ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 2, 1986 Механика

УДК 534.014.1

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С РАЗРЕЗОМ

АБРАМЯН Л. В.

Рассмотрены свободные колебания прямоугольной трансверсально-изотропной пластинки конечной сдвиговой жесткости. Пластинка по контуру свободно оперта и имеет прямой разрез вдоль одной из осей симметрии. Система координат выбрана так, что ось OX проходит через разрез ($c<x\leqslant a$) (фиг. 1).

Целью работы является определение низших частот колебаний рассматриваемой пластинки, которые, как известно [1], с достаточной точностью могут быть найдены и без учета инерции вращения.

В работе [2] исследованы в классической постановке колебания указанной пластинки, изготовленной из изотропного материала.

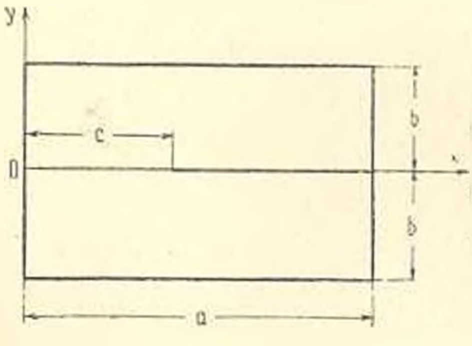
Уравнения свободных колебаний рассматриваемой пластинки можно представить в следующем виде [3]:

$$D\Delta\Delta w+\rho h(1-k\Delta)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,\qquad \Delta\Phi-\frac{2}{k(1-\nu)}\Phi=0;\qquad k=\frac{h^2}{5(1-\nu)}\frac{G}{G'}\tag{1}$$

Здесь сохранены обозначения, принятые в [3], причем $\Phi(x, y)$ — новая искомая функция, через которую функции сдвига φ и ψ представляются следующим образом:

$$\varphi=\frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w+\frac{12}{h^3}k\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{12}{h^3}\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

$$\psi=-\frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w+\frac{12}{h^3}k\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{12}{h^3}\frac{\partial\Phi}{\partial x};\qquad Z=-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\tag{2}$$



Фиг. 1

Граничные условия пластинки следующие:

$$w=M_x=\psi=0\quad \text{при}\quad x=0,\, a\tag{3}$$

$$w=M_y=H=0\quad \text{при}\quad y=\pm b\tag{4}$$

где

$$M_x=-D\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\right.$$

$$\left.-k(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta w\right]+k(1-\nu)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-k\left[1-k(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]Z$$

$$M_y = -D\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-k(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta w\right]-$$

$$-k(1-\nu)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-k\left[1-k(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]Z$$

$$H=-D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+k\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Delta w\right)-k(1-\nu)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\Phi-k^2(1-\nu)\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}$$

Формы колебаний пластинки ищутся по методу Фурье в виде тригонометрических рядов

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}W_m(y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\omega t;\qquad \Phi=\sum_{m=1}^{\infty}F_m(y)\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\omega t \tag{5}$$

удовлетворяющих условиям (3).

Подставляя (5) в (1), приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$W_m^{IV}-2W_m''\left(\lambda^2-\frac{kh}{2D}\rho\omega^2\right)+\left[\lambda^4-\rho\frac{h\omega^2}{D}(1+k\lambda^2)\right]W_m=0 \tag{6}$$

$$F_m''-\left[\lambda^2+\frac{2}{k(1-\nu)}\right]F=0;\qquad \lambda=m\pi/a$$

Общие решения полученных уравнений в зависимости от величины параметра m будут

$$W_m(y)=C_m^{(3)}\,\mathrm{sh}k_2y+C_m^{(4)}\mathrm{ch}k_2y+\begin{cases}C_m^{(1)}\sin k_1y+C_m^{(2)}\cos k_1y; & (1\leqslant m\leqslant m_1)\\ C_m^{(1)}\mathrm{sh}k_1y+C_m^{(2)}\mathrm{ch}k_1y & (m>m_1)\end{cases} \tag{7}$$

$$F_m(y)=C_m^{(5)}\,\mathrm{sh}\,k_3y+C_m^{(6)}\,\mathrm{ch}\,k_3\,y$$

где

$$k_1=\begin{cases}\left[\sqrt{\rho\frac{h\omega^2}{D}\left(1+\rho\frac{k^2h\omega^2}{4D}\right)}-\left(\lambda^2-\rho\frac{kh\omega^2}{2D}\right)\right]^{1/2} & (1\leqslant m\leqslant m_1)\\ \left[-\sqrt{\rho\frac{h\omega^2}{D}\left(1+\rho\frac{k^2h\omega^2}{4D}\right)}+\left(\lambda^2-\rho\frac{kh\omega^2}{2D}\right)\right]^{1/2} & (m>m_1)\end{cases}$$

$$k_2=\left[\sqrt{\rho\frac{h\omega^2}{D}\left(1+\rho\frac{k^2h\omega^2}{4D}\right)}+\left(\lambda^2-\rho\frac{kh\omega^2}{2D}\right)\right]^{1/2},\quad k_3=\left[\lambda^2+\frac{2}{k(1-\nu)}\right]^{1/2} \tag{8}$$

Здесь m_1 — целая положительная величина, зависящая от параметров пластинки.

Постоянные интегрирования $C_m^{(1)}-C_m^{(6)}$ определяются из граничных условий пластинки на краю $y=b$ (4) и условий вдоль оси OX. И так как формулировка последних зависит от формы колебаний пластинки, то симметричные и антисимметричные колебания рассмотрены в отдельности.

1. *Симметричные колебания.* Условия вдоль оси $y=0$ будут

$$\partial w/\partial y = N_y = H = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant c) \tag{9}$$

$$M_y = N_y = H = 0, \quad (c \leqslant x \leqslant a)$$

где $$N_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w - \frac{\partial\Phi}{\partial x} - k\frac{\partial Z}{\partial y}$$

(и здесь надо полагать $Z = -\rho h\partial^2 w/\partial t^2$).

После удовлетворения условиям (4) и (9) получаем следующие парные уравнения:

$$\sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(2)}\cos k_1 b\frac{A}{B}\sin\frac{m\pi}{a}x + \sum_{m=m_1+1}^{\infty} C_m^{(2)}\operatorname{ch}k_1 b\frac{A}{B}\sin\frac{m\pi}{a}x = 0, \quad (0 \leqslant x \leqslant c)$$

$$\sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(2)}\cos k_1 b\frac{C}{B}\sin\frac{m\pi}{a}x + \sum_{m=m_1+1}^{\infty} C_m^{(2)}\operatorname{ch}k_1 b\frac{C}{B}\sin\frac{m\pi}{a}x = 0, \quad (c < x \leqslant a) \tag{10}$$

где

$$A = (M_2 - M_1)[k_1(H_3N_2 - N_3H_2) + k_2(H_1N_3 - H_3N_1)]$$

$$B = \frac{M_3}{\operatorname{sh}k_3 b}(H_1N_2 - H_2N_1) + (M_1 - M_2)(H_3N_2 - H_2N_3)\times\begin{cases}\sin k_1 b & (1 \leqslant m \leqslant m_1)\\ \operatorname{sh}k_1 b & (m > m_1)\end{cases}$$

$$C = M_3(N_1H_2 - H_1N_2)\left|\frac{1}{\operatorname{sh}k_3 b}\left(\frac{M_2}{\operatorname{ch}k_2 b} - \frac{M_1}{\cos k_1 b}\right) + \frac{M_1 - M_2}{\operatorname{th}k_3 b}\right| +$$

$$+ (M_1 - M_2)\left|\frac{M_1(H_3N_2 - H_2N_3)}{\operatorname{ctg}k_1 b} + \frac{M_2(N_3H_1 - H_3N_1)}{\operatorname{cth}k_2 b}\right|, \quad (1 \leqslant m \leqslant m_1) \tag{11}$$

$$C = M_3(N_1H_2 - H_1N_2)\left|\frac{1}{\operatorname{sh}k_3 b}\left(\frac{M_2}{\operatorname{ch}k_2 b} - \frac{M_1}{\operatorname{ch}k_1 b}\right) + \frac{M_1 - M_2}{\operatorname{th}k_3 b}\right| +$$

$$+ (M_1 - M_2)\left|\frac{M_1(H_3N_2 - H_2N_3)}{\operatorname{cth}k_1 b} + \frac{M_2(N_3H_1 - H_3N_1)}{\operatorname{cth}k_2 b}\right|, \quad (m > m_1)$$

и соотношения

$$C_m^{(1)} = C_m^{(2)}\frac{(M_2 - M_1)(H_3N_2 - H_2N_3)}{B}\times\begin{cases}\cos k_1 b & (1 \leqslant m \leqslant m_1)\\ \operatorname{ch}k_1 b & (m > m_1)\end{cases}$$

$$C_m^{(3)} = C_m^{(1)}\frac{N_3H_1 - H_3N_1}{H_3N_2 - H_2N_3}$$

$$C_m^{(4)} = C_m^{(1)}\Big\{\operatorname{sh}k_2 b(M_2 - M_1)(N_3H_1 - H_3N_1) +$$

$$+ \frac{M_3}{\operatorname{sh}k_3 b}(N_1H_2 - H_2N_1)[(M_2 - M_1)(H_2N_3 - H_3N_2)\operatorname{ch}k_2 b]^{-1}\Big\} \tag{12}$$

$$C_m^{(5)} = C_m^{(1)}\operatorname{cth}k_3 b\frac{H_1N_2 - H_2N_1}{H_3N_2 - H_2N_3}; \quad C_m^{(6)} = C_m^{(1)}\frac{H_2N_1 - N_3H_1}{H_3N_2 - H_2N_3}$$

В (11) и (12) введены следующие обозначения:

$$H_1 = (1-\nu)(kN_1 - Dk_1)\lambda; \quad H_2 = (1-\nu)(kN_2 - Dk_2)\lambda; \quad H_3 = 1 + k\lambda^2(1-\nu)$$

$$M_1 = D\left\{ \nu\lambda^2 + k\left|\lambda^4(1-\nu) - \rho\frac{h\omega^2}{D}(1+k\lambda^2)\right| \pm k_1^2[1+k\lambda^2(1-\nu)]\right\}$$

$$M_2 = D\left\{ \nu\lambda^2 + k\left|\lambda^4(1-\nu) - \rho\frac{h\omega^2}{D}(1+k\lambda^2)\right| - k_2^2[1+k\lambda^2(1-\nu)]\right\}$$

$$M_3 = \lambda k k_3(1-\nu)$$

$$N_1 = k_1 D\left(\lambda^2 - \rho\frac{kh}{D}\omega^2 \pm k_1^2\right); \quad N_2 = k_2 D\left(\lambda^2 - \rho\frac{kh}{D}\omega^2 - k_2^2\right); \quad N_3 = \lambda$$

(В выражениях M_1; N_1 в сдвоенном знаке „+" соответствует случаю $1 \leqslant m \leqslant m_1$).

Вводя теперь обозначения

$$X_m = C_m^{(2)}\frac{1}{m}\frac{C}{B}\times\begin{cases}\cos k_1 b & (1 \leqslant m \leqslant m_1)\\ \operatorname{ch} k_1 b & (m > m_1)\end{cases} \qquad (13)$$

$$\alpha = \frac{\pi x}{a}; \quad \beta = \frac{\pi c}{a}$$

После некоторых преобразований парные уравнения (10) приводим к виду

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} x_m(1-N_m)\sin m\alpha = 0 \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant \beta)\\ &\sum_{m=1}^{\infty} m x_m \sin m\alpha = 0 \qquad (\beta < \alpha \leqslant \pi)\end{aligned} \qquad (14)$$

где
$$N_m = 1 - m\frac{A}{C}$$

Для выяснения поведения N_m при $m \to \infty$ разложим выражения k_i (8), входящие в N_m, в степенные ряды, сохраняя в них первые два члена. Проделав указанную процедуру, получим

$$k_1 = \lambda\left(1 - \frac{kh\omega^2}{2D\lambda^2}\rho - \frac{1}{2k\lambda^2}\right); \quad k_2 = \lambda\left(1 + \frac{1}{2k\lambda^2}\right), \quad k_3 = \lambda\left(1 + \frac{1}{k(1-\nu)\lambda^2}\right) \qquad (15)$$

Используя (15), можно показать, что N_m при возрастании m имеет экспоненциальный порядок убывания

$$N_m \approx \exp\left(-m\frac{2\pi b}{a}\right) \qquad (16)$$

Здесь это не показано потому, что хотя это и элементарно, но весьма громоздко.

В дальнейшем парные уравнения (14) сводятся, как показано в [2], к следующей бесконечной системе линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} N_m X_m - X_n = 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \qquad (17)$$

где

$$a_{nm}=\frac{m}{2(n^2-m^2)_\beta}\{(n-m)[P_{m-1}(\cos\beta)P_{n-1}(\cos\beta)-P_m(\cos\beta)P_n(\cos\beta)]+$$
$$+(n+m)[P_{n-1}(\cos\beta)P_m(\cos\beta)+P_n(\cos\beta)P_{m-1}(\cos\beta)]\}$$
$$a_{nn}=\frac{1}{4}\Big\{2-2P_{n-1}(\cos\beta)P_n(\cos\beta)+P_{n-1}^2(\cos\beta)-P_n^2(\cos\beta)-$$
$$-4\sum_{k=1}^{n-1}P_k(\cos\beta)[\cos\beta P_k(\cos\beta)-P_{k+1}(\cos\beta)]\Big\}$$

Для существования нетривиальных решений коэффициентов необходимо, чтобы определитель бесконечной системы (17) равнялся нулю. Из этого условия и определяются собственные частоты. Можно показать, что при условии (16) указанный определитель нормальный. Это позволяет использовать для определения частот метод редукции.

2. Антисимметричные колебания. В этом случае условия по оси $y=0$ будут

$$w=M_y=H=0 \quad (0\leqslant x\leqslant c)$$
$$N_y=M_y=H=0 \quad (c<x\leqslant a) \tag{18}$$

Удовлетворяя условиям (18) и (4), получаем

$$C_m^{(1)}=0; \qquad C_m^{(3)}=C_m^{(2)}\frac{D}{M_3}\times\begin{cases}-(k_1^2+k_2^2) & (1\leqslant m\leqslant m_1)\\ (k_1^2-k_2^2) & (m>m_1)\end{cases}$$
$$C_m^{(4)}=-C_m^{(2)};$$

$$C_m^{(2)}=C_m^{(1)}\frac{M_2}{A\operatorname{ch}k_3b}\times\begin{cases}\sin k_1b\left(\dfrac{H_1M_2}{\operatorname{tg}k_1b}-\dfrac{H_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}\right) & (1\leqslant m\leqslant m_1)\\ \operatorname{sh}k_1b\left(\dfrac{H_1M_2}{\operatorname{th}k_1b}-\dfrac{H_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}\right) & (m>m_1)\end{cases}$$

$$C_m^{(3)}=-\frac{1}{M_2\operatorname{sh}k_2b}\times$$
$$\times\begin{cases}C_m^{(1)}M_1\sin k_1b+C_m^{(2)}[M_1\cos k_1b-M_2\operatorname{ch}k_2b-(M_1-M_2)\operatorname{ch}k_3b]\\ C_m^{(1)}M_1\operatorname{sh}k_1b+C_m^{(2)}[M_1\operatorname{ch}k_1b-M_2\operatorname{ch}k_2b-(M_1-M_3)\operatorname{ch}k_3b]\end{cases}$$

а также

$$\sum_{m=1}^{m_1}C_m^{(1)}\sin k_1b\,\frac{M_2-M_1}{M_2}\left[1+\frac{M_3}{A}\left(\frac{\cos k_1b}{\operatorname{ch}k_3b}-1\right)\left(\frac{H_1M_2}{\operatorname{tg}k_1b}-\frac{H_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}\right)\right]\sin\frac{m\pi}{a}x+$$
$$+\sum_{m=m_1+1}^{\infty}C_m^{(1)}\operatorname{sh}k_1b\,\frac{M_2-M_1}{M_2}\left[1+\frac{M_3}{A}\left(\frac{\operatorname{ch}k_1b}{\operatorname{ch}k_3b}-1\right)\left(\frac{H_1M_2}{\operatorname{th}k_1b}-\frac{H_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}\right)\right]\times$$
$$\times\sin\frac{m\pi}{a}x=0 \qquad (0\leqslant x\leqslant c) \tag{19}$$

$$\sum_{m=1}^{m_1}C_m^{(1)}\frac{\sin k_1b}{M_2}\left[\frac{N_1M_2}{\operatorname{tg}k_1b}-\frac{N_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}-\frac{1}{A}\left(\frac{H_1M_2}{\operatorname{tg}k_1b}-\frac{H_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}\right)\times\right.$$
$$\times\Big\{(M_1-M_3)\left(\frac{M_2N_3}{\operatorname{cth}k_3b}-\frac{M_3N_2}{\operatorname{th}k_2b}\right)-M_3\left[\frac{M_3N_3}{\operatorname{ch}k_3b}-\frac{\cos k_1b}{\operatorname{ch}k_3b}\left(\frac{N_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}+\right.\right.$$

$$+\frac{N_1M_2}{\operatorname{tg}k_1b}\Bigg)\Bigg|\Bigg\}\Bigg|\sin\frac{m\pi}{a}x+\sum_{m=m_1+1}^{\infty}C_m^{(1)}\frac{\operatorname{sh}k_1b}{M_2}\Bigg|\frac{N_1M_2}{\operatorname{th}k_1b}-\frac{N_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}-$$

$$-\frac{1}{A}\left(\frac{H_1M_2}{\operatorname{th}k_1b}-\frac{H_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}\right)\Bigg|(M_1-M_2)\left(\frac{M_2N_3}{\operatorname{cth}k_3b}-\frac{M_3N_2}{\operatorname{th}k_2b}\right)-$$

$$-M_3\Bigg|\frac{M_2N_2}{\operatorname{ch}k_3b}-\frac{\operatorname{ch}k_1b}{\operatorname{ch}k_3b}\left(\frac{N_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}-\frac{N_1M_2}{\operatorname{th}k_1b}\right)\Bigg|\Bigg|\sin\frac{m\pi}{a}x=0\qquad(c\leqslant x\leqslant a)$$

где

$$A=(M_1-M_2)\left(\frac{H_3M_2}{\operatorname{cth}k_3b}-\frac{H_2M_3}{\operatorname{th}k_2b}\right)-M_3\frac{H_2M_2}{\operatorname{ch}k_3b}-$$

$$-\begin{cases}M_3\dfrac{\cos k_1b}{\operatorname{ch}k_3b}\left(\dfrac{H_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}+\dfrac{H_1M_2}{\operatorname{tg}k_1b}\right) & (1\leqslant m\leqslant m_1)\\[2ex] M_3\dfrac{\operatorname{ch}k_1b}{\operatorname{ch}k_3b}\left(\dfrac{H_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}-\dfrac{H_1M_2}{\operatorname{th}k_1b}\right) & (m>m_1)\end{cases}$$

Дифференцируя дважды по x первое из уравнений (19) и выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям первого пункта, опять приходим к системе (14). Для N_m в этом случае имеем

$$N_m=1-\frac{m^2}{M_2\operatorname{th}k_3b}\Bigg\{(k_2^2+k_1^2)\left(\frac{H_3M_2}{\operatorname{cth}k_3b}-\frac{H_2M_3}{\operatorname{th}k_2b}\right)+M_3\Bigg|\left(\frac{\cos k_1b}{\operatorname{ch}k_3b}-1\right)\times$$

$$\times\left(\frac{H_1M_2}{\operatorname{tg}k_1b}-\frac{H_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}\right)+\frac{\cos k_1b}{\operatorname{ch}k_3b}\left(\frac{H_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}-\frac{H_1M_2}{\operatorname{ctg}k_1b}\right)-\frac{H_2M_2}{\operatorname{ch}k_3b}\Bigg|\Bigg\}\times$$

$$\times\Bigg\{\frac{M_2(H_3N_1-N_3H_1)}{\operatorname{tg}k_1b}-\frac{M_1(H_3N_2-N_3H_2)}{\operatorname{th}k_2b}+\frac{M_3(H_2N_1-N_2H_1)}{M_1-M_2}\times$$

$$\times\Bigg|M_1\frac{\operatorname{cth}k_2b}{\operatorname{ch}k_3b}-M_2\frac{\operatorname{ctg}k_1b}{\operatorname{ch}k_3b}-(M_1-M_2)\frac{\operatorname{cth}k_3b}{\operatorname{tg}k_1b}\Bigg|\Bigg\}^{-1}\qquad(1\leqslant m\leqslant m_1)\qquad(20)$$

$$N_m=1-\frac{m^2}{M_2\operatorname{th}k_3b}\Bigg\{(k_2^2-k_1^2)\left(\frac{H_3M_2}{\operatorname{cth}k_3b}-\frac{H_2M_3}{\operatorname{th}k_2b}\right)+M_3\Bigg|\left(\frac{\operatorname{ch}k_1b}{\operatorname{ch}k_3b}-1\right)\times$$

$$\times\left(\frac{H_1M_2}{\operatorname{th}k_1b}-\frac{H_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}\right)+\frac{\operatorname{ch}k_1b}{\operatorname{ch}k_3b}\left(\frac{H_2M_1}{\operatorname{th}k_2b}-\frac{H_1M_2}{\operatorname{cth}k_1b}\right)-\frac{H_2M_2}{\operatorname{ch}k_3b}\Bigg|\Bigg\}\times$$

$$\times\Bigg\{\frac{M_2(H_3N_1-N_3H_1)}{\operatorname{th}k_1b}-\frac{M_1(H_3N_2-N_3H_2)}{\operatorname{th}k_2b}+\frac{M_3(H_2N_1-N_2H_1)}{M_1-M_2}\times$$

$$\times\Bigg|M_1\frac{\operatorname{cth}k_2b}{\operatorname{ch}k_3b}-M_2\frac{\operatorname{cth}k_1b}{\operatorname{ch}k_3b}-(M_1-M_2)\frac{\operatorname{cth}k_3b}{\operatorname{th}k_1b}\Bigg|\Bigg\}^{-1}\qquad(m>m_1)$$

И в этом случае, используя (15), можно показать, что N_m при $m\to\infty$ имеет экспоненциальный порядок убывания.

3. *Численные результаты.* В таблице приведены первые безразмерные основные частоты $100\,\omega\,(\rho h^3/D)^{1/2}$ колебаний пластинок с параметрами $h/b=0{,}1$; $\nu=0{,}25$; $G/G'=2$ с разным отношением сторон a/b и разной длиной разреза $\left(\beta=0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4};\ \pi\right)$. В каждой клет-

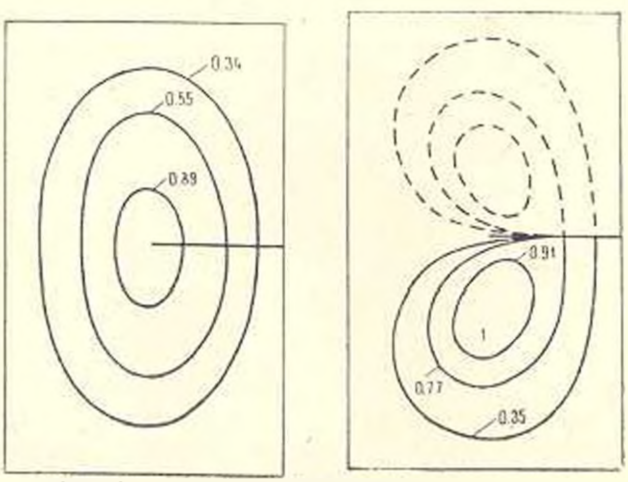
ке таблицы сверху помещена частота, соответствующая симметричной форме колебаний, а снизу—антисимметричной. Там же приведены порядки определителей, при решении которых получены соответствующие собственные частоты с достаточной точностью (расхождение результатов двух последних итераций не превышает 1 %).

Сопоставление приведенных результатов с частотами, найденными в [2], показывает, что последние всегда больше и что это расхождение результатов с увеличением β растет.

Таблица

a/b	Порядок опред.	$\beta=0$	$\beta=\frac{\pi}{4}$	$\beta=\frac{\pi}{2}$	$\beta=\frac{3\pi}{4}$	$\beta=\pi$
0,4	4	54,883	51,972 55,404	55,211 58,066	55,355 60,262	55,375 60,525
0,6	4	27,244	27,340 27,750	27,587 30,540	27,733 33,318	27,753 33,671
0,8	4	16,572	16,674 17,047	16,924 19,764	17,072 22,996	17,092 23,396
1	10 8	11,398	11,513 11,668	11,779 13,720	11,932 17,527	11,950 18,483
1,5	10 8	6,045	6,185 6,240	6,513 7,747	6,709 12,193	6,732 13,557
2	10 8	4,031	4,195 4,208	4,590 5,447	4,842 10,005	4,871 11,828
3	10 8	2,415	2,514 2,626	3,117 3,304	3,488 7,227	3,531 10,600

Как видно из таблицы, с уменьшением длины разреза (увеличение β) собственные частоты увеличиваются, причем частоты антисимметричных форм увеличиваются более резко.



Фиг. 2. а) симметричная форма
б) антисимметричная форма

В том случае, когда разрез проходит по всей длине пластинки ($\beta=0$), рассматриваемая пластинка делится на две пластинки с тремя шарнирно опертыми и одним свободным краем, граничные условия которых вдоль свободных краев при симметричных и антисимметричных колебаниях совпадают. Поэтому для обеих форм колебаний в этом случае получаются одни и те же частоты, которые при $\beta\neq 0$ разветвляются на симметричные и антисимметричные; и чем больше β, тем больше разница между этими частотами.

На фиг. 2 в виде линий равных прогибов приведены первые формы симметричных и антисимметричных колебаний, полученные для пластинки с отношением сторон $a/b=0{,}8$ при $\beta=\pi/2$. Цифры на кривых показывают отношение прогиба на данной линии к максимальному прогибу пластинки.

ՃԵՂՔՈՎ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ԱԶԱՏ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Լ. Վ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ուսումնասիրվում է սահքի վերջավոր կոշտություն ունեցող ազատ հենված ուղղանկյուն տրանսվերսալ իզոտրոպ սալի սեփական տատանումները, երբ սալն ունի ճեղք սիմետրիայի առանցքներից մեկի ուղղությամբ։ Ճեղքով անցնող առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ և ոչ սիմետրիկ տատանումները դիտարկվում են առանձին-առանձին։ Տատանումների հաճախականությունների որոշումը բերվում է անվերջ մատրիցայի սեփական արժեքները գտնելուն։ Կատարված է թվային հետազոտություն։

THE FREE VIBRATIONS OF A TRANSVERSAL ISOTROPIC PLATE WITH A CUT

L. V. ABRAMIAN

S u m m a r y

The free vibrations of free supported along the sides of a rectangular transversal isotropic plate with finite shear stiffness with the right cut along the longitudinal axis of symmetry are considered. The symmetric and antisymmetric forms of vibration in relation to the axis with the cut are differentiated.

The question of determining the frequency of vibrations are reduced to the computing of the eigenvalues of matrix of coefficients of an infinite system of linear homogeneous equations. Numerical results are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959.
2. *Абрамян Л. В., Мовсисян Л. А.* Свободные колебания прямоугольной пластинки с разрезом.—Докл. АН АрмССР, 1981, т. 73, № 4.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М.: Физматгиз, 1967.

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического института им. К. Маркса

Поступила в редакцию
2.XII.1983