

УДК 539.3

К ИССЛЕДОВАНИЮ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ  
 НЕОДНОРОДНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН,  
 ПОДКРЕПЛЕННЫХ УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

ЮРИНЕЦ В. Е.

1. Исследуем неоднородную ортотропную полубесконечную пластину, несимметрично подкрепленную по всей длине прямолинейного края упругим элементом постоянного сечения. Подкрепляющий элемент нагружен внешними нормальными  $N$ , тангенциальными  $T$  и перерезывающими  $P$  усилиями, а также моментами  $M$ . Со стороны упругого элемента на торец пластины будут передаваться соответствующие контактные усилия  $N^{(0)}$ ,  $T^{(0)}$ ,  $P^{(0)}$  и моменты  $M^{(0)}$ . Таким образом, для контура контакта имеют место условия равенства перемещений подкрепляющего элемента и пластины и справедливы соотношения

$$(\varepsilon_y)_{y=0} = N^{(0)}, \quad (\varepsilon_{xy})_{y=0} = T^{(0)}, \quad (M_y)_{y=0} = M^{(0)}, \quad \left( N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x} \right)_{y=0} = P^{(0)} \quad (1.1)$$

При наличии эксцентриситета подкрепления ( $\varepsilon_0 \neq 0$ ) независимо от вида нагружения пластина испытывает обобщенное плоское напряженное и изгибное состояния, вследствие чего необходимо решать комплексную задачу сопряжения для нахождения контактных усилий и моментов.

Предположим, что коэффициенты Пуассона  $\nu_1$  и  $\nu_2$  для материала пластины постоянные, а модули упругости  $E_1$ ,  $E_2$  и модуль сдвига  $G$  являются дифференцируемыми функциями декартовой координаты  $y$  и меняются с глубиной по закону

$$E_1 = E_1^{(0)} \exp[-f(y)], \quad E_2 = E_2^{(0)} \exp[-f(y)], \quad G = G^{(0)} \exp[-f(y)] \quad (1.2)$$

где  $f(y)$  — определено положительно дифференцируемая функция.

Введение функции  $f(y)$  в экспоненту не нарушает общности постановки задачи, так как, вводя некоторую определено положительную дифференцируемую функцию  $f^*(y)$  при помощи соотношения  $f(y) = -|\ln f^*(y)|$ , в выражениях (1.2) можно избавиться от экспоненты.

Используя соотношения Гука для ортотропной пластины, условия равновесия, условия совместности [1] и выражения (1.2), запишем дифференциальное уравнение для некоторой функции  $L(x, y)$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2 \partial y^4} + 2f' \frac{\partial^2 L}{\partial x^2 \partial y^2} + (f'^2 + f'') \frac{\partial^2 L}{\partial x^2 \partial y^2} + \left( \frac{E_1^{(0)}}{G^{(0)}} - 2\nu_1 \right) \frac{\partial^2 L}{\partial x^4 \partial y^2} +$$

$$+ f' \left( \frac{E_1^{(0)}}{G^{(0)}} - 2\nu_1 \right) \frac{\partial^2 L}{\partial x^4 \partial y} + \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} \frac{\partial^2 L}{\partial x^4} - \nu_1 (f'^2 + f'') \frac{\partial^2 L}{\partial x^4} = 0 \quad (1.3)$$

где компоненты тензора напряжений задаются выражениями [2]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 L}{\partial x^4}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 L}{\partial x^3 \partial y} \quad (1.4)$$

Таким же образом выведем дифференциальное уравнение для нахождения функции прогибов  $w_2(x, y)$  пластины

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} - 2f' \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + (f'^2 - f'') \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + 2 \left[ \nu_1 + 2(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{G^{(0)}}{E_1^{(0)}} \right] \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} -$$

$$- 2f' \left[ \nu_1 + 2(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{G^{(0)}}{E_2^{(0)}} \right] \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \nu_1 (f'^2 - f'') \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0 \quad (1.5)$$

Для упрощения проведения численных расчетов конкретных задач путем перехода к безразмерным величинам введем взаимосвязь между модулями упругости и модулем сдвига пластины при помощи соотношения

$$G^{(0)} = \frac{E^{(0)}}{2(\rho_0^2 + \nu_1)} \left( \rho_0^2 = \sqrt{\frac{E^{(0)}}{E_y^{(0)}}} \right) \quad (1.6)$$

В области изображений Фурье уравнения (1.3), (1.5) имеют вид

$$\frac{d^4 \Theta}{dy^4} - 2f' \frac{d^2 \Theta}{dy^2} + (f'^2 + f'' - 2\rho_0^2 \lambda^2) \frac{d^2 \Theta}{dy^2} - 2\rho_0^2 \lambda^2 f' \frac{d\Theta}{dy} +$$

$$+ i^2 [\lambda^2 \rho_0^4 + \nu_1 (f'^2 + f'')] \Theta = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{d^4 \bar{w}_2}{dy^4} - 2f' \frac{d^2 \bar{w}_2}{dy^2} + (f'^2 - f'' - 2\rho_0^2 \lambda^2) \frac{d^2 \bar{w}_2}{dy^2} + 2\rho_0^2 \lambda^2 \frac{d\bar{w}_2}{dy} +$$

$$+ i^2 [\lambda^2 \rho_0^4 - \nu_1 (f'^2 - f'')] \bar{w}_2 = 0 \quad (1.8)$$

причем

$$\Theta(\lambda, y) = \lambda^2 \bar{L}(\lambda, y) \quad (1.9)$$

Следовательно, задача обобщенного плоского напряженного состояния и задача изгиба для неоднородных ортотропных неограниченных в направлении оси  $x$  пластины сводится к решению краевых задач линейных дифференциальных уравнений (1.7) и (1.8) при соответствующих граничных условиях.

2. Если дифференциальные уравнения (1.7), (1.8) имеют решение, то эти уравнения можно представить в виде

$$\left| \frac{d^2}{dy^2} + \alpha(y) \frac{d}{dy} + \beta(y) \right| \left| \frac{d^2 F}{dy^2} + \gamma(y) \frac{dF}{dy} + \delta(y) F \right| = 0 \quad (2.1)$$

где  $F = \Theta$  для уравнения (1.7) и  $F = \bar{w}_2$  для уравнения (1.8).

Независимые коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  можно определить из системы уравнений

$$\alpha + \gamma = \varphi_1(y), \quad 2 \frac{d\gamma}{dy} + \alpha\gamma + \beta + \delta = \varphi_2(y) \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2\gamma}{dy^2} + 2 \frac{d\delta}{dy} + \alpha \frac{d\gamma}{dy} + \alpha\delta + \beta\gamma = \varphi_3(y), \quad \frac{d^2\delta}{dy^2} + \alpha \frac{d\delta}{dy} + \beta\delta = \varphi_4(y)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) &= 2f', & \varphi_2(y) &= f'^2 + f'' - 2\rho_0^2 \lambda^2 \\ \varphi_3(y) &= -2\rho_0^2 \lambda^2 f', & \varphi_4(y) &= \lambda^4 \rho_0^4 + \nu_1 \lambda^2 (f'^2 + f'') \end{aligned} \quad (2.3)$$

для задачи обобщенного плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) &= -2f', & \varphi_2(y) &= f'^2 - f'' - 2\rho_0^2 \lambda^2 \\ \varphi_3(y) &= 2\rho_0^2 \lambda^2 f', & \varphi_4(y) &= \nu_1 \rho_0^4 - \nu_1 \lambda^2 (f'^2 - f'') \end{aligned} \quad (2.4)$$

для задачи изгиба.

С помощью системы уравнений (2.2) можно найти в явном виде коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  для некоторых частных случаев  $f(y)$ , когда дифференциальные уравнения (1.7), (1.8) представляется возможным записать в виде (2.1).

Предположим, что  $f(y)$  функция вида

$$f(y) = -\ln(g + ky) \quad (2.5)$$

где  $g$ ,  $k$ ,  $s$  — постоянные.

Для функции (2.5) из системы уравнений (2.2) с учетом (2.3) находим

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{k(1-s)}{g+ky}, & \beta &= -\rho_0^2 \lambda^2 \pm \frac{\lambda k \sqrt{(1+s)(\rho_0^2 - \nu_1 s)}}{g+ky} - \frac{k^2(1+s)}{(g+ky)^2} \\ \gamma &= -\frac{k(1+s)}{g+ky}, & \delta &= -\rho_0^2 \lambda^2 \mp \frac{\lambda k \sqrt{(1+s)(\rho_0^2 - \nu_1 s)}}{g+ky} \end{aligned} \quad (2.6)$$

На основании полученных соотношений (2.6) уравнение (1.7) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{dy^2} + \frac{k(1-s)}{g+ky} \frac{d}{dy} - \left[ \rho_0^2 \lambda^2 \mp \frac{\lambda k \sqrt{(1+s)(\rho_0^2 - \nu_1 s)}}{g+ky} - \frac{k^2(1+s)}{(g+ky)^2} \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{d^2 \Theta}{dy^2} - \frac{k(1-s)}{g+ky} \frac{d\Theta}{dy} - \left[ \rho_0^2 \lambda^2 \pm \frac{\lambda k \sqrt{(1+s)(\rho_0^2 - \nu_1 s)}}{g+ky} \right] \Theta \right\} = 0 \quad (2.7) \end{aligned}$$

Следуя изложенной методике, аналогично уравнение (1.8) представим в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{dy^2} + \frac{k(1-s)}{g+ky} \frac{d}{dy} - \left[ \rho_0^2 \lambda^2 \mp \frac{\lambda k \sqrt{(1-s)(\rho_0^2 - \nu_1 s)}}{g+ky} + \frac{k^2(1-s)}{(g+ky)^2} \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{d^2 \bar{w}_2}{dy^2} - \frac{k(1-s)}{g+ky} \frac{d\bar{w}_2}{dy} - \left[ \rho_0^2 \lambda^2 \pm \frac{\lambda k \sqrt{(1-s)(\rho_0^2 - \nu_1 s)}}{g+ky} \right] \bar{w}_2 \right\} = 0 \quad (2.8) \end{aligned}$$

В общем случае решение дифференциальных уравнений (2.7), (2.8) сводится к решению уравнений

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2} - \frac{k(1+s)}{g+ky} \frac{d\Theta}{dy} - \left[ p_0^2 s \pm \frac{\lambda k V \sqrt{(1+s)(p_0^2 - \nu_1 s)}}{g+ky} \right] \Theta = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2\bar{\omega}_2}{dy^2} - \frac{k(1-s)}{g+ky} \frac{d\bar{\omega}_2}{dy} - \left[ p_0^2 s \pm \frac{\lambda k V \sqrt{(1-s)(p_0^2 - \nu_1 s)}}{g+ky} \right] \bar{\omega}_2 = 0 \quad (2.10)$$

которые подстановками

$$\Theta = \Psi^{\frac{1+s}{2}} W(\Psi), \quad \bar{\omega}_2 = \Psi^{\frac{1-s}{2}} W(\Psi), \quad \Psi = \frac{2p_0^2}{k} (g+ky) \quad (2.11)$$

сводятся к уравнениям Уиттекера [3]. Скончательно для функций  $\Theta$  и  $\bar{\omega}_2$  имеем

$$\Theta = y_0^{\frac{s+1}{2}} [C_1 W_{n,m}(\Psi) - C_2 W_{-n,m}(\Psi) + C_3 W_{n,m}(-\Psi) + C_4 W_{-n,m}(-\Psi)] \quad (2.12)$$

$$\bar{\omega}_2 = y_0^{\frac{1-s}{2}} [B_1 W_{\pm n,\pm}(\Psi) + B_2 W_{-n,\pm}(\Psi) + B_3 W_{\pm n,\pm}(-\Psi) + B_4 W_{-n,\pm}(-\Psi)] \quad (2.13)$$

где  $C_j, B_j$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) — произвольные функции параметра  $\lambda$ , подлежащие определению из граничных условий;  $W_{\pm n,m}(\pm \Psi), W_{\pm n,\pm}(\pm \Psi)$  — функции Уиттекера

$$y_0 = g+ky; \quad n = \frac{1}{2} \sqrt{(1+s)(p_0^2 - \nu_1 s)}; \quad m = 1 + \frac{s}{2}; \quad x = \frac{1}{2} \sqrt{(1-s)(p_0^2 - \nu_1 s)} \\ \mu = 1 - \frac{s}{2} \quad (2.14)$$

В частности, при  $n=0$ , то есть, когда  $s=-1$  или  $\nu_1 = p_0^2/s$ , уравнения (2.9) совпадают и дают только два независимых решения. Так если  $\nu_1 = p_0^2/s$  и  $s \neq -1$ , то функцию  $\Theta$  следует искать из уравнения

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2} - \frac{k(1+s)}{g+ky} \frac{d\Theta}{dy} - p_0^2 s \Theta = \Theta_0 \quad (2.15)$$

где  $\Theta_0$  — общее решение уравнения

$$\frac{d^2\Theta_0}{dy^2} + \frac{k(1-s)}{g+ky} \frac{d\Theta_0}{dy} - \left[ p_0^2 s + \frac{k(1+s)}{g+ky} \right] \Theta_0 = 0 \quad (2.16)$$

Решая уравнения (2.16) и (2.15), получаем

$$\Theta = y_n^m \left\{ C_1 \left[ I_m \left( \frac{\Psi}{2} \right) \int K_m^2 \left( \frac{\Psi}{2} \right) d\Psi - K_m(\Psi) \int I_m \left( \frac{\Psi}{2} \right) K_m \left( \frac{\Psi}{2} \right) d\Psi \right] + \right. \\ \left. + C_2 \left[ K_m \left( \frac{\Psi}{2} \right) \int I_m^2 \left( \frac{\Psi}{2} \right) d\Psi - I_m \left( \frac{\Psi}{2} \right) \int I_m \left( \frac{\Psi}{2} \right) K_m \left( \frac{\Psi}{2} \right) d\Psi \right] + \right. \\ \left. + C_3 I_m \left( \frac{\Psi}{2} \right) + C_4 K_m \left( \frac{\Psi}{2} \right) \right\} \quad (2.17)$$

где  $I_m(\Psi/2)$ ,  $K_m(\Psi/2)$  — функции Бесселя от мнимого аргумента  $l$  и II рода порядка  $m$ .

Когда  $s = -1$ , выражение для  $\Theta$  имеет вид

$$\Theta = C_1 e^{\frac{\Psi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\Psi}{2}} + C_3 [e^{\frac{\Psi}{2}} \operatorname{In} y_0 - e^{-\frac{\Psi}{2}} \operatorname{Ei}^*(\Psi)] + C_4 [e^{-\frac{\Psi}{2}} \operatorname{In} y_0 - e^{\frac{\Psi}{2}} \operatorname{Ei}(-\Psi)] \quad (2.18)$$

где  $\operatorname{Ei}^*(\Psi)$ ,  $\operatorname{Ei}(-\Psi)$  — интегральные показательные функции.

Аналогично, выражение для трансформанты функции прогиба  $\bar{w}_2$  при  $\nu_1 = p_0^2/s$  и  $s \neq 1$  будет вида (2.17), в котором  $m$  заменено на  $\mu$ , а при  $s = 1$  — вида (2.18).

3. Предположим, для определенности, что  $n \neq 0$  и  $\lambda \neq 0$ . Тогда выражения для  $\Theta$  и  $\bar{w}_2$ , ограниченные на бесконечности ( $y \rightarrow \infty$ ), будут иметь вид

$$\Theta = y_0^{\mu - \frac{1}{2}} [C_1 W_{n,m}(\Psi) + C_2 W_{-n,m}(\Psi)] \quad (3.1)$$

$$\bar{w}_2 = y_0^{\mu - \frac{1}{2}} [B_1 W_{\mu,\nu}(\Psi) + B_2 W_{-\mu,\nu}(\Psi)] \quad (3.2)$$

Используя соотношения Коши, условия равновесия и выражения (1.2), (1.4), (2.5), получаем

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{E_1} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^2 \partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x^4} \right)$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = \left( \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{1}{G} \right) \frac{\partial^2 L}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1}{E_1} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{ks}{E_1 y_0} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^2 \partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x^4} \right) \quad (3.3)$$

Применяя к соотношениям (3.3) интегральное преобразование Фурье по переменной  $x$ , учитывая при этом выражения (1.6), (3.1), (3.2) и граничные условия (1.1), для точек контактирующего торца пластины имеем

$$(\partial_x^2 \bar{u}_2)_{y=0} = \frac{1}{\gamma_0 E_1^{(0)}} (\gamma_1 \bar{N}^{(0)} + \beta_1 \gamma_2 \bar{T}^{(0)}), \quad (\lambda^2 \bar{v}_2)_{y=0} = \frac{1}{\gamma_2 E_1^{(0)}} (\gamma_3 \bar{N}^{(0)} + \beta_2 \gamma_4 \bar{T}^{(0)}) \quad (3.4)$$

где

$$\gamma_0 = W_{n,m} \left( \frac{2p_0 \lambda}{k} \right) \left[ 2n W_{-n,m} \left( \frac{2p_0 \lambda}{k} \right) - W_{-n+1,m} \left( \frac{2p_0 \lambda}{k} \right) \right] + \\ + W_{-n,m} \left( \frac{2p_0 \lambda}{k} \right) W_{n+1,m} \left( \frac{2p_0 \lambda}{k} \right)$$

$$\gamma_1 = [(p_0 t_2 + t_1 t_{12} - p_0 t_3 - t_1 t_{13})^2 + k(p_0 t_2 + t_2 t_{12} - p_0 t_3 - t_3 t_{13})^2 + k^2(t_2 t_{12} - \\ - t_3 t_{13})] W_{n,m} \left( \frac{2p_0 \lambda}{k} \right) W_{-n,m} \left( \frac{2p_0 \lambda}{k} \right) - [t_1 \lambda^2 + k(p_0 t_2 + t_2) \lambda + k^2(t_2 + t_4 t_{12})] \times \\ \times W_{n,m} \left( \frac{2p_0 \lambda}{k} \right) W_{-n+1,m} \left( \frac{2p_0 \lambda}{k} \right) + [t_1 \lambda^2 + 2(p_0 t_2 + t_2) \lambda + k^2(t_2 + t_4 t_{12})] \times \\ \times W_{n,m} \left( \frac{2p_0 \lambda}{k} \right) W_{n+1,m} \left( \frac{2p_0 \lambda}{k} \right); \quad \gamma_2 = [(t_3 - t_2) \lambda + k(t_3 - t_2)] W_{n,m} \left( \frac{2p_0 \lambda}{k} \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times W_{-n,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) + kt_3 \left[ W_{n,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) W_{-n+1,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) - W_{-n,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) \times \right. \\
& \times W_{-n+1,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) \left. \right]; \quad \gamma_3 = [(\rho_0 t_8 + t_7 t_{16} - \rho_0 t_{13} - t_7 t_{17})i^2 + k(\rho_0 t_9 + t_6 t_{15} - t_{12} t_{17} - \\
& - \rho_0 t_{14})i^2 + k^2(\rho_0 t_{10} + t_5 t_{18} - \rho_0 t_{15} - t_{11} t_{17})i + k^2(t_{10} t_{16} - t_{15} t_{17})] W_{n,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) \times \\
& \times W_{-n,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) + [( \rho_0 t_1 - t_2 )i^3 + k(\rho_0 t_{16} + t_1 t_{17} - t_9)i^2 + k^2(\rho_0 t_{12} + t_{16} t_{17} - \\
& - t_9)i + k^3(t_{12} t_{17} - t_{10})] W_{n,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) W_{-n+1,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) + [(t_7 - \rho_0 t_1)i^3 + \\
& + k(t_{13} - \rho_0 t_{17} - t_2 t_{18})i^2 + k^2(t_{14} - \rho_0 t_{12} - t_{11} t_{16})i - k^3(t_{18} t_{12} - t_{15})] \times \\
& \times W_{-n,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) W_{n+1,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) + k^2(t_{11} - t_{10}) W_{n-1,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) W_{-n-1,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) \\
& \gamma_4 = [(t_{13} - t_9)i^2 + k(t_{18} - t_9)i + k^2(t_{13} - t_{10})] W_{n,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) W_{-n,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) + \\
& + (t_1 i^2 + kt_{11}i + k^2 t_{12}) W_{-n,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) W_{n+1,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) - (t_1 i^2 + kt_{11}i + \\
& + k^2 t_{12}) W_{n,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right) W_{-n+1,m} \left( \frac{2p_0^j}{k} \right); \quad t_1 = p_0^2 - \gamma_1; \quad t_2 = p_0(2m - 2n - 1) \\
& t_3 = 2m^2 - 2mn - 2m - n + \frac{1}{2}; \quad t_4 = 1 - 2m; \quad t_5 = p_0(2m + 2n - 1) \\
& t_6 = 2m^2 + 2mn - 2m - n + \frac{1}{2}; \quad t_7 = p_0(p_0^2 - \gamma_1); \quad t_8 = p_0^2 \left( s - m + n + \frac{1}{2} \right) \\
& + \gamma_1 \left( m - n + \frac{1}{2} \right); \quad t_9 = p_0 [s(2m - 2n - 1) + (5mn - 4m^2 - 2n^2 + 6m - 5n - 2)] \\
& t_{10} = s \left( 2m^2 - 2nm - 2m + n + \frac{1}{2} \right) + 4m^2 n - 4m^3 + 8m^2 - 6mn - 5m - 2n + 1 \\
& t_{11} - - t_{10} = 2p_0 n; \quad t_{12} = s(2m - 1) - 4m^2 + 6n - 2; \quad t_{13} = p_0^2 \left( s - m + n + \frac{1}{2} \right) + \\
& + \gamma_1 \left( m + n + \frac{1}{2} \right); \quad t_{14} = p_0 [s(2m + 2n - 1) - 4m^2 + 6m + 5n - 2n^2 - 6mn - 2] \\
& t_{15} = s \left( 2m^2 + 2nm - 2m - n + \frac{1}{2} \right) - 8m^2 + 6mn - 4m^3 - 4m^2 n - 5m - 2n + 1 \\
& t_{17} = n + m - \frac{1}{2}; \quad t_{18} = m - n - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Таким же путем, используя выражение (3.2) и граничные условия (1.1), запишем соотношения для трансформанты функции прогиба пласт-

тиния  $\bar{w}_2(x, y)$  и ее первой производной для точек контура контакта с упругим элементом

$$(\bar{w}_2)_{y=0} = \frac{3(1-\nu_1\nu_2)}{2h^2 E_2^* \nu_0} (\nu_1 \bar{P}^{(0)} + \nu_2 \bar{M}^{(0)}), \quad \left(\frac{d\bar{w}_2}{dy}\right)_{y=0} = \frac{3(1-\nu_1\nu_2)}{2h^2 E_2^* \nu_0} (\nu_2 \bar{P}^{(0)} + \nu_1 \bar{M}^{(0)})$$

где  $2h$  — толщина пластины;  $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$  — функции параметра  $\lambda$ , зависящие также от упругих, жесткостных и геометрических характеристик неоднородной ортотропной пластины, выражения которых ввиду большой громоздкости здесь не приведены.

4. Расчет упругого подкрепляющего элемента базируется на теории тонких криволинейных стержней. Используя результаты работы [4], уравнения для трансформант перемещений прямолинейного упругого элемента с учетом всех его упругих, жесткостных, геометрических характеристик и эксцентриситета подкрепления имеют вид

$$\begin{aligned} i^2 \bar{u}_1 &= \frac{2h^2 \nu_1}{g_2} \bar{N}^{(0)} + 2hi \left( \frac{1}{g_2} + \frac{\nu_1^2}{g_2} + \frac{\nu_2^2}{A} \right) \bar{T}^{(0)} - \frac{\nu_0}{A} \bar{P}^{(0)} - \frac{2h^2 \nu_1}{g_2} \bar{N} - \\ &\quad - 2h^2 i \left( \frac{1}{g_2} - \frac{\nu_1 \nu_2}{g_2} - \frac{\nu_0 \nu_1}{A} \right) \bar{T} + \frac{\nu_0}{A} \bar{P} \\ i^2 \bar{v}_1 &= 2h \left( \frac{1}{g_2} - \frac{i^2 \nu_2^2}{C} \right) \bar{N}^{(0)} + 2hi \frac{\nu_1}{k_2} \bar{T}^{(0)} + \frac{i^2 \nu_1 \nu_0}{C} \bar{P}^{(0)} + \frac{i^2 \nu_1}{C} \bar{M}^{(0)} - \\ &\quad - 2h^* \left( \frac{1}{g_2} - \frac{i^2 \nu_0 \nu_1}{C} \right) \bar{N} + b^* \frac{2h^2 \nu_2}{g_2} \bar{T} - \frac{i^2 \nu_2 \nu_0}{C} \bar{P} - \frac{i^2 \nu_2}{C} \bar{M} \\ i^2 \bar{w}_1 &= 2hi^2 \frac{\nu_1 \nu_0}{C} \bar{N}^{(0)} - 2hi \frac{\nu_0}{A} \bar{T}^{(0)} + \left( \frac{1}{A} - \frac{i^2 \nu_1^2}{C} \right) \bar{P}^{(0)} + \frac{i^2 \nu_1}{C} \bar{M}^{(0)} - \\ &\quad - 2h^* i^2 \frac{\nu_1 \nu_1}{C} \bar{N} + 2h^* i \frac{\nu_0}{A} \bar{T} - \left( \frac{1}{A} + i^2 \frac{\nu_1 \nu_2}{C} \right) \bar{P} - \frac{i^2 \nu_1}{C} \bar{M} \quad (4.1) \\ i^2 \frac{d\bar{w}_1}{dy} &= 2h \frac{\nu_0}{C} \bar{N}^{(0)} + \frac{\nu_1}{C} \bar{P}^{(0)} + \frac{1}{C} \bar{M}^{(0)} - 2h^* \frac{\nu_1}{C} \bar{N} + \frac{\nu_2}{C} \bar{P} - \frac{1}{C} \bar{M} \end{aligned}$$

где  $2h^*$  — ширина подкрепляющего элемента;  $\nu_1, \nu_2$  — расстояния от нейтрального слоя (оси) до соответственно контактирующего и внешнего края подкрепляющего элемента;  $\nu_0$  — расстояние между осью подкрепляющего элемента и срединной плоскостью пластины (эксцентриситет подкрепления);  $b^* = \nu_1 + \nu_2$  — высота подкрепляющего элемента;  $\nu_1$  — расстояние между осью подкрепляющего элемента и точкой приложения к нему внешней нормальной нагрузки;  $g_1, g_2, A, C$  — жесткости упругого элемента соответственно на растяжение, изгиб и кручение.

На основании условий равенства перемещений пластины и упругого элемента вдоль контура контакта, учитывая соотношения (3.4), (3.5) и (4.1), получаем систему четырех алгебраических уравнений относительно трансформант контактных усилий  $\bar{N}^{(0)}, \bar{T}^{(0)}, \bar{P}^{(0)}$  и моментов  $\bar{M}^{(0)}$ .

Так, в случае нагружения подкрепляющего элемента внешней нормальной сосредоточенной силой  $N_0$  при  $\nu_2 = 0$ , решая полученную

систему уравнений и применяя формулы обращения Фурье, имеем

$$N^{(0)}(x) = -\frac{N_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q_1(\lambda)}{Q_0(\lambda)} \cos \lambda x d\lambda, \quad T^{(0)}(x) = -\frac{N_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q_2(\lambda)}{Q_0(\lambda)} \sin \lambda x d\lambda$$

$$P^{(0)}(x) = -\frac{N_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q_3(\lambda)}{Q_0(\lambda)} \cos \lambda x d\lambda, \quad M^{(0)}(x) = -\frac{N_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q_4(\lambda)}{Q_0(\lambda)} \cos \lambda x d\lambda \quad (4.2)$$

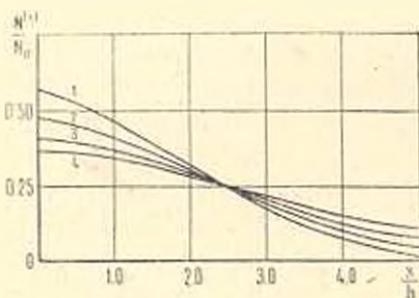
где  $Q_0(\lambda)$ ,  $Q_1(\lambda)$ ,  $Q_2(\lambda)$ ,  $Q_3(\lambda)$ ,  $Q_4(\lambda)$  — соответствующие определители полученной системы алгебраических уравнений относительно трансформант контактных усилий и моментов.

Пример. Рассмотрим неоднородную ортогольную полубесконечную пластину и подкрепляющий упругий элемент прямоугольного сечения  $b^* \times 2h^*$  со следующими упругими, жесткостными и геометрическими характеристиками:

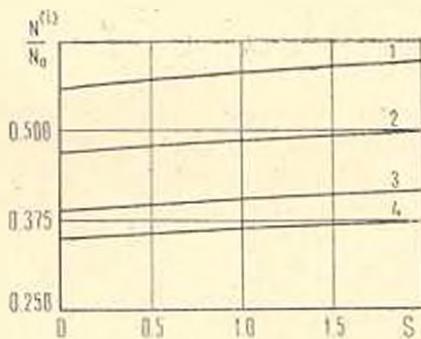
$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = h; \quad \nu_1 = \nu^* = 0,3; \quad b^* = 2h; \quad \tau_0 = \tau_1 = 0; \quad g_1 = 2h^* b^* E^* \\ g_2 = \frac{1}{6} E^* h^* b^{*3}; \quad \frac{2h^*}{2h} = 2,5; \quad \frac{E^*}{E_1^{(0)}} = 2,0; \quad C = \frac{0,249 E^* h^* b^{*3}}{1 + \nu^*} \quad (4.3) \\ A = \frac{2}{3} E^* b^* h^{*3}; \quad g = 1; \quad k = 0,1 \text{ м}^{-1} \end{aligned}$$

где  $E^*$ ,  $\nu^*$  — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона подкрепляющего элемента.

Упругий элемент нагружен сосредоточенной сжимающей силой  $N_0'$ , приложенной в плоскости его оси. Функции Уиттекера представлялись в виде асимптотических рядов [5]. Численный расчет контактных усилий по формулам (4.2) проводился на ЭВМ ЕС-1022 по методу Гаусса с точностью до  $10^{-3}$  знака.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 приведена зависимость нормальных контактных усилий  $N^{(0)}$  от координаты  $x$ , направленной вдоль центральной плоскости пластины, при  $s=0$ . Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям  $E_1^{(0)}/E_2^{(0)} = 0.5; 1.0; 2.0; 3.0$ .

Зависимость  $\Lambda^{(i)}$  от параметра  $s$ , характеризующего степень неоднородности материала пластины, изображена на фиг. 2 при  $x=0$  и  $E^{(0)}/E_2^{(0)}=0,5; 1,0; 2,0; 3,0$  (кривые 1, 2, 3, 4).

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԷԼԵՄԵՆՏՈՎ ԱՄՐԱՑՎԱԾ, ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՈՐԹՈՏՐՈՊ  
ՍԱԼԻ ԼԱՐՎԱԾ ՎԻՃԱԿԻ ՀԵՏԱՂՈՏՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՁԸ

Վ. Ե. ՅՈՒՐԻՆԵՏ

И. д. ф. н. и. д.

Ստացված են անհամասեռ օրթոտրոպ սալի ընդհանրացած հարթ լարվածային վիճակը և ծռումը բնութագրող ընդհանուր դիֆերենցիալ հավասարումները և գնտված են նրանց մի քանի լուծումները: Հետազոտված է առածրական էլեմենտի և անհամասեռ օրթոտրոպ առածրական հատկությունները աստիճանային օրենքով փոփոխվող սալի կոնտակտային փոխազդեցությանը:

THE DEFINITION OF TENSE STATE OF INHOMOGENEOUS  
ORTHOTROP PLATES STRENGTHENED BY ELASTIC ELEMENT

V. E. YURYNETS

S u m m a r y

Common differential equations describing generalised plane strained state and bending of inhomogeneous orthotrop plates are derived and some of their solutions are given. Contact interaction of elastic element with inhomogeneous orthotrop plate, elastic properties of which change according to the law of degree has been studied.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеориздат, 1967. 355 с.
2. Плевако В. П. К теории упругости неоднородных сред.—ИММ, 1971, т. 35, № 5, с. 853—860.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
4. Мартынович Т. Л., Юринец В. Е., Божидарник В. В. Контактное взаимодействие неоднородной полубесконечной пластины с несимметрично подкрепляющим упругим элементом.—ПМ, 1981, т. 17, № 1, с. 77—85.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1100 с.

Львовский государственный университет  
им. И. Франко

Поступила в редакцию  
16.V. 1983