

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ПОЛУПЛОСКОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ПО ГЛУБИНЕ

АМЗНҚОВИЧ С. М., АЛЕКСАНДРОВ В. М.

Изучается влияние неоднородности основания на распределение контактных напряжений под круглым штампом и его осадку, определяются контактные напряжения под полосовым штампом на неоднородном основании. Задачи поставлены в связи с проблемой расчета фундаментов на химически закрепленных насыпных или просадочных грунтах (круглая жесткая плита, ленточный фундамент).

1. Методы решения основных краевых задач теории упругости для многослойных оснований хорошо разработаны. Для произвольных же непрерывно-неоднородных по глубине сред здесь приходится преодолевать значительные трудности, так как необходимо решать краевую задачу для системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В связи с этим в большинстве известных работ рассматривались контактные задачи для специальных зависимостей свойств среды от глубины (степенная, экспоненциальная, линейная). Но при этих зависимостях есть точки среды, в которых модуль упругости обращается в нуль или бесконечность, что естественно для многих практических задач.

В общем случае произвольной непрерывной неоднородности в ряде работ применялся приближенный подход, основанный на замене непрерывно-неоднородной среды многослойным пакетом [1, 2, 3].

Следует заметить, что метод аппроксимации произвольной непрерывно-неоднородной среды многослойным пакетом не всегда дает удовлетворительные результаты и нуждается в дополнительном обосновании [4].

Смешанные задачи для многослойного (двухслойного) основания рассматривались в работах [1—3, 5—13] и других. При построении решения интегрального уравнения в указанных работах использовались методы: а) коллокации по чебышевским узлам; б) сведения к линейной системе путем аппроксимации полиномом регулярной части ядра интегрального уравнения; в) асимптотический (метод больших λ); г) сведения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и решения его методом механических квадратур, то есть использовались

методы эффективные для достаточно больших значений λ (λ —отношение толщины слоя к полуширине (радиусу) штампа).

Заметим, что трансформанты ядер интегральных уравнений непрерывно-неоднородных сред и многослойных отличаются по свойствам, поэтому и структура их решений в общем случае различается. Ниже изложим способ численного построения трансформанты ядра для непрерывно-неоднородных по глубине полупространства и полуплоскости [14] и методы решения возникающих интегральных уравнений как для слоистых, так и непрерывно-неоднородных по глубине сред. Будем рассматривать следующие задачи: задачу 1—плоскую задачу о вдавливании недеформируемого штампа в неоднородную полуплоскость и задачу 2—осесимметричную задачу о вдавливании недеформируемого кругового штампа в неоднородное полупространство. Полагаем, что неоднородное полупространство (полуплоскость) представляет неоднородный слой (полосу), сцепленный с однородным полупространством (полуплоскостью), для непрерывно-неоднородной среды и пакет слоев (полос), сцепленный с однородным полупространством (полуплоскостью), для дискретно-неоднородной. На границе между неоднородным слоем (полосой) и однородным полупространством (полуплоскостью) предполагаем выполненными условия сопряжения по напряжениям и перемещениям. Требуется определить распределение контактных напряжений под штампом, связь между вдавливающей силой и осадкой штампа (задача 2).

Математически постановка задач 1—2 запишется следующим образом.

Задача 1. Коэффициенты Ляме Λ и M полуплоскости с глубиной y изменяются по закону:

$$\begin{aligned} 1. \Lambda = \Lambda_0(y), \quad M = M_0(y), \quad 0 \geq y \geq -H \\ 2. \Lambda = \Lambda_1 = \Lambda_0(-H), \quad M = M_1 = M_0(-H), \quad -H > y > -\infty \end{aligned} \quad (1.1)$$

Граничные условия следующие:

$$y = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0, \quad \begin{cases} \sigma_y^{(0)} = 0, & |x| > a \\ \sigma_y^{(0)} = -[\alpha + \beta x - \gamma(x)] = f(x), & |x| \leq a \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь $\alpha + \beta x$ —перемещение штампа под действием силы P и момента M , $\gamma(x)$ —форма основания штампа

$$y = -H: \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)} \quad (1.3)$$

u и v —смещения вдоль осей ox и oy соответственно. При $(|x|, -y) \rightarrow \infty$ напряжения в полуплоскости исчезают. Требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом

$$\sigma_y^{(0)} = -q(x); \quad (y = 0, \quad |x| \leq a) \quad (1.4)$$

и связь между P , M и α , β при условии $\int_{-a}^a \tau(\xi) d\xi = P$

Задача 2. Коэффициенты Ляме $\Lambda(z)$ и $M(z)$ полупространства с глубиной z изменяются по закону (1.1). Граничные условия имеют вид:

$$z=0, \quad \tau_{zr} = \tau_{z\varphi} = 0, \quad \begin{cases} \sigma_z = 0, & r > a \\ w = -\delta(r) = -[\delta - \psi(r)], & r \leq a \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь δ — перемещение штампа в направлении оси z , $\psi(r)$ — форма поверхности основания штампа. При $(r, -z) \rightarrow \infty$ напряжения исчезают

$$z = -H: \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{zr}^{(1)} = \tau_{zr}^{(2)}, \quad w_r^{(1)} = w_r^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}$$

Требуется определить перемещение штампа и распределение нормальных напряжений под штампом:

$$\sigma_z^{(2)} = -q(r); \quad (z=0; \quad r \leq a)$$

Задача 1 сводится к интегральному уравнению вида

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \int_0^{\infty} L(u) |u|^{-1} \cos ut \, du \, d\xi = \pi \theta_0 \tilde{f}(x), \quad |x| \leq 1; \quad t = \frac{\xi - x}{x}; \quad \varphi(\xi) = \varphi\left(\frac{\xi}{a}\right) \quad (1.6)$$

$$f(x) = \tilde{f}(xa^{-1}); \quad \theta(y) = 2M(y) \{ \Lambda(y) + M(y) \} [\Lambda(y) + 2M(y)]^{-1}; \quad \theta_0 = \theta(0)$$

Интегральное уравнение для задачи 2 имеет вид:

$$\int_0^1 \tau(\rho) \rho d\rho \int_0^{\infty} L(u) J_0\left(\frac{ur}{\lambda}\right) J_0\left(\frac{u\rho}{\lambda}\right) du = \lambda \theta_0 \bar{\delta}(r), \quad r \leq 1 \quad (1.7)$$

Здесь $\lambda = H/a$, H — толщина слоя, a — полуширина (задача 1) или радиус (задача 2) штампа, $q(r) = \tau(r a^{-1})$, $\bar{\delta}(r) = \delta(r a^{-1})$.

Выражение для $L(u)$ получаем из уравнений равновесия, используя преобразование Фурье для задачи 1 (соответственно Ханкеля, для задачи 2, $z=y$)

$$L(u) = d_1(u) a_1^{(3)}(u) + d_2(u) a_2^{(3)}(u); \quad \bar{a}_i(u, y) = (a_i^{(1)}(u), a_i^{(2)}(u), a_i^{(3)}(u), a_i^{(4)}(u)) \\ i = 1, 2$$

Векторы $\bar{a}_i(u, y)$, ($i = 1, 2$) находятся численно из следующих задач Коши при фиксированном u :

$$d \bar{a}_i / dy = \bar{A} \bar{a}_i - |u| \bar{a}_i, \quad -H \leq y \leq 0, \quad i = 1, 2$$

$$1. \quad \bar{a}_1(u, y) = (1, u, 1, u); \quad (y = -H)$$

$$2. \quad \bar{a}_2(u, y) = \left(uy, u^2 y + u, \frac{-\Lambda + 3M}{\Lambda + M} + uy, u \left(\frac{\Lambda + 3M}{\Lambda + M} + uy + 1 \right) \right) \\ (y = -H)$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ u^2(2M + \Lambda)M^{-1} & -M'M^{-1} & -uM'M^{-1} & -u(M + \Lambda)M^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ u\Lambda'(2M + \Lambda)^{-1} & u(M + \Lambda)(2M + \Lambda)^{-1} & uM(2M + \Lambda)^{-1} & (2M' + \Lambda')(2M + \Lambda)^{-1} \end{pmatrix}$$

Функции $d_1(u)$ и $d_2(u)$ определяются из линейной алгебраической системы уравнений

$$d_1[a_1^{(1)} + ua_2^{(1)}] + d_2[a_1^{(2)} + ua_2^{(2)}] = 0$$

$$d_1\{-\Lambda ua_1^{(1)} + (\Lambda + 2M)a_2^{(1)}\} + d_2\{-\Lambda ua_1^{(2)} + (\Lambda + 2M)a_2^{(2)}\} = 0, u; \quad (y = 0)$$

Трансформанты ядер $L(u)$ обладают следующими свойствами [4]:

$$L(u) = A + B|u| + O(u^2), \quad (u \rightarrow 0); \quad A = \lim_{y \rightarrow \infty} b(y)\theta^{-1}(y) \quad (1.8)$$

$$L(u) = 1 + D|u|^{-1} + O(u^{-2}), \quad (u \rightarrow \infty); \quad B, D = \text{const} \quad (1.9)$$

при условиях:

$$\min_{y \in (0, -\infty)} b(y) > c_1 > 0; \quad \max_{y \in (0, -\infty)} b(y) < c < \infty; \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} b(y) = \text{const} \quad (1.10)$$

Для многослойных сред свойства функций податливости, аналогичные (1.8), отмечены в работе [15]. Свойства (1.8) означают, что значение $L(0)$ не зависит от того, каким образом изменяются модули упругости в слое от $y=0$ до $y=-H$, а определяется только их значениями при $y=0$ и $y=-H$. Графически это будет выглядеть так, что если множество кривых, описывающее некоторые законы изменения $b(y)$ с глубиной, имеют одинаковые значения на поверхности полупространства и на глубине H , то графики соответствующих трансформант $L(u)$ задач 1 и 2 будут выходить из одной общей точки $L(0) = b(0)\theta^{-1}(-H)$ и сходиться в одну точку $L(\infty) = 1$.

Замечание 1.1. В случае, если рассматривать не неоднородную полуплоскость (полупространство), а полосу (слой), лежащую на жестком основании, то в этом случае $L(0) = 0$. Этим свойством обладают и все типы оснований, для которых $b(-H) = \infty$, $(H \rightarrow \infty)$. В данной работе не будут затрагиваться методы решения таких задач. Далее будут строиться методы решения классов интегральных уравнений, для которых имеют место свойства (1.8), (1.9), причем $A \neq 0$. К таким уравнениям приводят контактные задачи как для непрерывно-неоднородного, так и многослойного полупространства (полуплоскости), причем законы изменения коэффициентов Ляме удовлетворяют условиям (1.10).

Замечание 1.2. Условия (1.10) являются также достаточными для того, чтобы можно было применить схему численного построения $L(u)$, основанную на том, что, хотя бы начиная с достаточно больших значений глубины H , можно построить точное или асимптотическое [14, 16, 17] общее решение обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым приводят уравнения равновесия в результате применения к ним преобразования Фурье (задача 1) или Ханкеля (задача 2).

2. Некоторые аппроксимации $L(u)$.

Обозначим:

$$L_0(u) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l b_j (\exp(-x_j|u|) + \exp(-\bar{x}_j|u|)); \quad L_{\infty}^n(u) = \sum_{k=1}^M c_k |u| (u^2 + D_k^2)^{-1} \quad (2.1)$$

$$L_N(u) = \prod_{i=1}^N (u^2 + A_i^2)(u^2 + B_i^2)^{-1}; \quad (B_i - B_k)(A_i - A_k) \neq 0; \quad (i \neq k) \quad (2.2)$$

Имеем при $u \rightarrow 0$

$$L_0(u) = 1 + \sum_{j=1}^L b_j - \sum_{j=1}^L b_j(x_j + \bar{x}_j)|u| + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L b_j(x_j^2 + \bar{x}_j^2)u^2 + O(|u^3|) \quad (2.3)$$

$$L_{\frac{M}{2}}(u) = \sum_{k=1}^M c_k D_k^{-2}|u| + O(|u|^2); \quad L_N(u) = \prod_{i=1}^N A_i^2 B_i^{-2} + O(u^2) \quad (2.4)$$

при $u \rightarrow \infty$

$$L_0(u) = 1 + O(\exp(-xu)), \quad x = \min(\operatorname{Re} x_j); \quad j = 1, 2, \dots, L \quad (2.5)$$

$$L_{\frac{M}{2}}(u) = \sum_{k=1}^M c_k |u|^{-1} + O(|u|^{-2}); \quad L_N(u) = 1 + O(u^{-2}) \quad (2.6)$$

Рассмотрим следующие выражения:

$$L_1(u) = L_0(u) + L_{\frac{M}{2}}(u); \quad L_2(u) = L_N(u) + L_{\frac{M}{2}}(u) \quad (2.7)$$

Покажем, что выражениями вида (2.7) можно аппроксимировать $L(u)$ со свойствами (1.8), (1.9). Для этого используем лемму [18, 19].

Лемма 2.1. Пусть четная, вещественная, непрерывная на всей вещественной оси функции $\varphi(u)$ обращается в нуль на бесконечности. Тогда она допускает приближение в $C(-\infty, \infty)$ рядами из функций вида $\varphi_k(u) = (u^2 + D_k^2)^{-1}$.

Выберем постоянные b_j ($j = 1, \dots, L$), A_i, B_i ($i = 1, \dots, N$) в (2.3), (2.4) так, чтобы

$$1 + \sum_{j=1}^L b_j = A, \quad \prod_{i=1}^N A_i^2 B_i^{-2} = A \quad (2.8)$$

Рассмотрим функции

$$L_1^1(u) = |L(u) - L_0(u)| |u|^{-1}; \quad L_2^2(u) = |L(u) - L_N(u)| |u|^{-1} \quad (2.9)$$

На основании свойств (1.8), (1.9) и (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) и условий (2.9) следует, что $L_1^1(u)$ и $L_2^2(u)$ удовлетворяют условиям леммы 2.1. Это означает, что справедливо представление

$$L_1^1(u) = \sum_{k=1}^M c_k (u^2 + D_k^2)^{-1}; \quad L_2^2(u) = \sum_{k=1}^M b_k (u^2 + \bar{D}_k^2)^{-1} \quad (2.10)$$

то есть имеет место

Теорема 2.1. При условии, что трансформанта ядра интегрального уравнения $L(u)$ обладает свойствами (1.8), (1.9), она допускает аппроксимацию выражениями вида (2.7)

3. Асимптотические решения задачи 1.

а) Метод больших λ ($\lambda \gg 2$).

Используя [20], на основании (1.9) видим, что ядро уравнения (1.6)

$$k(t) = \int_0^{\infty} L(u)u^{-1} \cos ut du; \quad L(u) = 1 + c_1 u^{-1} + c_2 u^{-2} + c_3 u^{-3} + O(u^{-1}), \quad (u \rightarrow \infty)$$

$$t = \frac{\xi - x}{\lambda} \quad (3.1)$$

с точностью до бесконечной постоянной имеет следующую структуру:

$$k(t) = -\ln |t| + a_{10}|t| + a_{11}t^2 \ln |t| + a_{21}|t|^3 + a_{31}t^4 + O(t^4 \ln |t|) \quad (3.2)$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — постоянные, $a_{10} = \frac{\pi}{2} c_1$; $a_{11} = \frac{1}{2} c_2$; $a_{21} = \frac{1}{12} \pi c_3$

$$a_{31} = \frac{3}{4} c_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} |u^2 - uL(u) - c_1 u + c_2(1 - e^{-u})| u^{-1} du$$

Для ядра вида (3.2) в [20] доказано, что при $\lambda \gg 2$ решение имеет вид

$$\varphi(x) = (1-x^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{mn}(x) i^{-m} n^n \quad (3.3)$$

Функции $\omega_{mn}(x)$, выраженные через коэффициенты a_{ij} , приведены в [20]. Таким образом, из (3.3) видно, что для больших λ в общем случае неоднородности основания асимптотическое решение представимо рядом по степеням λ^{-1} и n^i в отличие от многослойного основания, где решение имеет вид ряда по степеням λ^{-2} [6].

б) Метод функционального параметра ($l \geq 1$).

Рассмотрим уравнение (1.6) с $L(u) = L_1(u)$ из (2.7). Дифференцируя обе части (1.6) по x , получим

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \left\{ \lambda t^{-1} + \frac{1}{2l} \sum_{j=1}^l \delta_j \left[\frac{t}{t^2 + x_j^2} + \frac{t}{t^2 - x_j^2} \right] + \frac{\pi}{2l} \sum_{k=1}^M c_k \exp(-|t|D_k) \operatorname{sign} t \right\} d\xi =$$

$$= 2\pi b f'(x), \quad |x| \leq 1 \quad (3.4)$$

Введем параметр $\tau = \sqrt{0,25\lambda^2 + 1} - 0,5\lambda$.

Для построения решения оказываются полезными разложения:

$$\frac{s}{s^2 + \lambda^2} = \sum_{n=2,4,6} r^n \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n-1} \frac{(n-1-k)!(-1)^{\frac{1}{2}n-k-1}}{k!(n-1-2k)!} s^{n-2k-1} = \sum_{k=1}^n a_k r^{2k} \quad (3.5)$$

$$a_1 = s, \quad a_2 = 2s - s^3; \quad a_3 = s^3 - 4s^2 - 3s, \dots$$

$$\frac{\pi}{2l} \sum_{k=1}^M c_k \exp\left(-\frac{|s|}{l} D_k\right) \operatorname{sign} s = \sum_{k=1}^M \left[\frac{1}{2} \pi c_k \operatorname{sign}(s) \tau - \frac{1}{2} \pi c_k D_k s \tau^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} \pi c_k + \frac{1}{4} \pi c_k D_k^2 s^2 \right) \operatorname{sign}(s) \tau^3 - \pi c_k D_k s \left(1 + \frac{1}{12} D_k^2 s^2 \right) \tau^4 + O(\tau^5) \right]$$

Решение (3.4) ищем в виде

$$\varphi(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(\xi) \tau^i \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5), (3.6) в (3.4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим рекуррентную последовательность уравнений, из которых определяются $\varphi_i(\xi)$, ($i=1, 2, \dots$).

Этот метод для ряда задач гидродинамики позволил получить решение для всего диапазона значений характерного геометрического параметра. Для рассматриваемых интегральных уравнений в связи с более сложной структурой ядра такого результата добиться не удастся, хотя диапазон применимости этого метода несколько шире, чем метода «больших λ^* ». Использование аналитической аппроксимации трансформанты ядра вида (2.7) позволяет использовать метод для произвольного закона неоднородности вида (1.1), когда трансформанта ядра $L(u)$ строится численно.

Для контроля точности асимптотических формул может быть использован метод ортогональных полиномов или метод коллокации по чебышевским узлам. Метод коллокации по чебышевским узлам ($\lambda \geq 1$) [22, 23] удобно применять к уравнению (1.6), преобразованному к виду (3.4). Реализация метода производится аналогично [22]. Представление ядра интегрального уравнения в виде (3.4) позволяет значительно уменьшить время решения задачи на ЭВМ, так как на основании теоремы 2.1 можно показать, что величина $\varepsilon(t) < \varepsilon_0$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left| L(u) - 1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L b_j (\exp(-z_j|u|) - \exp(-z_j\bar{u}|u|)) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^M \frac{c_k|u|}{a^2 + D_k^2} \right| \frac{\sin ut}{\lambda} du$$

при надлежащем выборе коэффициентов аппроксимации в выражении (2.7), где ε_0 — наперед заданная малая величина и ею можно пренебречь.

в) Двухстороннее асимптотическое решение задачи I при малых и больших значениях λ ($\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$).

В работе [24] доказаны существование и единственность решения интегрального уравнения задачи I при $L(u)$ вида (2.2). Представим правую часть уравнения (1.6) в виде ряда Фурье (не нарушая общности, считаем $f(x)$ — четная функция), имеем

$$\pi \theta_0 \bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi x$$

Используя метод работы [25], получим выражение для напряжений [24]

$$\varepsilon(x) = P\pi^{-1}(1-x^2)^{-0.5} + \sum_{l=1}^N C_l \Phi(A_l \mu^{-1}, x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \pi l_N^{-1}(k\pi) F(k\pi, x)$$

Здесь введены обозначения

$$\Phi(A, x) = -\frac{I_1(A)}{\sqrt{1-x^2}} + A \int_x^1 \frac{I_0(A) \operatorname{ch} A(z-x) - I_1(A) \operatorname{sh} A(z-x)}{\sqrt{1-z^2}} dz$$

$$F(l, x) = -\frac{J_1(l)}{\sqrt{1-x^2}} + l \int_x^1 \frac{J_0(l) \cos l(x-x) + J_1(l) \sin l(x-x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Постоянные C_i определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^N C_i S\left(\frac{A_i}{\lambda}; \frac{B_k}{\lambda}\right) + PK_0\left(\frac{B_k}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{B_k}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m m \pi}{L_N(m\pi)} Z\left(m\pi; \frac{B_k}{\lambda}\right) = 0 \quad (3.7)$$

$k = 1, 2, \dots, N$

$$S(A; B) = [AI_0(A)K_1(B) + BI_1(A)K_0(B)](A^2 - B^2)^{-1}$$

$$Z(m; B) = [mJ_0(m)K_1(B) + J_1(m)BK_0(B)](B^2 + m^2)^{-1}$$

Очевидно, система (3.7) разрешима, если A_i, B_i ($i = 1, 2, \dots, N$) удовлетворяют условиям (2.2).

В общем случае $L(u)$ вида (2.7) решение уравнения (1.6) строится методом последовательных приближений. Перепишем уравнение (1.6) через операторы в виде

$$\Pi_N \varphi + \sum_m \varphi = f \quad (3.8)$$

Ниже интегральный оператор, соответствующий функции $L(u)$, принадлежащей классу A , будем также обозначать через A_i, B_i . В (3.8) оператор Π_N соответствует в уравнении (1.6) функции $L(u)$ вида (2.2), а $\sum_m L(u)$ вида $L^M(u)$ в (2.1). Не нарушая общности, полагаем $M = 1$, имеем

$$\sum_1 \varphi \equiv c \pi D^{-1} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) \exp\left(-\frac{D}{\lambda} |\xi - x|\right) d\xi \quad (3.9)$$

Представим $\sum_1 \varphi$ в виде ряда

$$\sum_1 \varphi = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\pi x \quad (3.10)$$

Коэффициенты C_k находятся по формулам

$$c_k = \frac{4\pi c_0^{-1}}{D^2 k^{-2} + (k\pi)^2} \left| (-1)^{k+1} \exp\left(-\frac{D}{\lambda}\right) \int_0^1 \varphi(\xi) \operatorname{ch} \frac{D}{\lambda} \xi d\xi + \int_0^1 \varphi(\xi) \cos k\pi \xi d\xi \right|$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ (3.11)

Используя (3.11), получим следующие оценки:

$$\max_{\lambda \in (-1, 1)} |\sum_1(\varphi) \sqrt{1-x^2}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \leq \lambda M^*, \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (\lambda < \lambda^0) \quad (3.12)$$

$$\max_{\lambda \in (-1, 1)} |\sum_1(\varphi) \sqrt{1-x^2}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \leq \lambda^{-1} M^0, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (\lambda > \lambda^0) \quad (3.13)$$

где постоянные M^* и M^0 не зависят от λ . Из (3.12) и (3.13) следует, что λ можно выбирать таким образом, что оператор $\Pi_N^{-1} \sum_M$ будет

оператором сжатия [26]. На основании этого, применяя к уравнению

$$\varepsilon + \Pi_N^{-1} \sum_{M^*} \varepsilon = \Pi_N^{-1} f \quad (3.14)$$

принципи Банаха сжатых отображений, можно получить доказательство существования и единственности решения уравнения (3.8) [24] при $0 < \lambda < \lambda^*$ и $\lambda > \lambda^*$, где λ^* и λ^0 — некоторые фиксированные значения.

Лемма 3.1 [2.7]. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, обладающая абсолютно интегрируемой производной (которая может и не существовать в отдельных точках). Тогда ряд Фурье для $f'(x)$ может быть получен из ряда Фурье функции $f(x)$ почленным дифференцированием.

Применим лемму 3.1 к выражениям (3.9), (3.10), имеем

$$- \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \pi \sin k \pi x = \frac{c \varepsilon}{\lambda} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) \exp\left(-\frac{D}{\lambda} |\xi - x|\right) \operatorname{sgn} |\xi - x| d\xi \quad (3.15)$$

Используя неравенство Бесселя, получим из (3.15) оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_k k \pi)^2 \leq \left(\frac{c \varepsilon^2}{\lambda}\right) \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \exp\left(-\frac{D}{\lambda} |\xi - x|\right) \operatorname{sgn} |\xi - x|\right)^2 dx \leq \frac{c^*}{\lambda^2} \quad (3.16)$$

где c^* не зависит от λ . Данная оценка представляет интерес при больших λ .

Замечание 3.1. При численной реализации значительного расширения диапазона применимости изложенного метода по λ можно добиться путем улучшения приближения $L(u)$ за счет функций вида (2.2).

Данный метод показал себя наиболее эффективным из всех рассмотренных выше.

4. Асимптотические решения задачи 2.

а) Единственность решения задачи 2.

Лемма 4. Если функции $L(u)$ являются трансформантами ядер интегральных уравнений задачи 2, то для всех $u \in (0, \infty)$ имеют место неравенства

$$0 < c_1 = \min_{z \in (0, -H)} \theta(z) \theta^{-1}(-H) \leq L(u) \leq \max_{z \in (0, -H)} \theta(z) \theta^{-1}(-H) = c_2 < \infty \quad (4.1)$$

Справедливость леммы 4.1 нетрудно установить, используя для рассматриваемых задач соотношения (1.16).

Теорема 4.1 Если имеют место условия леммы 4.1, то в L_p ($-1, 1$) ($2 > p > 1$) интегральные уравнения, соответствующие задаче 2, не могут иметь более одного решения.

Доказательство следует непосредственно из результатов работ [28, 29].

б) Асимптотическое решение при больших значениях λ , ($i \geq 2$). Используя соотношения

$$T(\alpha) = \int_0^1 \tau(\rho) J_0(\alpha \rho) \rho d\rho; \quad \tau(r) = \int_0^\infty T(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha \quad (4.2)$$

(1.7) можно переписать в виде парного уравнения

$$\int_0^{\infty} T(\gamma) L(\lambda\gamma) J_0(\gamma r) d\gamma = \theta_0 \delta(r), \quad (r \leq 1); \quad \int_0^{\infty} T(\gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma = 0, \quad (r > 1) \quad (4.3)$$

С помощью операторов

$$U_1' \varphi(r) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r \varphi(r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr; \quad U_2' \varphi(r) = \int_r^{\infty} \frac{r \varphi(r)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dr \quad (4.4)$$

представим (4.3) в виде

$$\int_0^{\infty} T(\gamma) L(\lambda\gamma) \cos \gamma t d\gamma = g(t); \quad (t \leq 1); \quad \int_0^{\infty} T(\gamma) \cos \gamma t = 0, \quad (t > 1); \quad g(t) = \theta_0 L'_{\lambda} \delta(r) \quad (4.5)$$

Преобразуя (4.5) аналогично [30], получим следующее уравнение относительно вспомогательной функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) - \frac{1}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) P\left(\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau + g(t), \quad |t| \leq 1 \quad (4.6)$$

$$\varphi(r) = -\frac{2d}{\pi dr} r \int_r^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}; \quad P(y) = \int_0^{\infty} |1 - L(u)| \cos y u du; \quad y = \frac{t-\tau}{\lambda} \quad (4.7)$$

Выясним структуру ядра $P(y)$. На (1.8), (1.9) имеем

$$M(\gamma) = L(\gamma) - 1 = (A-1) + B\gamma + C\gamma^2 + O(\gamma^3), \quad (\gamma \rightarrow 0) \quad (4.8)$$

$$M(\gamma) = (L(\gamma) - 1) = D\gamma^{-1} + E\gamma^{-2} + F\gamma^{-3} + O(\gamma^{-4}), \quad (\gamma \rightarrow \infty) \quad (4.9)$$

На основании свойств (4.8), (4.9), используя [20], для $P(y)$ получим следующее асимптотическое представление:

$$P(y) = D \ln|y| + \frac{\pi E}{2} |y| - a_{20} - \frac{J}{2} y^2 \ln|y| + a_{21} y^2 \quad (4.10)$$

$$a_{20} = \int_0^{\infty} \frac{|L(u) - 1| u - D(1 - e^{-u})}{u} du; \quad a_{21} = \frac{3}{4} J - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[Du^2 - \right. \\ \left. - u^2(L(u) - 1) + Eu + J(1 - e^{-u}) \right] \frac{du}{u}$$

Отсюда вытекает, что решение уравнения (4.6) следует искать в виде

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{m,n}(t) \lambda^{-m} \ln^n \lambda \quad (4.11)$$

Подставляя (4.10), (4.11) в (4.6) и приравнявая члены при одинаковых степенях λ^{-1} и \ln^k в правой и левой частях (4.6), получим рекуррентные соотношения для нахождения $\varphi_{m,n}(t)$, из которых определя-

ется выражение для контактных напряжений, так под плоским штампом ($\psi(r)=0$, $b(1, 5)$):

$$\tau(r) = \frac{2\theta_0 \delta}{\pi \sqrt{1-r^2}} \left\{ 1 - \frac{2D}{\pi} \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{2a_{30}}{\pi} \frac{1}{k} + \frac{\ln \lambda}{\lambda} \left[\frac{8D a_{30}}{\pi^2} + \frac{2D^2}{\varepsilon^2} (2 \ln 2 - 1) \right] \right\} + \frac{2\theta_0 \delta}{\pi} \left[\left(\frac{D}{\pi \lambda} - \frac{D^2 \ln \lambda}{\pi^2 \lambda^2} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(r)}{(2k-1)} + O(\lambda^{-3}) \right) \right]$$

$$f_1(r) = t - 2t^{-1}; \quad f_2(r) = \frac{1}{3}t^3 + 2st - s^2t^{-1}; \quad f_3(r) = \frac{1}{5}t^5 + \frac{7}{2}st^3 + \frac{1}{2}s^2t - s^3t^{-1}$$

$$f_4(r) = \frac{1}{7}t^7 + \frac{4}{5}st^5 + 2s^2t^3 + 4s^3t - s^4t^{-1}, \dots \quad t = (1-r^2)^{1/2}, \quad s = r^2$$

Связь перемещения с приложенной силой имеет вид

$$P = 4a \theta_0 \delta \left[1 - \frac{2D}{\pi} \frac{\ln \lambda}{\lambda} + \frac{c^*}{\lambda} - \frac{4Dc^*}{\pi} \frac{\ln \lambda}{\lambda} + O(\lambda^{-2}) \right]; \quad c^* = \frac{D}{\pi} (2 \ln 2 - 1) - \frac{2d_{30}}{\pi}$$

Для построения решения задачи 2 также может быть использован метод ортогональных многочленов. Решение задачи в этом случае отыскивается в виде двойного ряда по четным полиномам Лежандра.

а) Двухстороннее асимптотическое решение задачи 2 при малых и больших значениях λ ($\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$).

Пусть $L(u)$ имеет вид

$$L(\lambda \gamma) = (\gamma^2 + A^2 \lambda^{-2}) (\gamma^2 + B^2 \lambda^{-2})^{-1} \quad (4.12)$$

Тогда, учитывая, что при $\varepsilon \rightarrow 0$, $J_0(\varepsilon r) \rightarrow 1$, уравнение (4.5) для случая соответствующего плоскому штампу, можно переписать:

$$\int_0^1 T_1(\gamma) \frac{\gamma^2 + A^2 \lambda^{-2}}{\gamma^2 + B^2 \lambda^{-2}} \cos \gamma t d\gamma - \theta_0 \delta \cos \varepsilon t, \quad (0 < t < 1); \quad \int_0^{\infty} T_1(\gamma) \cos \gamma t d\gamma = 0, \quad (t > 1) \quad (4.13)$$

Введем обозначение

$$\rho(t) = \int_0^1 T_1(\gamma) \cos \gamma t d\gamma \quad (4.14)$$

Из (4.14) с учетом четности $\rho(x)$ получим:

$$\rho(x) = c_1 \operatorname{ch} A \lambda^{-1} x + c_2 (B^2 \lambda^{-2} + \varepsilon^2) (A^2 \lambda^{-2} + \varepsilon^2) \cos \varepsilon t, \quad c_1 = \theta_0 \delta \quad (4.15)$$

Используя (4.15), (4.13) можно записать:

$$\int_0^1 T_1 \cos \gamma t d\gamma = c_1 \operatorname{ch} \frac{A}{\lambda} x + c_2 \frac{B^2 \lambda^{-2} + \varepsilon^2}{A^2 \lambda^{-2} + \varepsilon^2} \cos \varepsilon t, \quad (0 \leq t \leq 1); \quad \int_0^{\infty} T_1 \cos \gamma t d\gamma = 0, \quad (t > 1)$$

Обращая преобразование Фурье, получим

$$T_1(u) = C_1 2\pi^{-1} (B^2 \lambda^{-2} + \varepsilon^2) (A^2 \lambda^{-2} + \varepsilon^2)^{-1} (u \sin u \cos \varepsilon - \varepsilon \sin \varepsilon \cos u) (u^2 - \varepsilon^2)^{-1} + c_2 2\pi^{-1} (u \sin u \operatorname{ch} A \lambda^{-1} + A \lambda^{-1} \cos u \operatorname{sh} A \lambda^{-1}) (u^2 + A^2 \lambda^{-2})^{-1}$$

Постоянная c_1 определяется из условия, что $T_1(u)$ должно удовлетворять исходному уравнению (4.13)

$$c_1(B\lambda^{-1} \operatorname{ch} A\lambda^{-1} + A\lambda^{-1} \operatorname{sh} A\lambda^{-1})(B^2\lambda^{-2} + A^2\lambda^{-2})^{-1} + \\ + c_1(B\lambda^{-1} \cos \varepsilon - \varepsilon \sin \varepsilon)(A^2\lambda^{-2} + \varepsilon^2)^{-1} = 0$$

Формулу для напряжений преобразуем к более удобному виду. Используя равенство Парсевала, получим

$$\tau_1(r) = \\ = \frac{2\theta_0\delta}{\pi} \left\{ L^{-1}(\varepsilon) \left[\frac{\cos \varepsilon}{\sqrt{1-r^2}} + \varepsilon \int_0^1 \frac{\sin t \varepsilon dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \right] + \frac{c_1}{c_0} \left[\frac{\operatorname{ch} A\lambda^{-1}}{\sqrt{1-r^2}} - A\lambda^{-1} \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} A\lambda^{-1} t dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \right] \right\} \\ \tau(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_1(r) = 2\theta_0\delta\pi^{-1} \left\{ L^{-1}(0) \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + c_0 \left[\frac{\operatorname{ch} A\lambda^{-1}}{\sqrt{1-r^2}} - A\lambda^{-1} \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} A\lambda^{-1} t dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \right] \right\} \\ c_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c_1}{c_1}$$

Связь между приложенной силой и осадкой штампа имеет следующий вид:

$$P = 4\pi ab_0 [L^{-1}(0) + c_0 A^{-1} \operatorname{sh} A\lambda^{-1}] \delta$$

Определение 4.1. Будем говорить, что абсолютно интегрируемая на отрезке $[0,1]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию M_0 , если имеет место разложение Фурье-Бесселя

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0(\mu_k x); \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k \mu_k| \leq M_0^0(-1, 1) < \infty \quad (4.16)$$

где $M_0^0(-1, 1)$ — некоторая постоянная, μ_k , $(k=1, 2, \dots)$ — нули функции $J_0(x)$. При $L(u)$ вида (2.2) для правой части уравнения (1.7)

$$\bar{b}(r) = \delta(1 + f(r)); \quad (0 \leq r \leq 1)$$

где $f(r)$ удовлетворяет условию M_0 , выражение для распределения контактных напряжений имеет вид

$$\tau(r) = \frac{2\theta_0\delta}{\pi} \left\{ L_N^{-1}(0) \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{k=1}^N C_k \psi \left(r, \frac{A_k}{\lambda} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j L^{-1}(\mu_j) \varphi(r; \mu_j) \right\} \quad (4.17)$$

$$\psi(r; A) = \frac{\operatorname{ch} A}{\sqrt{1-r^2}} - A \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} A t dt}{\sqrt{t^2-r^2}}; \quad \varphi(r, \varepsilon) = \frac{\cos \varepsilon}{\sqrt{1-r^2}} + \varepsilon \int_0^1 \frac{\sin t \varepsilon dt}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

Постоянные C_k определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^N C_k \alpha \left(\frac{B_k}{\lambda}, \frac{A_k}{k} \right) + L_N^{-1}(0) B_k^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \beta \left(\frac{B_k}{k}, \mu_j \right) = 0, \quad k=1, 2, \dots, N$$

$$\alpha(B, A) = (B \operatorname{ch} A - A \operatorname{sh} A)(B^2 - A^2)^{-1}; \quad \beta(B, A) = \\ = (B \cos A - A \sin A) L_N^{-1}(\lambda A)(B^2 - \lambda^2 A^2)^{-1} \quad (4.18)$$

Система (4.18) однозначно разрешима, если A_n ; B_n удовлетворяют условиям (2.2). В данном случае связь между приложенной силой и осадкой штампа имеет вид

$$P = 4ab_0 |L^{-1}(0) + \sum_{j=1}^N C_j A_j^{-1} \operatorname{sh} \lambda_j \rho^{-1} + \sum_{j=1}^N b_j L_N^{-1}(\lambda_j \rho) \rho_j^{-1} \sin \mu_j \rho|^2$$

В общем случае, когда $L(u)$ имеет вид (2.7), решение уравнения (1.7) строится методом последовательных приближений.

Реализуется он так же, как и в задаче 1, при этом оператор, соответствующий $\sum_{n=1}^N \varphi_n$ в (3.8), имеет вид ($M=1$):

$$\sum_{n=1}^N \tau_n = \int_0^1 \tau(\rho) \rho \left| \int_0^{\infty} \frac{c \lambda^{-1} \gamma}{\gamma^2 + D^2 \lambda^{-2}} J_0(\gamma r) J_0(\gamma \rho) d\gamma \right| d\rho = \sum_{k=1}^N a_k J_0(\mu_k r)$$

Коэффициенты a_k находятся по следующим формулам:

$$a_k = \frac{2c \lambda^{-1}}{J_1(\mu_k)(\mu_k^2 + D^2 \lambda^{-2})} \left| \int_0^1 \tau(\rho) \rho J_0(\mu_k \rho) d\rho - \mu_k J_1(\mu_k) K_0\left(\frac{D}{\lambda}\right) \int_0^1 \tau(\rho) \rho J_0\left(\frac{\rho D}{\lambda}\right) d\rho \right| \quad (4.19)$$

Используя (4.19), получим следующие оценки:

$$\max_{r \in (-1, 1)} \left| \sum_{n=1}^N \tau_n \sqrt{1-r^2} \right| \leq c \sum_{k=1}^N |a_k| \leq \lambda M^*, \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (\lambda < \lambda^*) \quad (4.20)$$

$$\max_{r \in (-1, 1)} \left| \sum_{n=1}^N \tau_n \sqrt{1-r^2} \right| \leq c \sum_{k=1}^N |a_k| \leq \lambda^{-1} \ln M^0, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (\lambda > \lambda^0) \quad (4.21)$$

где постоянные M^* и M^0 не зависят от λ .

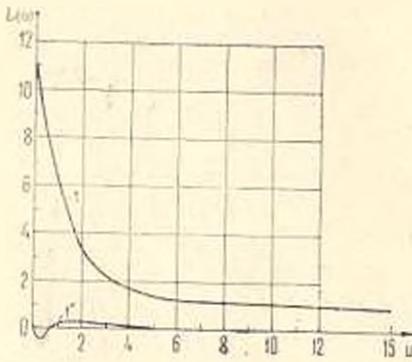
Из (4.20), (4.21) следует, что λ можно выбирать таким образом, что оператор $\Pi_N^{-1} \sum_{n=1}^N \varphi_n$ будет оператором сжатия [26]. Применяя к уравнению вида (3.14) принцип Банаха сжатых отображений, можно получить доказательство существования и единственности решения уравнения (1.7) [24] при $0 < \lambda < \lambda^*$ и $\lambda > \lambda^0$, где λ^* и λ^0 — некоторые фиксированные значения.

5. В качестве примера рассмотрим задачу 2 в случае, когда модуль Юнга $E(z)$ меняется по закону

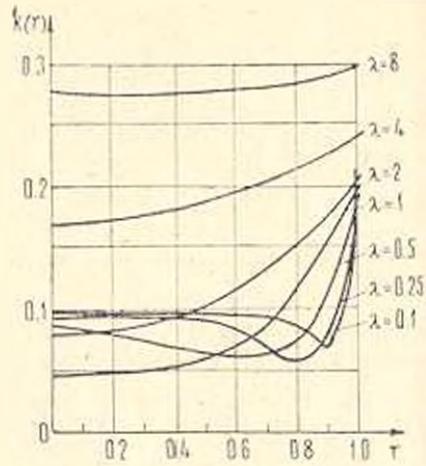
$$E(z) = E_0 f(z), \quad z \in (0, -1), \quad E(z) = E_0(-1), \quad z \in (-1, -\infty) \\ f(z) = 1, 1 + \sin 0,5 sz, \quad s = 1$$

при постоянном коэффициенте Пуассона ($\nu = 1/3$). Напоминаем, что коэффициенты Ляме Λ и M связаны с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями [31].

$$\Lambda = E\nu(1+\nu)^{-1} (1-2\nu)^{-1}; \quad M = 0,5 E(1+\nu)^{-1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 приведен график $L_s(u)$ при $s=1$ (кривая 1). Кривая 1' соответствует разности между точным и аппроксимирующим значением трансформанты вида (2.2). На фиг. 2 приведены графики величины $k(r) = \sigma_{11}(r) \sigma_0^{-1}(r)$, характеризующей распределение контактных нормальных напряжений под штампом с плоским основанием на неоднородном основании $\sigma_{11}(r)$ по сравнению с однородным $\sigma_0(r)$ при различных значениях λ . $\sigma_0(r)$ — распределение контактных напряжений под штампом для однородного полупространства при $E = E_0(0)$. Значения $\sigma_{11}(r)$ найдены двухсторонним асимптотическим методом при $s=1$.

ՀԱՏ ԽՈՐՈՒԹՅԱՆ ԱՆՀԱՏՄԱՍԻՆԻ ԿՐԱՍԱՐԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԿՐԱՀԱՐՈՒԹՅԱՆ ԱՄՐԱԲԱՆԱԿՆԵՐԻ ՏՆՈՒԹՅԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԼՈՒՄՈՒՄՆԵՐ

Ա. Մ. ԱՅԶԻՊՈՎԻՉ, Վ. Մ. ԱՆՏՈՆՆԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ս լ մ

Ուսումնասիրվում է կլոր գրոշմի տակ կոնտակտային լարումների բաշխման և նրա հատվածի վրա հիմքի անհամասեռության աղղեցույթյունը, որոշված են անհամասեռ հիմքի վրա շերտային գրոշմի տակ կոնտակտային լարումները: Դրված խնդիրների լուծումը կառուցված է ասիմպտոտիկ մեթոդներով: Մասնալուրացված, ամենաէֆեկտիվը գրսևորել է իրեն երկկողմանի ասիմպտոտիկ մեթոդը, որը թույլ է տալիս ստանալ այդ խնդիրների լուծումները բնութագրող երկրաչափական պարամետրի ինչպես մեծ, այնպես էլ փոքր արժեքների համար:

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF CONTACT PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR NONHOMOGENEOUS WITH DEPTH HALF-SPACE AND HALF-PLANE

S. M. AYZIKOVITCH, V. M. ALEKSANDROV

Summary

The influence of inhomogeneity of the soil base on the distribution of contact stresses under the circular plate and its displacements has been studied and the contact stresses under the strip plate on the non-homogeneous foundation have been determined. Solutions of the posed problems are obtained by asymptotic methods. In particular the two-sided asymptotic method is the most effective. It allows us to obtain the solutions of these problems for big and small values of the characteristic geometric parameter.

The problems are posed in connection with the problem of the evaluation of foundations on chemically stabilized fill-up and slumping soils (rigid circular plate, strip foundation).

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин В. С. Задачи теории упругости для неоднородных сред М: ВЦ АН СССР, 1976. Сообщ. по прикл. матем., вып. 4.
2. Никишин В. С. Осесимметричные контактные задачи теории упругости для неоднородных сред М: ВЦ АН СССР, 1976. Сообщ. по приклад. матем., вып. 3.
3. Шевляков Ю. А., Паулов Ю. А., Чистяк В. Н. К расчету неоднородных оснований.—ИМ, 1968, т. 4, вып. 9.
4. Айзикович Ю. М., Александров В. М. О свойствах функций податливости, соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству.—ДАН СССР, 1982, т. 266, № 1.
5. Александрова Г. И. Об одной, решаемой в замкнутом виде, контактной задаче теории упругости для цилиндрического тела.—Изв. АН СССР, МТТ, 1968, № 2.
6. Александрова Г. И. Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании.—Изв. АН СССР, МТТ, 1973, № 1.
7. Вилков В. И. Плоская контактная задача для двухслойного основания при действии симметричной нагрузки на жесткий штамп.—Изв. АН СССР, ОТИ, механика и машиностроение, 1968, № 4.
8. Егоров К. Е. Распределение напряжений и перемещений в двухслойном основании с лепточного фундамента и свайные и естественные основания. Сб. № 10 Трудов НИСа треста глубинных работ, 1936.
9. Ильяк В. М., Ламзюк В. Д., Приварников А. К. О характере взаимодействия штампа с упругим многослойным основанием.—Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 5.
10. Козак Б. И. Давление жесткого штампа на двухслойное основание.—Тр. Харьковского автомоб. дор. ин-та, 1954, вып. 17.
11. Ламзюк В. Д., Приварников А. К. Упругая деформация неоднородного многослойного пакета при неполном контакте его слоев.—ДАН СССР, сер. А, 1977, № 7.
12. Приварников А. К., Шевляков Ю. А. Контактная задача для многослойного основания.—ИМ, 1962, т. 8, вып. 5.
13. Chen W. T., Engel P. A impact and contact stress analysis in multilayer elastic media. 13-th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Books of abstracts, Moscow: 1972.

14. Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону: Изд. Ростовского университета, 1983. 264 с.
15. Приварников А. К. Пространственная деформация многослойного основания. Сб. «Устойчивость и прочность элементов конструкций». Днепрпетровск: 1973, с. 24 – 44.
16. Коддингтон Э. Л., Левинсон И. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
17. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.
18. Ахизер Н. Н. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
19. Бабешко В. А. Асимптотические свойства решений некоторых двумерных интегральных уравнений.—ДАН СССР, 1972, т. 206, № 5.
20. Александров В. М., Белоконов А. В. Асимптотические решения одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел.—ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
21. Панченков А. Н. Теория потенциала ускорений. Новосибирск: Наука, 1975.
22. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1962, № 5.
23. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973.
24. Айзикович С. М. Асимптотические решения некоторых классов парных интегральных уравнений, возникающих в контактных задачах для полупространства и полуплоскости неоднородных по глубине.—ПММ, 1982, т. 46, № 1.
25. Александров В. М. О решениях одного класса парных уравнений.—ДАН СССР, 1973, т. 210, № 1, с. 55–58.
26. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
27. Зисмунд А. Тригонометрические ряды. М.—Л.: ГИИТИ, 1939.
28. Бабешко В. А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике.—ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
29. Бабешко В. А. Новый эффективный метод решения динамических контактных задач.—ДАН СССР, 1974, т. 217, № 4.
30. Александров В. М., Чебилов М. И. Смешанные задачи механики сплошных сред, связанные с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера-Фока.—ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
31. Жюрие А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.

Институт проблем механики АН СССР
 ИИИ механики и прикладной математики РГУ

Поступила в редакцию
 5.VII. 1983