)}) \tag{1.8}$$

$$\chi_k^{(l)}(\mu, u) = E(\sigma_k^{(l)}, u) J_1(\mu\sigma_k^{(l)}), \quad \mu = 1, \gamma$$

$$Q_k(\mu, u) = E(\sigma_k^{(l)}, u) Y_1(\mu\sigma_k^{(l)}), \quad l, k = 1, 2$$

$$\varphi_k^{(l)} = [\sigma_k^{(l)^2}\gamma_{11}^{(l)} - \varkappa^{(l)^2} + \gamma_{12}^{(l)} u^2][\gamma_{12}^{(l)} + \gamma_{13}^{(l)}]^{-1}$$

$$R(\sigma_k^{(l)}, u) = \gamma_{11}^{(l)}\gamma_{12}^{(l)}\sigma_k^{(l)^2} + \gamma_{13}^{(l)}(\varkappa^{(l)^2} - \gamma_{12}^{(l)} u^2)$$

$$E(\sigma_k^{(l)}, u) = \gamma_{11}^{(l)}\gamma_{12}^{(l)}\sigma_k^{(l)^2} - \gamma_{12}^{(l)}(\varkappa^{(l)^2} + \gamma_{13}^{(l)} u^3)$$

$J_k(t)$ и $Y_k(t)$—функции Бесселя соответственно первого и второго рода, α—параметр интегрального преобразования Фурье, а $\sigma_k^{(l)}$, $\operatorname{Im}\sigma_k^{(l)} \geq 0$, $(k, l = 1, 2)$ являются корнями следующего характеристического уравнения

$$\gamma_1^{(l)}\gamma_{12}^{(l)}\sigma^{(l)4}-[\varkappa^{(l)2}(\gamma_1^{(l)}+\gamma_2^{(l)})+u^2(\gamma_{12}^{(l)2}+2\gamma_{12}^{(l)}\gamma_3^{(l)}-$$

$$-\gamma_1^{(l)})]\sigma^{(l)2}+(\varkappa^{(l)2}-\gamma_{12}^{(l)}u^2)(\varkappa^{(l)2}-u^2)=0 \tag{1.9}$$

Используя решения вспомогательной задачи, сведем исходную задачу к системе интегральных уравнений

$$\int_{-d}^{d}\overline{k}(\xi-x)\underline{q}(\xi)d\xi=2\pi\underline{f}(x),\quad |x|\leq d \tag{1.10}$$

где

$$\overline{k}(t)=\int_{\sigma}\overline{K}(u)\exp(iut)du \tag{1.11}$$

$$\overline{K}(u)=\begin{Vmatrix}K_{11}(u) & iK_{12}(u)\\ -iK_{12}(u) & K_{22}(u)\end{Vmatrix},\quad \underline{f}=\frac{1}{a}\begin{Vmatrix}f_1\\ f_2\end{Vmatrix},\quad d=\frac{c}{a}$$

$$\underline{q}=\begin{Vmatrix}q_1\\ q_2\end{Vmatrix},\quad q_1=\frac{\gamma_{13}^{(l)}+\gamma_{12}^{(l)}}{A_{33}^{(l)}}\tau_r^*,\quad q_2=\frac{\gamma_{13}^{(l)}+\gamma_{12}^{(l)}}{A_{33}^{(l)}}\tau_{rz}^*$$

Здесь контур σ выбирается, как указано в [6]. Общая теория систем уравнений вида (1.10) подробно освещена в [6].

Решение системы (1.10) строится методом фиктивного поглощения путем преобразования исходной системы уравнений к операторной системе с матрицей-символом, вырождающейся в функционально-коммутативную на бесконечности [5, 7]. Следует отметить, что исследование элементов $K_{ij}(u)$ в задачах с анизотропией является существенно более сложной задачей.

2. Элементы $K_{ij}(u)$ представляют отношение двух детерминантов шестого порядка и являются сложными мероморфными функциями, имеющими одинаковые полюсы на вещественной оси. Проведено детальное численное и аналитическое исследование функции $K_{11}(u)$, соответствующей задаче о радиальных колебаниях гладкого бандажа на поверхности слоистого ортотропного цилиндра. В этом случае краевая задача сводится к одному интегральному уравнению вида (1.10), а в представление ядра (1.11) вместо матрицы $\overline{K}(u)$ достаточно подставить $K_{11}(u)$

$$\int_{-d}^{d}k(\xi-x)q_1(\xi)d\xi=2\pi f_1(x);\quad k(t)=\int_{\sigma}K_{11}(u)\exp(iut)du \tag{2.1}$$

Установлено, что число бегущих волн в слое существенным образом зависит от соотношения механических параметров, а также от того какой из двух выбранных материалов заполняет внутренний цилиндр, а какой — внешний.

В настоящей работе для численных результатов применяются два материала со следующими упругими постоянными: керамика из титаната бария (материал 1)

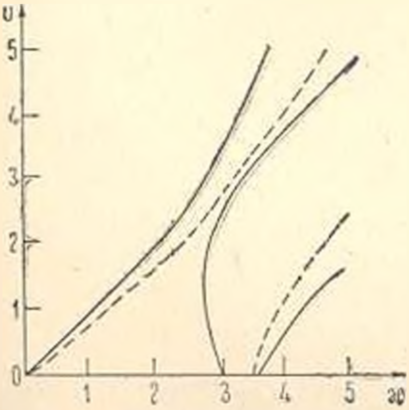
$A_{11}=16{,}8,\quad A_{12}=7{,}1,\quad A_{33}=18{,}9,\quad A_{55}=5{,}46,\quad A_{13}=7{,}82\quad (10^{10}\text{н/м}^2)$

и олова (материал 2)

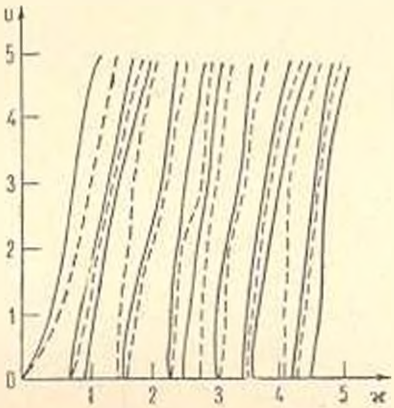
$A_{11}=7{,}35,\ A_{12}=2{,}8,\ A_{33}=8{,}7,\ A_{55}=2{,}2,\ A_{13}=2{,}34,\ A_{66}=2{,}265(10^{10}\text{н/м}^2)$ [8].

Результаты численного анализа показали, что в случае, когда упругие постоянные материалов отличаются незначительно ($\delta = \max A_{jj}^{(1)}/A_{jj}^{(2)} = 0{,}95 \div 1{,}05$), то дисперсионная картина меняется мало при замене материалов местами.

На фиг. 1,2 приведено распределение нулей и полюсов функции $K_{11}(u)$ при $\gamma = 0{,}7$, причем сплошными линиями обозначены линии действительных полюсов, прерывистыми—действительных нулей. Фиг. 1 отвечает случаю, когда внешний цилиндр изготовлен из материала 1, а внутренний изготовлен из материала 2. Этот случай далее будем обозначать I (жесткий-внешний цилиндр, мягкий-внутренний, в данном случае $\delta = 2{,}48$). Фиг. 2 соответствует противоположному расположению материалов—внешний цилиндр изготовлен из материала 2, а внутренний—из материала 1. Этот случай далее будем обозначать II (мягкий-внешний цилиндр, жесткий-внутренний, в этом случае $\delta = 0{,}46$).



Фиг. 1



Фиг. 2

Следует отметить, что полюсы функции $K_{11}(u)$ отвечают бегущим плоским волнам по поверхности цилиндра. Фиг. 1 и 2 позволяют указать их количество в зависимости от безразмерной частоты $\varkappa$. Так, например, в случае I при $\varkappa = 2$ имеется всего одна бегущая поверхностная волна, а в случае II таких волн уже будет 4.

Аналогичные расчеты проведены для различных значений γ. Можно сделать следующий вывод: в случае I число бегущих волн с ростом γ (тонкое покрытие) не возрастает, а в слуае II число бегущих волн с ростом γ не убывает. Это, видимо, связано в случае II с переотражением волн от поверхности внутреннего более жесткого цилиндра.

Проведем асимптотическое исследование функции $K_{11}(u)$ при $|u| \to \infty$

$$K_{11}(0, \varkappa) = \Bigg\{ \sqrt{\gamma_1^{(1)}} \Bigg[Y_1\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}}\right) J_1\left(\frac{\gamma\varkappa}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}}\right) - J_1\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}}\right) \times$$

$$\times Y_1\left(\frac{\gamma\varkappa}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}}\right)\Bigg] B^{(2)}(\gamma, J) + \sqrt{\gamma_1^{(2)}}\, J_1\left(\frac{\gamma\varkappa}{\sqrt{\gamma_1^{(1)}}}\right)\Bigg[Y_1\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}}\right) \times \qquad (2.2)$$

$$\times B^{(2)}(\gamma, J)-J_0\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{\gamma_{11}^{(2)}}}\right)B^{(2)}(\gamma, Y)\Bigg]\Bigg\}D_2(0, \varkappa)[D_0(0, \varkappa)]^{-1}$$

Здесь

$$D_0(0, \varkappa)=D_1(0, \varkappa)\, D_2(0, \varkappa)$$

$$D_1(0, \varkappa)=\gamma_{12}^{(2)}J_1\left(\frac{\gamma\varkappa}{\sqrt{\gamma_{11}^{(1)}}}\right)[B^{(2)}(\gamma, J)B^{(2)}(1, Y)+B^{(2)}(\gamma, Y)\times$$

$$\times B^{(2)}(1, J)]-\sqrt{\gamma_{11}^{(1)}\gamma_{11}^{(2)}}B^{(1)}(\gamma, J)\left[J_1\left(\frac{\gamma\varkappa}{\sqrt{\gamma_{11}^{(1)}}}\right)B^{(2)}(1,Y)-Y_1\left(\frac{\gamma\varkappa}{\sqrt{\gamma_{11}^{(1)}}}\right)B^{(2)}(1,J)\right]$$

$$(2.3)$$

$$D_2(0, \varkappa)=\left\{\gamma_{12}^{(2)}J_0\left(\frac{\gamma\varkappa}{\sqrt{\gamma_{12}^{(2)}}}\right)\left[J_1\left(\frac{\gamma\varkappa}{\sqrt{\gamma_{12}^{(2)}}}\right)Y_1\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{\gamma_{12}^{(2)}}}\right)-Y_1\left(\frac{\gamma\varkappa}{\sqrt{\gamma_{12}^{(2)}}}\right)J_1\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{\gamma_{12}^{(2)}}}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\gamma_{12}^{(1)}\gamma_{12}^{(2)}}J_1\left(\frac{\gamma\varkappa}{\sqrt{\gamma_{12}^{(1)}}}\right)\left[Y_1\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{\gamma_{12}^{(2)}}}\right)J_0\left(\frac{\gamma\varkappa}{\sqrt{\gamma_{12}^{(2)}}}\right)-J_1\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{\gamma_{12}^{(2)}}}\right)Y_0\left(\frac{\gamma\varkappa}{\sqrt{\gamma_{12}^{(2)}}}\right)\right]\right\}$$

$$B^{(k)}(\mu, J)=\varkappa J_0\left(\frac{\mu\varkappa}{\sqrt{\gamma_{11}^{(k)}}}\right)+\frac{\gamma_{44}^{(k)}-\gamma_{11}^{(k)}}{\mu\sqrt{\gamma_{11}^{(k)}}}J_1\left(\frac{\mu\varkappa}{\sqrt{\gamma_{11}^{(k)}}}\right), \quad \mu=1, \gamma$$

$$B^{(k)}(\mu, Y)=\varkappa Y_0\left(\frac{\mu\varkappa}{\sqrt{\gamma_{11}^{(k)}}}\right)+\frac{\gamma_{44}^{(k)}-\gamma_{11}^{(k)}}{\mu\sqrt{\gamma_{11}^{(k)}}}Y_1\left(\frac{\mu\varkappa}{\sqrt{\gamma_{11}^{(k)}}}\right), \quad k=1, 2$$

Из уравнения $D_0(0, \varkappa)=0$ выделяются два семейства частот запирания, которые определяются из уравнений

$$D_1(0, \varkappa)=0, \quad D_2(0, \varkappa)=0 \tag{2.4}$$

что соответствует стоячим волнам.

Используя асимптотические представления для функций Бесселя, получим из системы (2.4), что частоты запирания с большими номерами в слоистом цилиндре удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma\varkappa_n^{(1)}}{\sqrt{\gamma_{11}^{(1)}}}-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\varkappa_n^{(1)}\varepsilon}{\sqrt{\gamma_{11}^{(2)}}}+\sqrt{\frac{\gamma_{11}^{(1)}}{\gamma_{11}^{(2)}}}=0\\
&\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma\varkappa_n^{(2)}}{\sqrt{\gamma_{12}^{(1)}}}-\frac{3\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\varkappa_n^{(2)}\varepsilon}{\sqrt{\gamma_{12}^{(2)}}}+\sqrt{\frac{\gamma_{12}^{(1)}}{\gamma_{12}^{(2)}}}=0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Для решения интегрального уравнения (2.1) используется метод фиктивного поглощения [7].

Функция $K_{11}(u)$ удовлетворяет всем условиям, позволяющим применить этот метод, а именно: она является четной мероморфной функцией, имеющей конечное число нулей z_s $(s=1, 2, \ldots, n_1)$ и полюсов p_l $(l=1, 2, \ldots, n_2)$ $n_2 \geq n_1$ на вещественной оси и убывающая на бесконечности

$$K_{11}(u)=C_1|u|^{-1}(1+O(u^{-1})) \quad |u|\to\infty$$

Аппроксимируем функцию $K_{11}(u)$ функцией

$$K_*(u)=(u^2+b_*^2)^{-1/2}H(u), \quad H(u)=C_1\prod_{k=1}^{n}(u^2-z_k^2)(u^2-p_k^2)^{-1}, \quad b_*>0 \tag{2.6}$$

z_k $(k=n-n_1, \ldots, n)$, p_k $(k=n-n_2, \ldots, n)$—соответственно комплексные нули и полюсы $H(u)$, которые находятся в процессе аппроксимации функции полиномами Лагранжа.

Приближенное решение уравнения (2.1) при $f_1(x)=\exp(i\gamma_1 x)$, $\operatorname{Im}\gamma_1=0$ имеет вид [5]

$$q_1(x)=\frac{\exp(-i\gamma_1 x)}{K_{11}(\gamma_1)}+\frac{\sqrt{b_*-i\gamma_1}}{2\pi i}\exp(-i\gamma_1 d)\int_{\sigma}\frac{\sqrt{b_*+iu}}{H(u)(u-\gamma_1)}\exp(i(d-x)u)du-$$

$$-\frac{\sqrt{b_*+i\gamma_1}}{2\pi i}\exp(i\gamma_1 d)\int_{\sigma}\frac{\sqrt{b_*-iu}}{H(u)(u-\gamma_1)}\exp(-i(d+x)u)du-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2n}c_k\times \tag{2.7}$$

$$\times\int_{\sigma}\frac{\sqrt{b_*-iu}}{H(u)}[F(u,x_k)\exp(-i(d+x)u)+F(u,-x_k)\exp(-i(d-x)u)]du$$

где

$$F(u,x_k)=\sum_{m=1}^{n}\frac{D_m\exp(i(d+x_k)p_m)}{\sqrt{b_*-ip_m}\,(p_m-d)}, \quad D_m=\operatorname*{Res}_{u=p_m}H(u)$$

$x_k=\pm y_k$, y_k—точки, делящие интервал $(0, d)$ на равные отрезки, а c_k есть решение линейной алгебраической системы [7]

$$\sum_{k=1}^{2n}A_{lk}^{\pm}c_k=B_l^{\pm}, \quad l=1, 2, \ldots, n$$

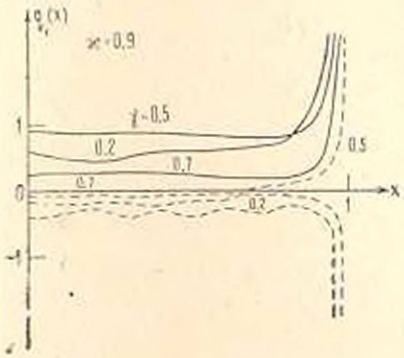
причем интегралы в (2.7) легко вычисляются по теории вычетов.

В решении (2.7) первое слагаемое есть вырожденное решение, соответствующее бесконечному штампу, второй и третий интегралы описывают влияние краев штампов и имеют характерную корневую особенность.

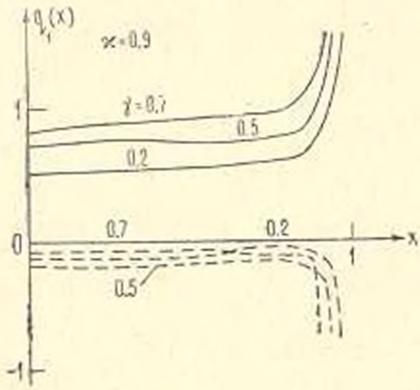
Последний интеграл представляет собой осциллирующую составляющую контактных напряжений под штампом.

3. Численный пример. Получено распределение контактных напряжений под штампом в задачах о контакте без трения для случаев I, II при различных параметрах. Например, при $\varkappa=0{,}9$ функция $K_{11}(u)$ имеет и в случае I и в случае II один нуль и один полюс, так что качественная картина напряженного состояния одинакова (фиг. 3 и 4). Этот же вывод можно сделать, анализируя фиг. 1 и 2 при малых частотах (что соответствует малым $\varkappa$). При более высоких частотах качественная картина напряженного состояния различна в случаях I и II (фиг. 5). На этих фигурах сплошными линиями обозначены $\operatorname{Re} q_1(x)$, а прерывистыми линиями $-\operatorname{Im} q_1(x)$.

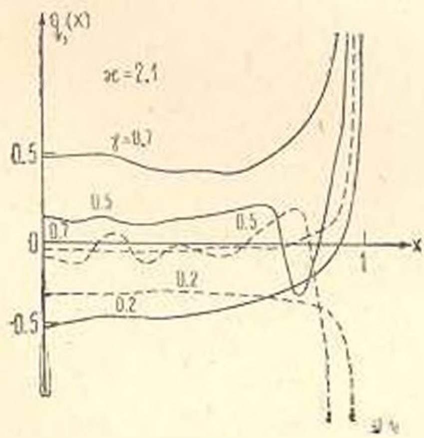
В этих расчетах эффективное приближение функции $K_{11}(u)$ для различных частот колебания $\varkappa$ получено при аппроксимации полиномами Лагранжа порядка 6, 8. Погрешность аппроксимации не превышает 8—15%. Например, при $\varkappa = 0{,}9$, $\gamma = 0{,}7$ порядок полинома Лагранжа в случаях I и II берется соответственно 6 и 8, а для $\varkappa = 2{,}1$ берется 8 и 8.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Проведено численное исследование при малых γ ($\gamma \sim 0.01 \div 0.1$). Получено, что дисперсионная картина и распределение контактных напряжений практически не отличаются от соответствующих кривых для аналогичной задачи сплошного цилиндра, изготовленного из материала внешнего цилиндра для широкого диапазона частот $\varkappa \in [0,5]$.

Авторы благодарят В. А. Бабешко за постановку задачи и обсуждение результатов.

ԵՐԿՇԵՐՏ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԱՆՎԵՐՋ ԳԼԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԴԻՆԱՄԻԿ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

ՎԱՏՈՒԼՅԱՆ Ա. Հ., ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ Վ. Վ.

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է առաձգական երկշերտ օրթոտրոպ անվերջ գլանի մակերևույթի վրա շտամպի տատանման կոնտակտային խնդիր։ Ընդհանուր դեպքում խնդիրը բերվում է կոնտակտային լարումների նկատմամբ առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի։ Առաջարկվում է խնդրի լուծման մեթոդ։ Բերվում է թվային օրինակ։

A CONTACT DYNAMICAL PROBLEM FOR AN INFINITE ORTHOTROPIC TWO-LAYERED CYLINDER

A. O. VATULIAN, V. V. HOVSEPIAN

S u m m a r y

A contact problem of vibration of the stamp on the surface of an infinite orthotropic two-layered elastic cylinder is considered. In the general case the problem is reduced to the system of the first type of integral equations relative to the contact stresses. A method for the solution of the problem is proposed. A numerical example has been presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берштейн П. Я.* Динамическое кручение бесконечного цилиндра, заключенного в упругую полубесконечную обойму.—Гидроаэромех. и теор. упругости. Межвуз. науч. сб., 1976, вып. 20, с. 82—86.
2. *[illegible] В. В.* Об одной динамической задаче для бесконечного цилиндра.—ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 555—559.
3. *Дубинин В. В.* Смешанная динамическая стационарная упругая задача для полого толстостенного цилиндра.—Изв. вузов. Машиностр., 1981, № 4, с. 5—10.
4. *Ватульян А. О., Овсепян В. В.* О некоторых динамических контактных задачах для полого ортотропного цилиндра.—Школа-семинар «Теория упругости и вязкоупругости». Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1982, с. 81.
5. *Ватульян А. О., Овсепян В. В., Пряхина О. Д.* Контактная динамическая задача для ортотропного бесконечного цилиндра.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1983, т. 36, № 4, с. 47—55.
6. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.—М.: Наука, 1979. 320 с.
7. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Метод фиктивного поглощения в плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления.—ПММ, 198., т. 45, вып. 4, с. 725—733.
8. *Хантингтон Г.* Упругие постоянные кристаллов.—УФН, 1961, 74, вып. 2, с. 303—352, вып. 3, с. 461—520.

Ростовский госуниверситет

Поступила в редакцию
14.V.1984