ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 3, 1986 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ МНОГОУГОЛЬНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

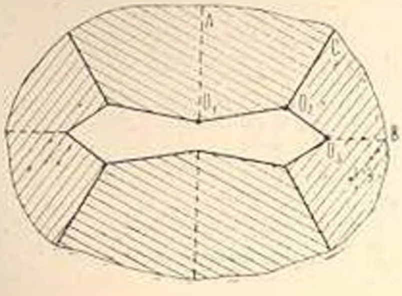
БАБЛОЯН А. А., ТАДЕВОСЯН Р. Г.

Исследованию напряженного состояния бесконечных клиновидных областей посвящены работы [1—11] и др.

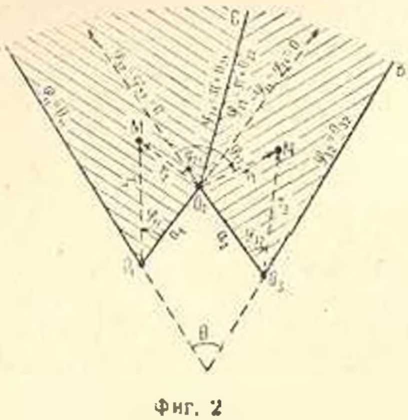
Методом «кусочно-однородных» решений Б. М. Нуллер рассмотрел задачу для составных M-образных областей, имеющих три угловые точки, когда линия контакта имеет определенное направление. Аналогичные задачи для составных тел, когда исследуемое тело имеет две или три угловые точки с раствором $k\pi/2$ ($k=1, 2, 3$), рассматривались в работах [3, 4] и др.

В работах [1, 2, 7] приводятся решения задач для составных клиновидных областей, имеющих две (внутренние или внешние) угловые точки с произвольным раствором углов, причем линия раздела различных материалов проходит через вершины углов под произвольным направлением. Все эти задачи решались методом, предложенным в [2], сущность которого состоит в следующем: вводятся две системы полярных координат с центрами, совпадающими, соответственно, с угловыми точками. Применяя принцип «обобщенной» суперпозиции и точно удовлетворяя условиям контакта двух материалов, задача сводится к решению регулярных интегральных уравнений, а затем—к бесконечным системам алгебраических уравнений. Используемый метод позволяет получить искомые напряжения около угловых точек с выделенными характерными особенностями.

1°. В данной работе приводится решение задачи теории упругости для симметрично собранной плоскости, ослабленной многоугольным от-



Фиг. 1



Фиг. 2

верстием (фиг. 1). Отверстие имеет n ($n=1, 2, \ldots$) осей симметрии и $4n$ сторон, которые попарно равны между собой. В силу симметрии задачу будем решать только для заштрихованной M-образной части составной области (фиг. 2), удовлетворяя при этом условиям симметрии на лучах O_1A и O_3B:

$$\tau_{r\varphi}^{(k)}=0, \quad V_{\varphi}^{(k)}=0, \quad (k=1, 2) \tag{1.1}$$

Пусть модуль Юнга и коэффициент Пуассона для первого материала будут E_1, ν_1, а для второго — E_2, ν_2. Принимается, что по лучу O_2C материалы сцеплены друг с другом

$$\sigma_{\varphi}^{(1)}=\sigma_{\varphi}^{(2)}, \quad \tau_{r\varphi}^{(1)}=\tau_{r\varphi}^{(2)}, \quad U_r^{(1)}=U_r^{(2)}, \quad V_{\varphi}^{(1)}=V_{\varphi}^{(2)} \tag{1.2}$$

На отрезках O_1O_2 и O_2O_3 заданы напряжения в виде интегрируемых функций

$$\sigma_{\varphi}^{(k)}=f_{k1}, \quad \tau_{r\varphi}^{(k)}=f_{k2}, \quad (k=1, 2) \tag{1.3}$$

Как известно [8], рассматриваемая задача сводится к определению бигармонической внутри области функции F, удовлетворяющей условиям (1.1) — (1.3).

Введем четыре системы полярных координат (r_1, φ_{11}), (r_2, φ_{21}), (r_2, φ_{22}), (r_3, φ_{32}) с центрами соответственно в точках O_1, O_2, O_2, O (фиг. 2).

Решение поставленной задачи ищем в виде

$$F=\begin{cases} F_1 & \text{внутри первого материала} \\ F_2 & \text{внутри второго материала} \end{cases} \tag{1.4}$$

Каждую из функций F_k ($k=1, 2$) представим в виде суммы двух интегралов Меллина

$$F_k=\sum_{n=k}^{k+1} F_{nk}(r_n, \bar{\varphi}_{nk})=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=k}^{k+1}\int_{L_n} \Phi_{nk}(s, \bar{\varphi}_{nk})\, r_n^{1-s}\, ds$$

$$\bar{\varphi}_{11}=\varphi_{11}, \quad \bar{\varphi}_{21}=\varphi_{21}-\pi, \quad \bar{\varphi}_{22}=\varphi_{22}-\pi, \quad \bar{\varphi}_{32}=\varphi_{32} \tag{1.5}$$

(Здесь и в дальнейшем первый индекс указывает вершину угла, внутри которой функция F_{nk} бигармонична, а второй индекс указывает материал).

L_n—прямые, параллельные мнимой оси комплексной плоскости s

$$(s=c_n+iy, \quad -\infty<y<+\infty, \quad \varepsilon-1<c_n<0, \quad \varepsilon>0)$$

Функции Φ_{nk} удовлетворяют уравнению

$$\Phi^{IV}(s, \bar{\varphi})+2(s^2+1)\Phi''+(s^2-1)^2\Phi=0 \tag{1.6}$$

следовательно, их можно представить в виде

$$\Phi_{nk}(s, \bar{\varphi}_{nk})=A_{nk}(s)\cos(s-1)\bar{\varphi}_{nk}+B_{nk}\sin(s-1)\bar{\varphi}_{nk}+C_{nk}\cos(s+1)\bar{\varphi}_{nk}+$$
$$+D_{nk}\sin(s+1)\bar{\varphi}_{nk} \tag{1.7}$$

Из фиг. 2 следует, что углы φ_{nk} изменяются в пределах: для первого материала $0\leqslant\varphi_{11}\leqslant\theta_{11}$, $\theta_{21}\leqslant\varphi_{21}-\pi=\bar\varphi_{21}\leqslant 0$; для второго материала $\theta_{22}\leqslant\varphi_{22}-\pi=\bar\varphi_{22}\leqslant 0$, $0\leqslant\varphi_{32}\leqslant\theta_{32}$ и имеют место неравенства

$$\theta_{11}+\theta_{32}\leqslant 2\pi,\quad \theta_{21}+\theta_{22}\leqslant 2\pi,\quad \theta_{11}-\theta_{21}\geqslant\pi,\quad \theta_{32}-\theta_{22}\geqslant\pi \tag{1.8}$$

2°. Требуем, чтобы функции F_{11} и F_{12} на отрезках O_1O_2 и O_2O_3 соответственно удовлетворяли условиям (1.3), а функции F_{21} и F_{22} на этих же отрезках удовлетворяли условиям свободного края, аналогичным однородным условиям. В дальнейшем целесообразно вместо неизвестных функций, входящих в (1.7), вводить новые неизвестные X_{pk}, Y_{nk} ($p=1,3$; $n,k=1,2$)

$$\xi C_{pk}\Delta_p = -a_k^{\xi}(\bar\alpha^-_{pk}X_{p1}+\alpha^-_{pk}X_{p2}+\bar f_{p1}S^-_p+\bar f_{p2}C^-_p)$$

$$\xi D_{pk}\Delta_p = a_k^{\xi}(\bar\beta^+_{pk}X_{p1}+\beta^+_{pk}X_{p2}-\bar f_{p1}C^+_p+\bar f_{p2}S^+_p)$$

$$\xi C_{2k}\Delta_2 = a_2^{\xi}(M^-_{2k}Y_{11}+N^-_{2k}Y_{12}+Q^-_{2k}Y_{21}+P^-_{2k}Y_{22})$$

$$\xi D_{2k}\Delta_2 = a_2^{\xi}(N^+_{2k}Y_{11}+M^-_{2k}Y_{12}+P^+_{2k}Y_{21}+Q^+_{2k}Y_{22})$$

$$\xi[(\xi-1)B_{pk}+(\xi+1)D_{pk}] = a_k^{\xi}\bar f_{p2}(\xi)$$

$$\xi(\xi-1)(A_{pk}+C_{pk}) = a_k^{\xi}\bar f_{p1}(\xi)$$

$$(\xi-1)B_{2k}+(\xi+1)D_{2k}=0,\quad A_{2k}+C_{2k}=0.\quad \left(n=1,2;\quad p=\begin{cases}1, & k=1\\ 3, & k=2\end{cases}\right) \tag{2.1}$$

При этом граничные условия (1.3) удовлетворяются тождественно. Здесь введены следующие обозначения:

$$E_m M^{\pm}_{2k}(\xi) = \pm(-1)^m(E_m\tilde\alpha^{\pm}_{2k}\delta^{\mp}_m - E_m\beta^{\pm}_{2k}C^{\mp}_{2m} - E_k\alpha^{\pm}_{2k}\gamma_m)$$

$$E_m N^{\pm}_{2k}(\xi) = (-1)^m(E_m\bar\beta^{\pm}_{2k}\delta^{\pm}_m + E_m\bar\alpha^{\pm}_{2m}C^{\pm}_{2m} - E_k\beta^{\pm}_{2k}\gamma_m)$$

$$E_2E_kQ^{\pm}_{2k}(\xi) = (-1)^{m+1}[E_k^2(\alpha^{\pm}_{2k}\delta^{\pm}_m + \beta^{\pm}_{2k}C^{\mp}_{2m}) - E_2E_m\alpha^{\pm}_{2k}\Delta_m]$$

$$E_2E_kP^{\pm}_{2k}(\xi) = \pm(-1)^m[E_k^2(\beta^{\pm}_{2k}\delta^{\mp}_m - \alpha^{\pm}_{2k}C^{\pm}_{2m}) - E_2E_m\bar\beta^{\pm}_{2k}\bar\Delta_m]$$

$$S^{\pm}_p(\xi,\theta_{pk}) = \mp 2(\sin 2\xi\theta_{pk} \pm \sin 2\theta_{pk})$$

$$C^{\pm}_p(\xi,\theta_{pk}) = 4[\sin^2(\xi\theta_{pk} \pm \pi/4 \mp \pi/4) - \sin^2\theta_{pk}]$$

$$\alpha^{\pm}(\xi,\theta) = (1\mp\xi)[\cos(\xi-1)\theta - \cos(\xi+1)\theta]$$

$$\beta^{\pm}(\xi,\theta) = (1\pm\xi)\sin(\xi+1)\theta + (1\mp\xi)\sin(\xi-1)\theta$$

$$\bar\alpha^{\pm}(\xi,\theta) = (1+\nu)\alpha^{\pm} + 4\cos(\xi+1)\theta$$

$$\bar\beta^{\pm}(\xi,\theta) = (1+\nu)\beta^{\pm} - 4\sin(\xi-1)\theta$$

$$C^{\pm}_{2k}(\xi,\theta_{2k}) = \sin 2\xi\theta_{2k} \pm \xi\sin 2\theta_{2k}$$

$$\bar\Delta_k(\xi,\theta_{2k}) = \sin^2\xi\theta_{2k} - \xi^2\sin^2\theta_{2k}$$

$$\gamma_k(\xi,\theta_{2k}) = (1+\nu_k)^2\bar\Delta_k - 4(1+\nu_k)\sin^2\xi\theta_{2k} + 4$$

$$\delta^{\pm}_k(\xi,\theta_{2k}) = (1+\nu_k)\bar\Delta_k - 2(\sin^2\xi\theta_{2k} \pm \xi\sin^2\theta_{2k})$$

$$\delta = \frac{1+\nu_1}{E_1} - \frac{1+\nu_2}{E_2}, \quad \delta_k = \frac{4}{\delta E_k}, \quad \left(p = \begin{cases} 1, & k=1 \\ 3, & k=2 \end{cases}\right) \tag{2.2}$$

$$\Delta_p(\xi) = 4C^*_{2k}(\xi, \theta_{pk})$$

$$\begin{gathered}\Delta_3(\xi) = 4\{\delta E_1 E_2 [\delta \tilde\Delta_1 \tilde\Delta_2 + 4(\tilde\Delta_1 \sin^2\xi\theta_{22}/E_1 - \tilde\Delta_2 \sin^2\xi\theta_{21}/E_2)] + \\ + 4(E_1\tilde\Delta_1/E_2 + E_2\tilde\Delta_2/E_1) - 8[\cos(\theta_{21}-\theta_{22})\xi\sin\xi\theta_{21}\sin\xi\theta_{22} - \\ - \xi\cos(\theta_{21}-\theta_{22})\sin\theta_{21}\sin\theta_{22}]\}\end{gathered} \tag{2.3}$$

Функции $\tilde f_{pk}(\xi)$ определяются по формулам

$$\tilde f_{pk}(\xi) = a_k^{-\xi} \int_0^{a_k} f_{pk}(r_p)\, r_p^{\xi} dr_p \tag{2.4}$$

Удовлетворяя условиям симметрии (1.1) и условиям контакта (1.2), после ряда преобразований для определения новых неизвестных функций получим следующие сингулярные интегральные уравнения:

$$X_{pk}(s) - \int_{L_2} [Y_{21}(\xi) K^{(l(k))}_{2m}(s, \xi) + Y_{21} K^{(l(k)+1)}_{2m} + Y_{12} K^{(l(k)+2)}_{2m} + Y_{22} K^{(l(k)+3)}_{2m}]\, d\xi = 0$$

$$Y_{nk}(s) + \int_{L_1} [X_{11} K^{(l(k))}_{1n} + X_{12} K^{(l(k)+1)}_{1n}]\, d\xi + \int_{L_3} [X_{31} K^{(l(k)+2)}_{3n} + X_{32} K^{(l(k)+3)}_{3n}]\, d\xi = F_{nk}(s)$$

$$\left(l(1)=1, \; l(2)=5; \; p=1, 3; \; n, k=1, 2; \; m = \begin{cases} 1, & p=1 \\ 2, & p=3 \end{cases}\right) \tag{2.5}$$

Ядра интегральных уравнений имеют вид

$$K^{(j)}_{qnk}(s, \xi) = \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i \Delta_q(\xi)} k^{(j)}_{nk}(s, \xi) \left(\frac{a_k}{a_q}\right)^{\xi}, \quad (j = 1 \div 8) \tag{2.6}$$

(n, $k=1$, 2; q принимает значение 1, 2 или 3 соответственно линии L_1, L_2 или L_3 интегрирования).

Здесь $B(s, \xi)$ — бета-функция, а функции $k^{(j)}_{nk}$ определяются по формулам

$$k^{(k)}_{11}(s, \xi) = (-1)^{k+1}(\alpha^+_{2k}\tilde\alpha^-_{pk} - \beta^-_{2k}\tilde\beta^+_{pk}), \quad k^{(k+2)}_{11} = (-1)^k(\alpha^+_{2k}\alpha^-_{pk} + \beta^-_{2k}\beta^+_{pk})$$

$$k^{(j+4)}_{11} = \frac{1}{s-1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{2k}} k^{(j)}_{11}$$

$$k^{(k)}_{12} = (-1)^k [\bar E_k(\alpha^+_{2k}\tilde\alpha^-_{pk} + \beta^-_{2k}\tilde\beta^+_{pk}) + \alpha_E(\tilde\alpha^-_{pk}\cos(s+1)\varepsilon_{2k} - \tilde\beta^+_{pk}\sin(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$k^{(k+2)}_{12} = (-1)^k [\bar E_k(\alpha^+_{2k}\alpha^-_{pk} + \beta^-_{2k}\beta^+_{pk}) + \alpha_E(\alpha^-_{pk}\cos(s+1)\varepsilon_{2k} - \beta^+_{pk}\sin(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$k^{(k+4)}_{12} = (-1)^{k+1} [\bar E_k(\alpha^-_{2k}\tilde\beta^+_{pk} - \beta^+_{2k}\tilde\alpha^-_{pk}) + \alpha_E(\tilde\alpha^-_{pk}\sin(s+1)\varepsilon_{2k} + \tilde\beta^+_{pk}\cos(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$k^{(k+6)}_{12} = (-1)^{k+1} [\bar E_k(\alpha^-_{2k}\beta^+_{pk} - \beta^+_{2k}\alpha^-_{pk}) + \alpha_E(\alpha^-_{pk}\sin(s+1)\varepsilon_{2k} + \beta^+_{pk}\cos(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$k_{2k}^{(1)}=\beta_{pk}^{+}M_{2k}^{-}+\alpha_{pk}^{-}N_{2k}^{+},\quad k_{2k}^{(2)}=\beta_{pk}^{+}Q_{2k}^{-}+\alpha_{pk}^{-}P_{2k}^{+}$$

$$k_{2k}^{(3)}=\beta_{pk}^{+}N_{2k}^{-}+\alpha_{pk}^{-}M_{2k}^{+},\quad k_{2k}^{(4)}=\beta_{pk}^{+}P_{2k}^{-}+\alpha_{pk}^{-}Q_{2k}^{+}$$

$$k_{2k}^{(5)}=(1+\nu_k)k_{2k}^{(1)}+4[\sin(s+1)\varepsilon_{pk}-\cos(s+1)\varepsilon_{pk}]$$

$$k_{2k}^{(6)}=(1+\nu_k)k_{2k}^{(2)}+4[\sin(s+1)\varepsilon_{pk}-\cos(s+1)\varepsilon_{pk}]$$

$$k_{2k}^{(7)}=(1+\nu_k)k_{2k}^{(3)}+4[\sin(s+1)\varepsilon_{pk}-\cos(s+1)\varepsilon_{pk}]$$

$$k_{2k}^{(8)}=(1+\nu_k)k_{2k}^{(4)}+4[\sin(s+1)\varepsilon_{pk}-\cos(s+1)\varepsilon_{pk}]$$

$$\tilde{E}_k=(1+\nu_k)E_3/E_k,\quad \alpha_E=4E_3/E_k$$

$$\varepsilon_{k1}=\theta_{k1}-(-1)^{k-1}\pi,\quad \varepsilon_{m2}=\theta_{m2}-(-1)^{m-1}\pi$$

$$(k=1,\ 2;\quad m=2,\ 3;\quad j=1\div4) \tag{2.7}$$

Свободные члены системы (2.5) выражаются через функции (2.2) и (2.4) следующим образом:

$$F_{nk}(s)=-\int\limits_{L_1}[\tilde{f}_{11}(\xi)F_{nk}^{(1)}(s,\xi)+\tilde{f}_{12}F_{nk}^{(3)}]d\xi-\int\limits_{L_2}[\tilde{f}_{21}F_{nk}^{(5)}+\tilde{f}_{22}F_{nk}^{(7)}]d\xi \tag{2.8}$$

Здесь

$$F_{nk}^{(j)}(s,\xi)=\frac{B(s+1,\ \xi-s)}{2\pi i\Delta_p(\xi)}f_{nk}^{(j)}(s,\xi)\left(\frac{a_k}{a_p}\right)^{s},\quad (j=1\div8,\ k=1,\ 2)$$

$$f_{11}^{(k)}(s,\xi)=(-1)^{k+1}(\beta_{2k}^{-}C_p^{-}-\alpha_{2k}^{+}S_p^{-})$$

$$f_{11}^{(k+2)}=(-1)^{k}(\beta_{2k}^{-}S_p^{+}+\alpha_{2k}^{+}C_p^{-}),\quad f_{12}^{(j)}=\frac{1}{s-1}\frac{d}{d\varepsilon_{2k}}f_{11}^{(j)} \tag{2.9}$$

$$f_{21}^{(k)}=(-1)^{k}[\tilde{E}_k(\alpha_{2k}^{+}S_p^{-}-\beta_{2k}^{-}C_p^{+})+\alpha_E(S_p^{-}\cos(s+1)\varepsilon_{2k}+C_p^{+}\sin(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$f_{21}^{(k+2)}=(-1)^{k}[\tilde{E}_k(\alpha_{2k}^{+}C_p^{-}+\beta_{2k}^{-}S_p^{+})+\alpha_E(C_p^{-}\cos(s+1)\varepsilon_{2k}-S_p^{+}\sin(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$f_{22}^{(k+4)}=(-1)^{k}[\tilde{E}_k(\beta_{2k}^{+}S_p^{-}+\alpha_{2k}^{-}C_p^{+})-\alpha_E(S_p^{-}\sin(s+1)\varepsilon_{2k}-C_p^{+}\cos(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$f_{22}^{(k+6)}=(-1)^{k}[\tilde{E}_k(\beta_{2k}^{+}C_p^{-}-\alpha_{2k}^{-}S_p^{+})-\alpha_E(C_p^{-}\sin(s+1)\varepsilon_{2k}+S_p^{+}\cos(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

В формулах (2.7) и (2.9) первые множители зависят только от аргументов $(s,\ \varepsilon)$, а вторые—от $(\xi,\ \theta)$. Если аргумент в одном множителе задан в явном виде, то второй множитель зависит только от $(\xi,\ \theta)$.

Систему уравнений (2.5) путем исключения неизвестных Y_{nk} $(n,\ k=1,2)$ или неизвестных X_{pk} $(p=1,\ 3;\ k=1,\ 2)$, как это сделано в работе [1], можно привести к двум неизвестным регулярным системам интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Из-за громоздких формул и уравнений эти системы здесь не приводятся.

Если неизвестные функции представить в виде рядов Фурье по приведенным, ортогональным на линии L_p, многочленам Чебышева-Эрмита

$$X_{pk}(\xi)=\Gamma(1+\xi)\sum_{q=0}^{\infty}X_{pk}^{(q)}\tilde{H}_q(\xi),\quad Y_{nk}(\xi)=\Gamma(1+\xi)\sum_{q=0}^{\infty}Y_{nk}^{(q)}\tilde{H}_q(\xi) \tag{2.10}$$

то систему (2.5) можно привести к решению бесконечных систем алгебраических уравнений

$$X_{pk}^{(l)}+\sum_{q=0}^{\infty}[A_{2m,l(k)}^{(q,l)}Y_{11}^{(q)}+A_{2m,l(k)+2}^{(q,l)}Y_{21}^{(q)}+A_{2m,l(k)+1}^{(q,l)}Y_{12}^{(q)}+A_{2m,l(k)+3}^{(q,l)}Y_{22}^{(q)}]=0$$

$$Y_{nk}^{(l)}+\sum_{q=0}^{\infty}[A_{1n,l(k)}^{(q,l)}X_{11}^{(q)}+A_{1n,l(k)+2}^{(q,l)}X_{12}^{(q)}+A_{1n,l(k)+1}^{(q,l)}X_{31}^{(q)}+A_{1n,l(k)+3}^{(q,l)}X_{32}^{(q)}]=F_{nk,l}$$

где (2.11)

$$A_{nk,h}^{(q,l)}=(-1)^{l+1}\int\limits_{L_v}\int\limits_{L_w}\Gamma(s-\xi+1)H_l(s)H_q(\xi)\exp[(s-c)^2]\frac{K_{nk}^{(h)}(s,\xi)}{\Delta_v(\xi)}\,ds\,d\xi$$

$$F_{nk,l}=(-1)^{l+1}i\int\limits_{L_1}F_{nk}(s)H_l(s)\exp[(s-c)^2]\Gamma^{-1}(1+s)ds$$

$$\left(v=\begin{vmatrix}1,\ n=1 \text{ и } k=1\\ 2,\ n=2\\ 3,\ n=1 \text{ и } k=2\end{vmatrix}\quad w=\begin{vmatrix}1,\ n=2 \text{ и } k=1\\ 2,\ n=1\\ 3,\ n=2 \text{ и } k=2\end{vmatrix};\quad h=1\div 8;\ l=0,1\ldots\right)$$

(2.12)

Возможно, что система (2.11) не регулярна. Но исключением неизвестных X_{pk} (Y_{nk}) и преобразованием системы получим новую вполне регулярную систему для определения неизвестных Y_{nk} (X_{pk}).

После решения уравнений (2.5) или (2.11) искомые напряжения будем вычислять по формулам [8]. Например, приведем выражения нормального напряжения σ_r в точках отрезка O_1O_2 ($\bar\varphi_{11}=\bar\varphi_{21}=0$; $r_1+r_2=a_1$) и касательного контактного напряжения $\tau_{r\theta}$, действующего на луче O_2C

$$\sigma_r^{(1)}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}s[(s-1)(A_{11}+C_{11})+4C_{11}]r_1^{-s-1}ds-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}s[(s-1)(A_{21}+C_{21})+4C_{21}]r_2^{-s-1}ds \qquad (2.13)$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}s\Phi_{21}'(s,\theta_{21})r_2^{-s-1}ds-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left\{\left[\frac{1}{2}\Phi_{11}''(s,\bar\varphi_{11})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1-s^2)\Phi_{11}(s,\bar\varphi_{11})\right]\sin2(\theta_{21}-\bar\varphi_{11})-s\Phi_{11}'(s,\bar\varphi_{11})\cos2(\theta_{21}-\bar\varphi_{11})\right\}r_1^{-s-1}ds$$

$$\bar\varphi_{11}=\operatorname{arctg}(r_2\sin\theta_{21}/(r_2\cos\theta_{21}-a_1)),\quad r_1\sin\bar\varphi_{11}+r_2\sin\theta_{21}=0$$

Определив неизвестные функции X_{pk} и Y_{nk} ($p=1,3$; $n,k=1,2$), функции $A_{pk},\ldots,D_{pk}$ и $A_{2k},\ldots,D_{2k}$ будем определять по формуле (2.1). После чего по формуле (2.13) будут вычислены напряжения. Интегралы, входящие в (2.13) будем вычислять при помощи теории вычетов. Например, если на границе тела, вдали от вершины O_2 действуют сосредоточенные силы или моменты, то все полюсы подынтегральных функций (кроме, может быть, точек $s=0$, ± 1) будут простыми и поэтому напряжения (2.13) при $r_n<a_n$ $(n=1, 2)$ представляются в виде

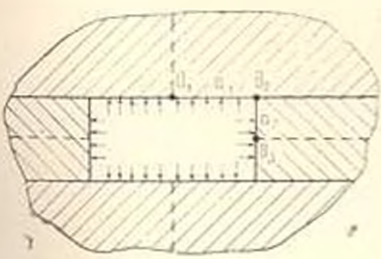
$$a_1 a_2 \sigma_r^{(1)} = \sum_{n=1}^{2} \left| \sum_{(\mathrm{Re}\,\zeta_{nk}<0)} A_{nk}^{(1)} \left(\frac{a_n}{r_n}\right)^{\zeta_{nk}+1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}^{(2)} \left(\frac{a_n}{r_n}\right)^{-k+1} \right|$$

$$a_1 a_2 \tau_{r\theta} = \sum_{n=1}^{2} \left| \sum_{(\mathrm{Re}\,\zeta_{nk}<0)} A_{nk}^{(3)} \left(\frac{a_n}{r_n}\right)^{\zeta_{nk}+1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}^{(4)} \left(\frac{a_n}{r_n}\right)^{-k+1} \right| \qquad (2.14)$$

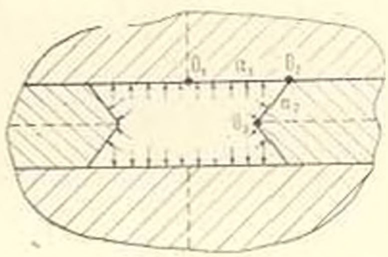
где коэффициенты $A_{nk}^{(j)}$ $(j=1\div 4)$ определяются по известным формулам простых вычетов и зависят известным образом [8] от углов φ_n, θ_{nk}, упругих постоянных и внешней нагрузки. Вторые суммы появляются из-за того, что, как следует из (2.5), все неизвестные функции имеют полюсы в точках $s=-k$ $(k=1, 2, \ldots)$. Если, хотя бы, одно из соотношений $a_n/r_n<1$ $(n=1, 2)$, то вид второй формулы (2.14) будет меняться.

3°. В качестве численного примера рассмотрена задача о контакте двух полуплоскостей из одинаковых материалов (E_1, ν_1) и двух симметрично расположенных полубесконечных полос (E_2, ν_2) постоянной толщины. При этом отверстие в составной плоскости имеет вид: 1) прямоугольника (фиг. 3), 2) вогнутого симметричного многоугольника (фиг. 4); 3) выпуклого симметричного многоугольника (фиг. 5). Внешняя нагрузка приложена на берегах отверстия в виде равномерного давления интенсивности P. При вычислениях принято

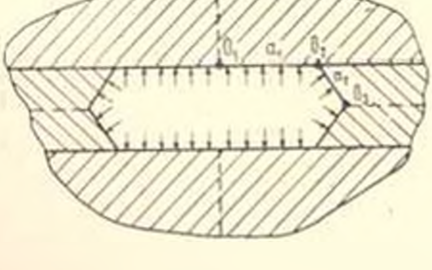
$$\nu_1=0{,}3, \quad \nu_2=0{,}25, \quad E_1/E_2=2, \quad 2a_1=a_2=2$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

При вычислениях бесконечные системы (2.14) сначала приведены к регулярным видам, которые затем решены методом последовательных приближений. При этом во всех рассмотренных случаях сумма модулей коэффициентов при неизвестных не превышает значения 0,33.

В табл. 1 приводятся значения некоторых первых корней целых функций $\Delta_1(\xi)$, $\Delta_2(\xi)$ и $\Delta_3(\xi)$.

Таблица 1

	Δ_1	Δ_3	Δ_2
1	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	0,6450 1,9989−0,3009 i 2,9958+0,3041 i 3,9998+0,3239 i 4,9999+0,3243 i 5,9999+0,3248 i
2	совпадает с первым случаем	2,7396+1,1190 6,8452+1,6816 10,8856−1,9702 14,9080+2,1673 18,9225+2,3174 22,9327−2,4368	0,7454+0,4170 i 1,9731+0,2216 i 3,1953+1,1062 i 3,9998+0,3231 i 4,5571+1,2417 i 4,9953+0,3167 i
3	совпадает с первым случаем	0,5450 1,6292−0,2312 2,9718+0,3739 4,3104+0,4554 5,6471+0,5136 6,9829+0,5591	0,8394 1,9735+0,2302 i 3,0067+0,3006 i 4,0000+0,3244 i 4,9947+0,3269 i 5,9988+0,3331 i

В табл. 2 приводятся значения интенсивностей напряжений σ_φ около точки O_2 при разных направлениях площадки, на которой действует σ_φ. При первых пяти значениях φ площадка находится в первом материале, а при остальных—во втором.

Таблица 2

Коэффициенты интенсивности контактного напряжения

1		2		3	
φ	K_φ	φ	K_φ	φ	K_φ
60°	0,030	60°	0,084	60	0,024
85°	0,125	85	0,248	85	0,087
105°	0,213	105°	0,347	105	0,143
130	0,225	130	0,485	130°	0,154
180°	0,254	180	0,564	180	0,158
60	0,161	90	0,483	30	0,112
45	0,038	60	0,342	20°	0,094
30	0,013	30°	0,045	10	0,012

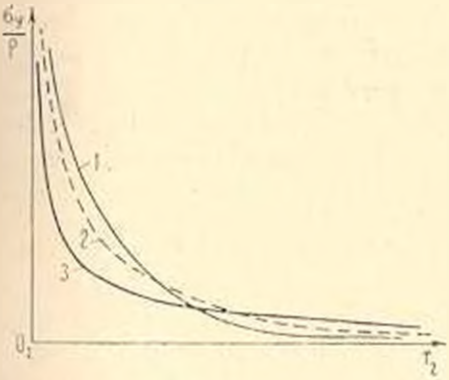
В табл. 3 приведены значения некоторых первых коэффициентов $A_{nk}^{(3)}$ ($n=1, 2, 3$; $k=1$) разложения (2.14) нормального контактного напряжения σ_φ, действующего около угловой точки O_2.

Таблица 3

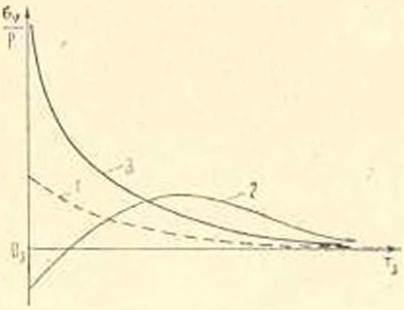
Коэффициенты разложения $A_{nk}^{(1)}$ ($n=1, 2, 3$; $k=1$) контактного напряжения σ_2

1	2	3
0,254	0,548−0,174*i*	0,158
−0,165+0,118*i*	−0,318−0,109*i*	0,047−0,019*i*
−0,079+0,028*i*	0,212−0,074*i*	−0,012−0,009*i*

Вычисления показывают, что наибольшая концентрация контактного напряжения σ_2 для рассмотренных случаев возникает, если отверстие имеет вид, указанный на фиг. 4.



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 6 приведены графики распределения напряжения σ_y, действующего на одной из осей симметрии O_3B. Вычисления показывают, что появление угловой точки существенно отражается на распределении напряжения σ_y в непосредственной близости от точки O_3.

Как видно из табл. 2, максимальный коэффициент интенсивности $(K) = |A_{31}^{(1)}|$ при особенности получается на площадках контакта двух материалов. На других площадках в этой же точке O_2 коэффициенты интенсивности напряжения σ_2 уменьшаются по мере приближения к границам.

ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆԱՁԵՎ ԱՆՑՔՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԽՆԴԻՐ

Ա. Ա. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ռ. Գ. ԹԱԴԵՎՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է տարբեր նյութերից երկու հատված սեպերի համար առաձգականության հարթ կոնտակտային խնդիրը, որոնք միացված են այնպես, որ կազմում են երկու վերջավոր և երկու կիսաանվերջ կողմեր ունեցող անվերջ տիրույթ (նկ. 1)։ Տիրույթի վերջավոր կողմերի վրա տրված են լարումները, իսկ նրա մնացած եզրերի վրա բավարարվում են սիմետրիայի պայմանները։

Խնդիրը լուծված է Մելլինի ձևափոխության կիրառմամբ ընդհանրացված սուպերպոզիցիայի մեթոդով։ Խնդրի լուծումը բերվել է քվազիլիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծման։ Դիտարկված են թվային օրինակներ։

PROBLEM FOR THE COMPOSED PLANE, WEAKENED BY THE POLYGOHAL HOLE

A. A. BABLOYAH, R. G. TADEVOSIAN

S u m m a r y

The plane contact problem of the theory of elasticity has been considered for double truncated wedges of warious material linked so as to make an infinite area with two finite and two semi-infinite sides (Fig. 1). The stresses are given on the finite sides of the area and on the other sides the conditions of symmetry are satisfied. The problem is solved by means of the method of generalized superposition with the use of Mellin transform. The problem is reduced to quasi-complete regular infinite systems of linear algebraic equations. Numerical exemples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баблоян А. А.* Плоская контактная задача для двух усеченных клиньев.—Докл. АН Арм. ССР. 1977, т. *65*, №5.
2. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Плоская задача теории упругости для области, составленной из двух усеченных клиньев.—Докл. АН Арм. ССР, 1976, т. *62*, № 1.
3. *Гринченко В. Т., Коваленко А. Д., Улитко А. Ф.* Анализ напряженного состояния жестко-защемленной пластинки на основе решения пространственной задачи теории упругости.—Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболоч. и пласт., М.: Наука, 1970.
4. *Злогин А. Н., Уфлянд Я. С.* Осесимметричная контактная задача о вдавливании упругого цилиндра в упругий слой.—ПММ, 1976, т. *40*, вып. 1.
5. *Нуллер Б. М.* О некоторых обобщениях метода кусочно-однородных решений.—Изв. ВНИИГ, 1978, т. *120*
6. *Нуллер Б. М.* О новых обобщениях метода кусочно-однородных решений.—Изв. ВНИИГ, 1978, т. *124*.
7. *Тадевосян Р. Г.* Плоская задача для бесконечного составного клина.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1983, т. *36*, №6.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости.—Л.: Наука, 1967.
9. *Bogy D. B.* The plane Solution for loined Dissimilar Elastic Semi-Strips under, Tension—J. of Appl. Mech., 1975, v. 42 (Tr. ASSME, vol. 97), Ser. E, 93.
10. *Westman R. A.* Geometrical Effects in Adhesive Joints. Intern. Journ. Eng. Sci. 1975, vol. 13, 369—391.
11. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Плоская задача для соединения из трех полуполос из различных материалов и для плоскости с отверстием в виде многоугольника.—Тезисы докладов, Всесоюз. конф. по теории упругости. Ереван: Изд. АН Арм ССР, 1979.

Ленинаканский педагогический институт
им. М. Налбандяна

Республиканский Вычислительный Центр МСХ АрмССР

Поступила в редакцию
2.III. 1984